

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN



TESIS DOCTORAL

Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Mónica Arnal Palacián

Directores

Francisco Claros Mellado
María Teresa Sánchez Compañía

Madrid

© Mónica Arnal Palacián, 2019

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

**Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales,
Sociales y Matemáticas**



TESIS DOCTORAL

Límite infinito de una sucesión: Fenómenos que organiza

PRESENTADA POR

Mónica Arnal Palacián

DIRIGIDA POR

Francisco Javier Claros Mellado

María Teresa Sánchez Compañá

Madrid, 2019



U N I V E R S I D A D
COMPLUTENSE
M A D R I D

**DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS
PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR**

D./Dña. Monica Arnal Palacián, estudiante en el Programa de Doctorado D9AS-Doctorado en Educación RD99 de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, como autora de la tesis presentada para la obtención del título de Doctor y titulada:

Límite infinito de una sucesión: Fenómenos que organiza

y dirigida por:

Francisco Javier Claros Mellado y María Teresa Sánchez Compañía

DECLARO QUE:

La tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la Ley de Propiedad Intelectual (R.D. legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad del contenido de la tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

En Madrid, a 17 de mayo de 2019

Fdo.: Mónica Arnal Palacián

A mi padre, a mi madre y a mi hermana
A Pablo, por darme siempre el apoyo que necesito

Agradecimientos

A través de estas palabras quiero agradecer a todas aquellas personas que han sido partícipes de la conclusión de este trabajo.

A Jesús y Blanca, mis padres, por haber sacrificado muchos de sus momentos para que tanto mi hermana como yo pudiésemos estudiar aquello que nosotras deseásemos, y por mostrar siempre su apoyo para que alcancemos nuestros sueños.

A Pablo, mi compañero de vida, mi apoyo, quien ha sabido esperar con paciencia las largas ausencias que este trabajo ha requerido, sacándome, además, una sonrisa en los momentos más complejos.

A Cristina, mi hermana, mi amiga de aventuras desde siempre; a ella, amante de la lectura y la literatura, he recurrido en la redacción de este trabajo en más de una ocasión.

A mis abuelas, María y Joaquina, y a mis abuelos, Aurelio y Fidel; a pesar de que ninguno ha llegado a ver el final de este trabajo, seguro estarán muy orgullosos de este momento. También a todos aquellos familiares que en algún instante se preocuparon por esta memoria.

A Francisco Javier Claros Mellado, mi director de tesis, por aceptar el reto de dirigir mi doctorado cuando todavía no me conocía. Gracias a su dedicación, rigurosidad, paciencia y cariño este trabajo ha podido salir adelante.

A María Teresa Sánchez Compañía, mi directora de tesis, por haberse unido a nosotros en el momento preciso. Sus mensajes de ánimo han servido para remontar el vuelo en los peores momentos.

A Moisés Coriat Benarroch, mi director de tesis durante el primer año. Lamentablemente no ha podido ver la finalización de este trabajo, pero sus sugerencias y comentarios llenos de acierto están aquí plasmados.

A Alberto Arnal Bailera, mi primer profesor de Didáctica de las Matemáticas, quien me hizo descubrir esta maravillosa área y, a día de hoy, siempre está dispuesto a resolverme cualquier cuestión.

A los amigos y compañeros que este doctorado me ha permitido conocer: Íñigo, Isa, Miguel Ángel, Isabel y Juan Antonio, y también aquellos que, pese a no conocer sobre aquello en lo que dedicaba mi tiempo, siempre tuvieron unas palabras de aliento: Dani, Pilar, Isabel, Anissa, Henar, Silvia y Virginia.

A los alumnos y las alumnas del Máster en Formación del Profesorado de la Universidad de Zaragoza, Universidad Rey Juan Carlos, Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Málaga que, desinteresadamente, participaron en el estudio experimental.

A los docentes que cedieron su fondo bibliográfico personal para poder completar el estudio de libros de texto, Prof.^a Mercedes Palarea, Prof. Antonio Jiménez y Prof. Alberto Gallardo, y también aquellos que participaron en los cuestionarios para elegir una definición de límite infinito de una sucesión correcta y aceptada por el profesorado, pertenecientes a IES Pablo Gargallo (Zaragoza), IES Calderón de la Barca (Pinto, Madrid), Universidad de Zaragoza y Universidad Complutense de Madrid.

Por último, a los miembros de PNA, en especial a Antonio Codina y a Carlos de Castro, quienes ayudaron con sugerencias en cada uno de los seminarios en los que participé y me mostraron su apoyo; a los miembros de GIDAM y SEIEM, por sus comentarios constructivos y permitir que este trabajo tuviese reservado un espacio para la conversación; a mis compañeros de Unizar y de la URJC, por permitirme contarles cada uno de los avances que iba alcanzando.

Índice de contenidos

Índice de figuras	vii
Índice de tablas	xi
Resumen	xv
Abstract.....	xvii
Introducción.....	3
1. Delimitación del problema de investigación	11
1.1. Objetivos.....	12
1.2. Hipótesis	16
1.3. Metodología.....	18
2. Antecedentes.....	25
2.1. Evolución histórica	27
2.1.1.Evolución histórica de la noción de límite.....	27
2.1.2.Evolución histórica del infinito.....	30
2.2. Tipos de infinito, dificultades, obstáculos y errores en torno al límite infinito de una sucesión.....	33
2.2.1.Diferentes tipos de infinito.....	34
2.2.2.Dificultades, obstáculos y errores específicos del límite	36
2.2.3.Dificultades, obstáculos y errores específicos del infinito.....	40
2.2.4.Dificultades en torno a los procesos infinitos	42
2.3. Investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje del límite.....	45
2.3.1.Investigaciones realizadas con el alumnado	45
2.3.2.Investigaciones realizadas con el profesorado	50
2.3.3.Investigaciones desarrolladas utilizando libros de texto y manuales universitarios.....	53
2.4. Ubicación curricular del límite infinito de una sucesión	57
2.4.1.Investigaciones del límite y el infinito en la legislación española.....	57
2.4.2.Legislación española. De la LGE a la LOMCE.....	59
3. Marco Teórico.....	65
3.1. Fenomenología	67

3.1.1. Análisis fenomenológico	68
3.1.2. Tipos de fenomenología.....	68
3.1.3. Objetos mentales y conceptos	69
3.1.4. Límite infinito de una sucesión.....	70
3.2. Sistemas de representación	72
3.2.1. Representaciones internas y representaciones externas	72
3.2.2. Sistemas de representación	74
3.2.3. Sistemas de representación del límite	77
3.3. Pensamiento Matemático Avanzado.....	81
3.3.1. Pensamiento Matemático Elemental vs Pensamiento Matemático Avanzado	81
3.3.2. Abstracción, generalización y síntesis	82
3.3.3. Procesos cognitivos.....	84
3.3.4. Límite infinito de una sucesión.....	89
3.4. Teoría APOS.....	91
3.4.1. Elementos de la teoría APOS.....	91
3.4.2. Descomposición genética.....	94
3.4.3. Teoría APOS para el límite	96
4. Estudio teórico	101
4.1. Límite infinito de una sucesión: definición	102
4.2. Fenómenos organizados por la definición de límite infinito de una sucesión ..	105
4.2.1. Crecimiento Intuitivo Ilimitado	106
4.2.2. Decrecimiento Intuitivo Ilimitado.....	107
4.2.3. Retroalimentación o Ida-Vuelta en sucesiones de límite más y menos infinito.....	108
4.2.4. Fenómenos organizados por otras definiciones	112
4.2.5. Relación entre fenómenos intuitivos y formales del límite finito e infinito.	114
4.2.6. Fenómenos, sistemas de representación y formatos	115
4.3. Conocimiento matemático implícito en la definición de límite infinito de una sucesión.....	122
4.3.1. Dependencias	122
4.3.2. Suficientemente grande, procesos infinitos y tipos de infinito	123
4.3.3. Acotación	125

4.3.4. Divergencia	125
4.4. Límite infinito de una función en el infinito.....	132
4.5. Comparación entre el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión.....	137
4.5.1. Comparación de los requisitos matemáticos.....	137
4.5.2. Comparación de los fenómenos	139
4.6. Aportaciones al marco teórico	141
4.6.1. Aportaciones a la fenomenología.....	141
4.6.2. Aportaciones al Pensamiento Matemático Avanzado.....	141
4.6.3. Aportaciones a la Teoría APOS	143
4.7. Conclusiones.....	145
5. Fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. en libros de texto.....	151
5.1. Estudio empírico de libros de texto	153
5.1.1. Rasgos principales del estudio de libros de texto	153
5.1.2. Descripción de la muestra	154
5.1.3. Guion estructurado para el análisis	155
5.2. Muestra de libros de texto y ejemplo de uno de ellos.....	159
5.2.1. Muestra	159
5.2.2. Ejemplo	162
5.3. Los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. en la muestra	170
5.3.1. Tabla de frecuencias del fenómeno c-i.i.	170
5.3.2. Tabla de frecuencias del fenómeno d-i.i.	171
5.3.3. Tabla de frecuencias del fenómeno i.v.s.i.	173
5.3.4. Sistemas de representación y formatos de los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.....	176
5.3.5. Relación entre los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.....	179
5.4. Estudio de los fenómenos por periodos	181
5.4.1. Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. por “Décadas”.....	181
5.4.2. El fenómeno i.v.s.i. por “Décadas”.....	186
5.4.3. Comparación de los fenómenos por “Décadas”.....	188
5.4.4. Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. por periodo legislativo	191
5.4.5. El fenómeno i.v.s.i. por periodo legislativo	197

5.4.6.Comparación de los fenómenos por periodo legislativo.....	199
5.5. Comparación de los fenómenos caracterizados para diferentes límites.	202
5.5.1.Comparación de los resultados obtenidos con el estudio de libros de texto para los fenómenos intuitivos.....	202
5.5.2.Comparación de los resultados obtenidos con el estudio de libros de texto para los fenómenos formales.....	207
5.5.3.Otras comparaciones. Perspectivas futuras.	212
5.6. Conclusiones.....	213
6. Fenomenología del límite infinito de una sucesión en profesorado de Educación Secundaria en formación	219
6.1. Método: materiales, pruebas piloto, fases del protocolo de actuación y tratamiento de la información.	221
6.1.1.Material utilizado con el alumnado.....	221
6.1.2.Pruebas piloto.....	226
6.1.3.Fases establecidas	229
6.1.4.Categorización y dimensiones de las respuestas	231
6.2. Características de la muestra.....	234
6.3. Análisis	236
6.3.1.Informes grupales e individuales	236
6.3.2.Análisis fenomenológico de los debates	268
6.3.3.Comparación de los resultados con el profesorado en activo	278
6.3.4.Comparación de los resultados con los libros de texto	281
6.4. Conclusiones de los debates	289
7. Conclusiones y perspectivas futuras	295
7.1. Objetivos.....	297
7.2. Hipótesis	305
7.3. Difusión de los resultados.....	313
7.4. Perspectivas futuras	316
7.5. Reflexión final	318
Bibliografía.....	323
Anexos.....	341

A1. Anexos Capítulo 4. Consulta a expertos y divergencia.	342
A1.1. Carta a expertos y preguntas al cuestionario	343
A1.2. Cuestionario 1.....	346
A1.3. Comentarios y respuestas de expertos a Cuestionario 1.....	348
A1.4. Divergencia. Análisis manuales universitarios y libros de texto.....	351
A1.5. Cuestionario 2.....	362
A1.6. Comentarios y respuestas de expertos a Cuestionario 2.....	364
A2. Anexos Capítulo 5. Informes de los libros de texto.....	366
A2.1. Informe de LSI93001	367
A2.2. Informe de LSI93002	369
A2.3. Informe de LSI94001	371
A2.4. Informe de LSI95001	373
A2.5. Informe de LSI95002	376
A2.6. Informe de LSI96001	378
A2.7. Informe de LSI96002	381
A2.8. Informe de LSI97001	383
A2.9. Informe de LSI97002	385
A2.10. Informe de LSI97003	388
A2.11. Informe de LSI97004	390
A2.12. Informe de LSI97005	392
A2.13. Informe de LSI98001	395
A2.14. Informe de LSI98002	399
A2.15. Informe de LSI98003	403
A2.16. Informe de LSI98004	405
A2.17. Informe de LSI98005	408
A2.18. Informe de LSI99001	411
A2.19. Informe de LSI99002	416
A2.20. Informe de LSI99003	420
A2.21. Informe de LSI99004	422
A2.22. Informe de LSI99005	426
A2.23. Informe de LSI99006	432
A2.24. Informe de LSI00001	434
A2.25. Informe de LSI00002	437

A2.26. Informe de LSI00003	441
A2.27. Informe de LSI00004	447
A2.28. Informe de LSI00005	451
A2.29. Informe de LSI00006	454
A2.30. Informe de LSI00007	457
A2.31. Informe de LSI00008	460
A2.32. Informe de LSI01001	465
A2.33. Informe de LSI01002	467
A2.34. Informe de LSI01003	469
A2.35. Informe de LSI01004	472
A3. Anexos Capítulo 6. Fenomenología del límite infinito de una sucesión en profesorado de Educación Secundaria en formación.....	475
A3.1. Cuestionario presentado	476
A3.2. Fragmentos utilizados.....	485
A3.3. Transcripciones de los grupos	493
A3.4. Informes grupales	649
A3.5. Informes individuales	714

Índice de figuras

Figura 1.1. Resumen de los estudios fenomenológicos realizados de la noción de límite.	19
Figura 1.2. Pilares fundamentales del Marco Teórico.	20
Figura 1.3. Metodología de esta tesis doctoral.	22
Figura 3.1. Sistema de representación tabular de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.160).	78
Figura 3.2. Sistema de representación verbal de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.161).	78
Figura 3.3. Sistema de representación simbólico de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.160).	78
Figura 3.4. Sistema de representación gráfico de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p. 161).	79
Figura 2.5. Relación entre Concepto Definición y Concepto Imagen. Traducida de Vinner (1991)	86
Figura 3.6. Estructuras mentales y mecanismos de la teoría APOS. Traducción de Arnon et al. (2014).	94
Figura 4.1. Fragmentos libro de texto de 1º Bachillerato del fenómeno c-i.i. Bescós y Pena (2001).	107
Figura 4.2. Fragmentos libro de texto de 1º Bachillerato del fenómeno d-i.i. Bescós y Pena (2001).	108
Figura 4.3. Fenómeno ida-vuelta para límite más infinito.	109
Figura 4.4. Fragmento libro de texto de 2º Bachillerato del fenómeno i.v.s.i. (Escoredó et al., 2009).	110
Figura 4.5. Fenómeno ida-vuelta para límite menos infinito.	111
Figura 4.6. Fenomenología para el límite más y menos infinito de sucesiones.	115
Figura 4.7. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación tabular (Vizmanos & Anzola, 2002).	116
Figura 4.8. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 2002).	117
Figura 4.9. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación gráfico (Bescós & Pena, 2001).	117
Figura 4.10. Ejemplo del fenómeno d-i.i., sistema de representación tabular (Vizmanos & Anzola, 2002).	118
Figura 4.11. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 2002).	118
Figura 4.12. Ejemplo del fenómeno d-i.i., sistema de representación gráfico (Bescós & Pena, 2001).	119
Figura 4.13. Ejemplo del fenómeno i.v.s.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 1996).	119
Figura 4.14. Ejemplo del fenómeno i.v.s.i., sistema de representación gráfico (González, Llorente & Ruiz, 1995).	120
Figura 4.15. Fenómeno i.v.s.i., en el formato definición, sistema de representación simbólico (Vizmanos et al., 2011).	120

Figura 4.16. Fragmento libro de texto de matemáticas de 2º BUP (Vizmanos & Anzola, 1994).	123
Figura 4.17. Fragmento libro de texto de matemáticas de 2º de Bachillerato (Cólera & Oliveira, 2009).	123
Figura 4.18. Fragmento Baenas y Martínez de Santiago (2007).	126
Figura 4.19. Fragmento Bartle y Sherbert (2000, p.54).	127
Figura 4.20. Fragmentos Bartle y Sherbert (2000, p.64).	127
Figura 4.21. Fragmento Pozniak (2000, p.58).	127
Figura 4.22. Fragmento web Gorostizaga (Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales).	128
Figura 4.23. Fragmentos Rey Pastor (1969, p.274).	128
Figura 4.24. Fragmento Rey Pastor (1969, p.275).	129
Figura 4.25. Fragmento Rey Pastor (1969, p.277).	129
Figura 4.26. Fragmento Pestana (2007, p.436).	130
Figura 4.27. Fragmento Colera et al. (2009, p.58) de la Editorial Anaya.	130
Figura 4.28. Fragmento definición sucesión oscilantes de Avellanas et al. (1996, p.256).	130
Figura 4.29. Fragmento de ejemplos de Avellanas et al. (1996, p.256).	130
Figura 4.30. Comparación requisitos matemáticos límite finito y límite más y menos infinito de una sucesión.	139
Figura 4.31. Comparación fenómenos límite finito y límite más y menos infinito de una sucesión.	140
Figura 4.32. Fenómenos de límite infinito de sucesiones tomados de forma independiente. Pensamiento Matemático.	142
Figura 4.33. Fenómenos de límite infinito de sucesiones tomados de forma conjunta. Pensamiento Matemático.	142
Figura 4.34. Teoría APOS en el límite infinito de sucesiones.	144
Figura 5.1. Ficha del libro.	156
Figura 5.2. Ejemplo de código identificativo de un fragmento.	158
Figura 5.3. Ejemplo de código identificativo de un fragmento con varios fenómenos.	158
Figura 5.4. Ficha fenomenológica.	158
Figura 5.5. Frecuencia absoluta c-i.i.	171
Figura 5.6. Frecuencia absoluta d-i.i.	173
Figura 5.7. Frecuencia absoluta i.v.s.i.	175
Figura 5.8. Sistemas de representación para el fenómeno c-i.i.	176
Figura 5.9. Sistemas de representación para el fenómeno d-i.i.	177
Figura 5.10. Sistemas de representación para el fenómeno i.v.s.i.	177
Figura 5.11. Formatos para el fenómeno c-i.i.	178
Figura 5.12. Formatos para el fenómeno d-i.i.	178
Figura 5.13. Formatos para el fenómeno i.v.s.i.	179
Figura 5.14. Relación de los códigos fenomenológicos.	179
Figura 5.15. Relación de los sistemas de representación.	180
Figura 5.16. Evolución por década. Frecuencias absolutas c-i.i.	182
Figura 5.17. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i.	183

Figura 5.18. Evolución por década. Frecuencias absolutas d-i.i.	184
Figura 5.19. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i.	185
Figura 5.20. Evolución por década. Frecuencias absolutas i.v.s.i.	187
Figura 5.21. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i.	188
Figura 5.22. Evolución histórica. v-d.	189
Figura 5.23. Evolución histórica. v-e.	190
Figura 5.24. Evolución histórica. g-e.	191
Figura 5.25. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas c-i.i.	192
Figura 5.26. Evolución por periodo legislativo. Número de fenómenos c-i.i. por libro.	193
Figura 5.27. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas d-i.i.	194
Figura 5.28. Evolución por ley educativa. Número de fenómenos d-i.i. por libro.	196
Figura 5.29. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas i.v.s.i.	197
Figura 5.30. Evolución por ley educativa. Número de fenómenos i.v.s.i. por libro.	198
Figura 5.31. Evolución histórica. v-e.	199
Figura 5.32. Evolución histórica. v-e.	200
Figura 5.33. Evolución histórica. g-e.	201
Figura 5.34. Comparación de los fenómenos intuitivos.	203
Figura 5.35. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-d).	205
Figura 5.36. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-e).	205
Figura 5.37. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (g-e).	206
Figura 5.38. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (t-e).	206
Figura 5.39. Comparación de los fenómenos formales.	208
Figura 5.40. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-d).	209
Figura 5.41. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-e).	210
Figura 5.42. Evolución histórica de los fenómenos formales (g-d).	210
Figura 5.43. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-d).	211
Figura 5.44. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-e).	211
Figura 6.1. Datos proporcionados por el alumnado participante.	222
Figura 6.2. Tarea prueba en la primera prueba piloto.	226
Figura 6.3. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) titulado en Ingeniería de Telecomunicaciones.	227
Figura 6.4. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) titulado en Ingeniería Industrial.	227
Figura 6.5. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) licenciado en Matemáticas.	227
Figura 6.6. Reflexión individual previa al debate grupal.	230
Figura 6.7. Debate grupal sobre los fragmentos planteados.	230
Figura 6.8. Comparación perfiles fenomenológicos.	279
Figura 6.9. Comparación categorías fenómeno intuitivos.	280
Figura 6.10. Comparación categorías fenómenos formales.	281
Figura 6.11. Comparación de los fenómenos en los comentarios del alumnado y en los libros de texto.	282

Figura 6.12. Comparación de los fenómenos en los comentarios del alumnado aceptando su uso y en los libros de texto.....	283
Figura 6.13. Comparación porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto para el fenómeno c-i.i.	284
Figura 6.14. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. c-i.i.	285
Figura 6.15. Comparación porcentajes comentarios alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. d-i.i.	285
Figura 6.16. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. d-i.i.	286
Figura 6.17. Comparación porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto para el fenómeno. i.v.s.i.	287
Figura 6.18. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. i.v.s.i.	288
Figura 7.1. Consecución de objetivos en cada capítulo.....	297

Índice de tablas

Tabla 4.1. Clasificación de los tres fenómenos de cada libro de texto.....	116
Tabla 4.2. Definiciones de divergencia.	131
Tabla 4.3. Comparación de los fenómenos caracterizados para límite más y menos infinito de una sucesión y una función.	136
Tabla 4.4. Requisitos matemáticos del límite finito de una sucesión.....	137
Tabla 4.5. Comparación requisitos matemáticos del límite finito de una sucesión y el límite infinito de una sucesión.....	138
Tabla 5.1. Resumen de la muestra de libros de texto por décadas.	155
Tabla 5.2. Resumen de la muestra de libros de texto por periodos legislativos.....	155
Tabla 5.3. Muestra de libros de texto organizada por décadas.....	160
Tabla 5.4. Muestra de libros de texto organizada por periodos legislativos.	161
Tabla 5.5. Recuento del fenómeno c-i.i. con códigos de ubicación.	170
Tabla 5.6. Recuento del fenómeno c-i.i. con subtotales.....	171
Tabla 5.7. Recuento del fenómeno c-i.i. con códigos de ubicación.	172
Tabla 5.8. Recuento del fenómeno d-i.i. con subtotales.....	172
Tabla 5.9. Recuento del fenómeno i.v.s.i. con códigos de ubicación.....	174
Tabla 5.10. Recuento del fenómeno i.v.s.i. con subtotales.	175
Tabla 5.11. Frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. por código de fenómeno y década.	182
Tabla 5.12. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i. Décadas.....	183
Tabla 5.13. Frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. por código de fenómeno y década.	184
Tabla 5.14. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i. Décadas.....	185
Tabla 5.15. Frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i. por código de fenómeno y década.	186
Tabla 5.16. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i. Décadas.	187
Tabla 5.17. Comparación sistema de representación verbal y formato definición.....	189
Tabla 5.18. Comparación sistema de representación verbal y formato ejemplo.....	189
Tabla 5.19. Comparación sistema de representación gráfico y formato ejemplo.....	190
Tabla 5.20. Comparación sistema de representación tabular y formato ejemplo.....	191
Tabla 5.21. Frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.	192
Tabla 5.22. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i. Periodos legislativos.	193
Tabla 5.23. Frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.	194
Tabla 5.24. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i. Periodos educativos.	196
Tabla 5.25. Frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.	197
Tabla 5.26. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i. Periodos legislativos.....	198
Tabla 5.27. Comparación sistema de representación verbal y formato definición.....	199
Tabla 5.28. Comparación sistema de representación verbal y formato ejemplo.....	200
Tabla 5.29. Comparación sistema de representación gráfico y formato ejemplo.....	200
Tabla 5.30. Comparación sistema de representación tabular y formato ejemplo.....	201

Tabla 5.31. Frecuencias absolutas de los fenómenos intuitivos.....	202
Tabla 5.32. N° medio de fenómenos intuitivos en cada libro de texto.	203
Tabla 5.33. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-d).....	204
Tabla 5.34. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-e).....	205
Tabla 5.35. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (g-e).....	206
Tabla 5.36. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (t-e).....	206
Tabla 5.37. Frecuencias absolutas de los fenómenos formales.	207
Tabla 5.38. N° medio de fenómenos formales en cada libro de texto.	208
Tabla 5.39. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-d).....	209
Tabla 5.40. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-e).....	209
Tabla 5.41. Evolución histórica de los fenómenos formales (g-d).....	210
Tabla 5.42. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-d).....	210
Tabla 5.43. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-e).....	211
Tabla 6.1. Fragmentos, fenómenos y sistemas de representación empleados en el cuestionario.....	222
Tabla 6.2. Muestra tomada para los debates grupales.	235
Tabla 6.3. Componente visual.	238
Tabla 6.4. Signos utilizados en la componente visual (Sánchez, 2012, p. 319).....	238
Tabla 6.5. Vectores de la componente numérico-vectorial (Macías et al., 2017).	239
Tabla 6.6. Fase espontánea. Grupo A.....	242
Tabla 6.7. Fase inducida. Grupo A.....	250
Tabla 6.8. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno c-i.i.....	253
Tabla 6.9. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno d-i.i.....	253
Tabla 6.10. Distribución de los comentarios. Grupo A. “Fenómeno” intuitivos.	253
Tabla 6.11. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno i.v.s.i.	253
Tabla 6.12. Componente visual. Grupo A.....	255
Tabla 6.13. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo A.	255
Tabla 6.14. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo A.	255
Tabla 6.15. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo A.....	255
Tabla 6.16. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo A.	255
Tabla 6.17. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo A.	256
Tabla 6.18. Fase espontánea. Estudiante A.03.	257
Tabla 6.19. Fase inducida. Estudiante A.03.	262
Tabla 6.20. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno c-i.i.	264
Tabla 6.21. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno d-i.i.....	264
Tabla 6.22. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. “Fenómeno” intuitivos.	264
Tabla 6.23. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno i.v.s.i.....	265
Tabla 6.24. Componente visual del estudiante A.03.	266
Tabla 6.25. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i.....	266
Tabla 6.26. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i.	267
Tabla 6.27. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo.....	267
Tabla 6.28. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos...	267

Tabla 6.29. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i.	267
Tabla 6.30. Perfiles fenomenológicos posibles de Tipo A.	270
Tabla 6.31. Perfiles fenomenológicos posibles de Tipo B.	270
Tabla 6.32. Perfiles fenomenológicos de cada grupo.	271
Tabla 6.33. Perfiles fenomenológicos de cada estudiante.	272
Tabla 6.34. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno c-i.i. por fragmento y dimensiones.	274
Tabla 6.35. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno d-i.i. por fragmento y dimensiones.	274
Tabla 6.36. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno i.v.s.i. por fragmento y dimensiones.	275
Tabla 6.37. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno c-i.i. por categorías y dimensiones.	276
Tabla 6.38. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno d-i.i. por categorías y dimensiones.	277
Tabla 6.39. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al “fenómeno” intuitivos por categorías y dimensiones.	277
Tabla 6.40. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno i.v.s.i. por categorías y dimensiones.	278
Tabla 6.41. N° comentarios realizados por el alumnado y n° fragmentos en los libros de texto.	282
Tabla 6.42. N° comentarios en el que existe aceptación por alumnado y n° fragmentos en libros de texto.	283
Tabla 6.43. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. c-i.i.	284
Tabla 6.44. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. c- i.i.	284
Tabla 6.45. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. d-i.i.	285
Tabla 6.46. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. d-i.i.	286
Tabla 6.47. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. i.v.s.i.	287
Tabla 6.48. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. i.v.s.i.	288

Resumen

El límite es una noción estudiada por el Análisis Matemático, y las dificultades de su proceso enseñanza-aprendizaje una de las líneas de investigación en el área de la Didáctica de las Matemáticas en las últimas décadas. Partimos de la premisa de que cada uno de los límites debe ser estudiado minuciosamente, por ese motivo, en esta tesis doctoral nos ocuparemos de uno de ellos: el límite infinito de una sucesión.

Este estudio se sostiene sobre cuatro pilares fundamentales: la fenomenología dada por Freudenthal, el Pensamiento Matemático Avanzado, los Sistemas de Representación y la Teoría APOS. A partir de ellos, mediante un estudio teórico, caracterizamos tres fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión: crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i. y decrecimiento intuitivo ilimitado, d-i.i., considerando un enfoque intuitivo, e ida-vuelta en sucesiones de límite infinito, a partir de un enfoque formal.

La fase experimental consta de dos partes: el estudio de libros de texto y el análisis de grupos de discusión del profesorado en activo.

Los libros de texto es un instrumento habitual utilizado en las aulas para la transmisión del conocimiento. En el análisis de éstos se han observado los tres fenómenos caracterizados; considerando, además, los sistemas de representación verbal, tabular, gráfico y simbólico, y los formatos definición y ejemplo. Dados los cambios legislativos en el ámbito educativo en España, hemos tomado una muestra compuesta por 35 libros de texto cuya edición se encuentra entre 1936 y 2016.

Finalmente, hemos abordado otra de las preocupaciones actuales en la educación matemática, el profesorado en formación. Hemos determinado los diferentes perfiles fenomenológicos de los alumnos y alumnas del Máster en Formación del Profesorado (especialidad matemáticas) de diferentes universidades españolas. Estos perfiles han venido determinados a partir de la creación de un protocolo de actuación, aplicado a 27 estudiantes, y un análisis cualitativo de los comentarios realizados durante un grupo de discusión.

Abstract

The limit is a notion studied in Mathematical Analysis and the associated difficulties in the teaching-learning process constitute an important research area in Mathematical Education. In this PhD Thesis, we start from the premise that each of the limits should be studied separately. Therefore, we will focus our attention in one of them: the infinite limit of a sequence.

This study is based on four fundamental pillars: Phenomenology as understood by Freudenthal, Advanced Mathematical Thinking, Systems of Representation and APOS Theory.

The first part of our study is theoretical. Here, taking into account the previous fields, we have characterized three phenomena organized by a definition of the infinite limit of a sequence. The first two correspond to an intuitive approach: “unlimited intuitive growth”, u.i-g. (c-i.i.), and “unlimited intuitive decrement”, u.i-d. (d-i.i.). The third one is “go and back in infinite limit sequences”, g.b.i.s. (i.v.s.i.), and belongs to a formal approach.

The experimental phase is divided in two parts: the study of textbooks and the analysis of the interventions of pre-service teachers in several discussion groups.

Textbooks are widely used at schools as a support in the teaching-learning process. In their analysis we have observed the three aforementioned phenomena, considering systems of verbal, tabular, graphic and symbolic representation, together with definitions and examples. Due to legal changes in the Spanish educational system, we have chosen a sample made up of 35 textbooks which were published between 1936 and 2016.

Finally, we have studied another current concern in mathematical education, which is pre-service teacher training. We have determined different phenomenological profiles of the Master's in Secondary Education students (math specialty) at different Spanish universities. These profiles derive from a performance protocol applied to 27 students, and a qualitative analysis of the comments they made during the discussion groups.

Introducción

Introducción

En esta tesis doctoral se presenta un estudio fenomenológico del límite infinito de una sucesión, en el sentido dado por Freudenthal (1983). Este estudio continúa la línea investigadora iniciada por Claros (2010) y Sánchez (2012), quienes examinaron esta fenomenología para el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto respectivamente. El límite es uno de los pilares fundamentales del Análisis Matemático, por lo tanto, el análisis de dicha noción y las dificultades asociadas a su proceso de enseñanza-aprendizaje en secundaria y bachillerato constituyen líneas de desarrollo en el área de Didáctica de las Matemáticas. En esta memoria nos ocupamos del estudio del límite infinito de una sucesión destacando la importancia que tienen los fenómenos organizados por dicha noción, y señalando la presencia de ellos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El documento se compone de siete capítulos, descritos a continuación:

En el *Capítulo 1* delimitamos el problema de investigación de la presente tesis doctoral. Para ello constituimos los objetivos que pretendemos alcanzar durante los seis capítulos siguientes, describimos las hipótesis establecidas y finalmente detallamos la metodología confeccionada compuesta por una fase teórica y una fase experimental.

El *Capítulo 2* lo dedicamos a realizar una revisión de antecedentes de investigaciones que se han ocupado del límite infinito. Lo hemos dividido en los siguientes apartados: evolución histórica; tipos de infinito, dificultades, obstáculos y errores en torno al límite infinito de una sucesión; investigaciones realizadas para la enseñanza-aprendizaje del límite y la ubicación curricular del límite infinito de una sucesión.

En la evolución histórica se tienen en cuenta dos nociones: el límite y el infinito, desde la antigua Grecia hasta la actualidad, considerando tanto perspectivas filosóficas como matemáticas. Dado que el infinito puede tener varias acepciones, incompatibles entre sí, se revisan algunas de ellas, realizando especial énfasis en las que tienen un carácter matemático. Además, en esta revisión bibliográfica, se considera el ámbito didáctico; en las últimas décadas se han abordado diferentes propuestas didácticas que identifican dificultades y que intentan dar respuesta a obstáculos y errores del límite y del infinito. En el estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje del límite se revisan las

investigaciones que consideran tanto al alumnado como al profesorado y a los libros de texto. Finalmente, se examina el contenido matemático encontrado en las diferentes leyes educativas españolas intentando relacionarlas con la adquisición de la noción de límite infinito de una sucesión.

El marco teórico, *Capítulo 3*, se fundamenta en los cuatro pilares siguientes: la fenomenología (Freudenthal, 1983), los sistemas de representación (Janvier, 1987; Rico, 2009), el Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1991; Vinner, 1991) y la teoría APOS (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005).

Cuando hablamos de fenomenología lo hacemos como componente de su análisis didáctico en el sentido dado por Freudenthal (1983), el cual da el nombre de “fenomenología” a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre “fenómeno” y “noúmeno”. Los objetos construidos en conceptos serán los “noúmenos” y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan serán los “fenómenos”.

Los fenómenos caracterizados pueden presentarse en los diferentes sistemas de representación: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Para Janvier (1987) y Rico (2009), todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, necesitando el establecimiento de relaciones entre distintos sistemas de representación. Estos sistemas de representación enfatizan algunas propiedades del concepto y dificultan otras.

El límite infinito queda enmarcado dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) al requerir para su aprendizaje una capacidad lógica abstracta e intervenir el proceso de abstracción, formalización, representación y definición. Todos estos elementos son aspectos del desarrollo cognitivo, propios de dicho tipo de pensamiento. Siguiendo a Tall (1991), profundizamos en el desarrollo cognitivo presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con el cálculo infinitesimal. Además, Tall señaló varios conceptos que debían situarse por su dificultad dentro del PMA, entre ellos el límite y el infinito.

El último pilar en el que se fundamenta el marco teórico de este trabajo es la teoría APOS. En las últimas décadas, la teoría APOS, intenta establecer los requerimientos para encapsular un proceso sin fin como objeto cognitivo sobre el cual se pueden aplicar

nuevas acciones. Esta teoría, según Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004), puede proporcionar una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran al infinito.

En el *Capítulo 4*, se encuentra la descripción y caracterización de los fenómenos organizados por una definición del límite infinito. Esta definición fue seleccionada a partir de la realización de dos consultas a docentes de Educación Secundaria y Universidad, estos últimos del área de Didáctica de las Matemáticas.

Para la caracterización de los fenómenos organizados por esta definición se observan dos puntos de vista: el ámbito intuitivo y el ámbito formal. Desde el punto de vista intuitivo, se definen los fenómenos *crecimiento intuitivo ilimitado*, c-i.i., y el *decrecimiento intuitivo ilimitado*, d-i.i. Desde el punto de vista formal, se define el fenómeno denominado *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito o retroalimentación*, i.v.s.i.

Posteriormente se consideran las nociones matemáticas involucradas en este límite, como son: la dependencia, la acotación, los procesos infinitos, los tipos de infinito o la divergencia, entre otros.

Finalmente se realiza una comparación, tanto matemática como fenomenológica, del límite finito e infinito de una sucesión.

Dado que queremos comprobar que estos fenómenos se encuentran en el ámbito educativo, se realiza un análisis de libros de texto, *Capítulo 5*. Para llevar a cabo dicho análisis además de los tres fenómenos descritos, se consideran los siguientes sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico, y formatos: definición y ejemplo.

Con el fin de estructurar el análisis de cada uno de los libros de texto y organizar la información obtenida, se realiza una plantilla que integra lo siguiente: ficha técnica, secuenciación didáctica, análisis de los fenómenos, ficha fenomenológica, resumen estructural y comentarios.

Una vez establecida la plantilla, se realiza el análisis de 35 libros de texto, comprendidos entre 1936 y 2016. Esta muestra es intencional, ya que previamente se seleccionaron

aquellos donde apareciese el límite infinito de una sucesión y además se tomaron solamente los libros a los que se ha tenido acceso.

Posteriormente se desarrolla, de forma global, la incidencia de cada uno de los fenómenos, así como el estudio temporal, por décadas y por leyes educativas, de cada uno de ellos. Finalmente se realiza la comparación de estos resultados con los del límite finito de una sucesión (Claros, 2010) y el límite finito de una función en un punto (Sánchez, 2012).

En el *Capítulo 6* se establece como objetivo principal identificar el perfil fenomenológico del profesorado en formación. Para poder determinarlo se forman grupos de discusión de 3-4 personas. En este capítulo se encuentra la descripción del material utilizado por el alumnado del Máster de Formación del Profesorado de la Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Málaga, la descripción del protocolo de actuación, las fases de las que consta este protocolo y la categorización utilizada durante el análisis.

En el análisis abordado se efectúa un informe para cada uno de los grupos de debate y los estudiantes que lo forman, determinando finalmente su perfil fenomenológico. Posteriormente, se realiza la comparación de estos perfiles con los del profesorado en activo (Sánchez, 2012) y con los resultados del análisis realizado para los libros de texto del capítulo anterior.

Para finalizar, en el *Capítulo 7*, se desarrollan las conclusiones de este trabajo. Para ello se efectúa la redacción del logro o no de cada uno de los objetivos y la refutación o no de las hipótesis enunciadas. Además, se presentan los momentos de divulgación de algunos de los resultados intermedios durante el transcurso de la tesis doctoral.

A continuación presentamos algunas decisiones que se han tomado a la hora de abordar y estructurar cada capítulo.

En cuanto a la estructura de cada uno de los ellos, antes del primer apartado se encuentra una introducción al mismo. Ésta se sitúa inmediatamente después del título, no tiene subapartado propio y, por tanto, no está numerada. Cada capítulo contiene diferentes apartados y subapartados organizados en distintos niveles. El primer nivel corresponde al

título del capítulo y el segundo a los apartados principales. El tercer y cuarto nivel aparecen en algunos capítulos para facilitar la organización de algunos subapartados. En ningún caso se sobrepasa este cuarto nivel, ya que se pretende facilitar el hilo conductor de una forma lineal.

Después de estos capítulos, siguiendo la estandarización de los documentos científicos, se encuentra la bibliografía.

Finalmente, situamos los anexos del *Capítulo 4*, *Capítulo 5* y *Capítulo 6*. La decisión de elegir este lugar está fundamentada en el hecho de facilitar la lectura del documento. Los anexos de cada uno de los capítulos los situamos en diferentes subapartados para identificar de manera sencilla a que fase de la investigación corresponde.

Además de lo anteriormente expuesto, se han establecido tres índices: de contenido, de figuras y de tablas. En la lectura digital de este documento es posible seguir los hipervínculos que estos índices proporcionan. Asimismo, cada vez que se menciona un apartado es posible llegar a él desde su referencia correspondiente.

Capítulo 1. Delimitación del problema de investigación

1. Delimitación del problema de investigación

La meta principal de esta investigación es describir y caracterizar fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión, expresarlos en diferentes sistemas de representación y formatos, y buscar evidencias de su existencia en los procesos de enseñanza-aprendizaje tanto en libros de texto de diferentes etapas educativas como en el alumnado del Máster de Formación del Profesorado.

Este estudio surge tras los estudios realizados por Claros (2010) y Sánchez (2012) en los que se dio comienzo al análisis fenomenológico del límite: límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto, respectivamente. Ellos, a partir de su experiencia docente, se preguntaron a qué se debían las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la noción de cada uno de los límites y abrieron la posibilidad a futuros estudios fenomenológicos de otros límites.

Estas dificultades a las que dar respuesta, la existencia de fenómenos distintos organizados a partir de la definición de cada uno de estos límites, así como la consideración de otros autores, como Morales et al. (2013), de considerar cada límite de forma particular, generaron la necesidad del estudio fenomenológico del límite infinito de una sucesión, objeto de esta investigación.

La necesidad de realizar este estudio ha sido justificada durante el *Capítulo 1*, donde se ha podido comprobar la preocupación de diferentes investigadores e investigadoras sobre la noción de límite. Además, la línea de investigación que se ha seguido está soportada por cuatro pilares fundamentales: la fenomenología, los sistemas de representación, el Pensamiento Matemático Avanzado, y la Teoría APOS, que se desarrollan en el *Capítulo 2*. Con estos cuatro pilares creemos que ha sido posible abarcar la complejidad del límite infinito de una sucesión.

1.1. Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos que pretenden alcanzarse con esta investigación.

- **Objetivo 1:** Revisar el campo de conocimiento actual de la noción de límite infinito de una sucesión, atendiendo a su evolución histórica, dificultades, obstáculos y errores en la utilización de la noción.

Desde la antigua Grecia hasta la actualidad la noción de límite infinito de una sucesión ha sido discutida tanto por la filosofía como por las matemáticas. Durante casi todo este largo periodo, las investigaciones llevadas a cabo se han centrado en las posibles dificultades matemáticas, y no ha sido hasta los últimos 30 años cuando se han empezado a considerar sus dificultades, obstáculos y errores didácticos.

- **Objetivo 2:** Seleccionar al menos una definición de límite infinito de una sucesión cuya calidad de contenido y redacción sea bien aceptada por la comunidad matemática experimentada, y cuya actividad profesional se encuentre estrechamente relacionada con la docencia y/o la investigación matemática.

Debido al estudio exhaustivo que se realizará de la noción de límite infinito de una sucesión, se considera indispensable la selección de una definición correcta y aceptada por la comunidad de didáctica de las matemáticas. Para ello se realizará un cuestionario que recoja diferentes definiciones, y con la seleccionada por el profesorado de la muestra se lleve a cabo un análisis minucioso que permita expandir sus resultados al resto de definiciones existentes.

- **Objetivo 3:** Enunciar los elementos matemáticos involucrados en la definición del concepto de límite infinito de una sucesión y establecer distinciones con los encontrados en el límite finito de una sucesión.

Como ya recogiese Claros (2010) en su tesis doctoral, el límite de sucesiones se sitúa inmediatamente anterior al límite de funciones en una buena parte de casos en los libros de texto. Algunos ejemplos donde puede encontrarse esta presentación son: Martín, Petriz y Miguel (1987), Vizmanos y Anzola (2003), Escoredo et al. (2009), entre otros. En el caso particular del límite infinito de una sucesión, previamente, han tenido que haber sido consideradas otras nociones como: dependencia, suficientemente grande, procesos infinitos, acotación, tipos de infinito, divergencia y punto de acumulación, para poder ser

capaces de manejar esta noción. Pretendemos establecer las relaciones entre estos elementos y la propia noción de límite infinito de una sucesión, y comparar su presencia o no en el límite finito de una sucesión.

- **Objetivo 4:** Caracterizar y definir los fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión.

Tomando como guía la fenomenología dada por Freudenthal (1983), así como las investigaciones llevadas a cabo por Claros (2010) y Sánchez (2012) en el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto respectivamente, se pretende reconocer las dificultades asociadas a la noción de límite infinito de una sucesión. Este objetivo consideramos que es la clave de esta investigación porque la definición y caracterización de estos fenómenos puede ayudar a resolver algunas de las dificultades relacionadas con el límite infinito de una sucesión en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- **Objetivo 5:** Describir y analizar las dificultades que pueden encontrarse en el profesorado y en algunos autores de libros de texto y manuales universitarios a partir de la definición de divergencia, presente implícitamente en el límite infinito de sucesiones.

La gran variedad de definiciones de una sucesión divergente, no equivalentes entre sí, que podemos encontrar tanto en los libros de texto como en las respuestas del profesorado a esta cuestión, pueden provocar en el alumnado y en el profesorado confusión sobre el término divergencia. Pretendemos aclarar estas dificultades, así como dar una nueva definición de divergencia que pueda ser útil tanto a docentes como estudiantes y que ayude a minimizar las dificultades que ya de por sí tienen el concepto de límite infinito de una sucesión.

- **Objetivo 6:** Detectar los tres fenómenos encontrados en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato, analizando tanto la presencia o no del límite infinito de una sucesión como la fenomenología que tiene lugar durante la presentación de dicha noción.

Se considerará una muestra de libros de texto de diferentes editoriales y periodos educativos. Posteriormente, se construirán tablas de frecuencias de los fenómenos identificados, compararemos las frecuencias de cada uno de los fenómenos y estableceremos la posible relación entre ellos. Dado que se van a considerar libros de

texto de diferentes décadas y leyes educativas, se pretende establecer la evolución de los fenómenos a lo largo del tiempo, así como estudiar la correlación entre estas etapas educativas.

Este objetivo esperamos que confirme la existencia de los fenómenos caracterizados y organizados por el límite infinito de una sucesión cuando los autores de libros de texto tienen que presentar el límite infinito de una sucesión.

- **Objetivo 7:** Comparar los resultados del análisis de libros de texto con los obtenidos para otro tipo de límites.

A partir de los resultados obtenidos como consecuencia de llevar a cabo el objetivo 6, se realizará un estudio comparativo entre dichos resultados y los obtenidos por Claros (2010) en el que se analizaron los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión. También se incluirán en dicho estudio comparativo los resultados obtenidos por Sánchez (2012) cuando analizó los fenómenos organizados por el límite finito de una función en un punto, en libros de texto de Secundaria y Bachillerato. Se compararán las frecuencias, tanto absolutas como relativas, el sistema de representación en los que ha sido presentado cada fenómeno, la correspondencia de las ausencias existentes de alguno de ellos, entre otros aspectos. Esta comparación tomará como referencia el estudio minucioso realizado por Claros (2010), para el límite finito de una sucesión, y por Sánchez (2012), para el límite finito de una función en un punto y extenderá dicho estudio al límite infinito de una sucesión. En él se pretende la identificación de los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), la secuenciación seguida en cada una de las unidades donde se encuentra este límite y la realización de unos comentarios donde se realizarán las apreciaciones acerca de los puntos más destacados: peso del límite infinito de una sucesión en la unidad, ubicación de éste en referencia a otros límites y orden de ejemplos y definiciones, entre otros. Recordamos que estos autores analizaron los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato atendiendo a la detección de fenómenos caracterizados para la definición de cada una de las nociones involucradas en sus estudios. Para ello construyeron tablas de frecuencias de los diferentes fenómenos, compararon las frecuencias de los fenómenos observados y establecieron las relaciones entre ellos, calcularon la correlación entre las frecuencias de ambos teniendo en cuenta la representación utilizada y analizaron las diferentes apariciones y correlación en función del periodo educativo.

- **Objetivo 8:** Identificar los perfiles fenomenológicos del profesorado en formación a partir de un grupo de discusión entre 3-4 personas ante fragmentos relacionados con el límite infinito de una sucesión.

Al alumnado del Máster de Formación del Profesorado se les proporcionarán 11 fragmentos en los que aparecerán definiciones y ejemplos del límite infinito de una sucesión en diferentes sistemas de representación, y que podrían formar parte de una futura secuenciación didáctica. Estas personas debían debatir, en grupos de 3-4, si utilizarían o no cada uno de los fragmentos presentados cuando tuviesen que realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje en su futura labor docente, además de indicar el porqué de esta decisión. Para facilitar su análisis se utilizó un dispositivo de grabación que identificase sus decisiones, así como la obtención de todas las opiniones surgidas.

1.2. Hipótesis

A continuación, se describen las hipótesis establecidas para esta investigación. Para su elaboración se han considerado las investigaciones de las que parte este estudio, Claros (2010) y Sánchez (2012), y en las que ya se caracterizaron fenómenos organizados por las definiciones del límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto respectivamente, un estudio de libros de texto de diferentes etapas educativas en los que observaron dichos fenómenos y un estudio experimental realizado con estudiantes y docentes respectivamente.

Además, ha sido posible establecerlas a partir de la revisión bibliográfica realizada, tanto en el *Capítulo 1* como en el *Capítulo 2*, la reflexión para la elaboración del estudio teórico, el tratamiento realizado con los libros de texto de Secundaria y Bachillerato y la experiencia docente del equipo investigador para realizar el estudio experimental con estudiantes del Máster de Formación del Profesorado.

Hipótesis 1: Existen diferencias significativas importantes entre la noción de límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión.

Para esta comparación se tendrán en cuenta tanto los aspectos matemáticos como fenomenológicos. En los primeros, algunas de las nociones consideradas serán la dependencia, la acotación, los procesos infinitos, los tipos de infinito o la divergencia, entre otros, mientras que para los segundos se considerarán los enfoques formales e intuitivos, así como los fenómenos organizados para cada definición.

Hipótesis 2: No existe una única definición de límite infinito de una sucesión que sea aceptada y utilizada por el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato.

Hipótesis 3: El término divergencia dificulta la clasificación de los distintos límites de sucesiones.

Hipótesis 4: La definición aceptada y utilizada por el profesorado de límite infinito de una sucesión organiza tres fenómenos: los que tienen un enfoque intuitivo, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), y el que tiene un enfoque formal, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), o también denominado retroalimentación.

Hipótesis 5: Otras definiciones del límite infinito de sucesiones organizan estos mismos tres fenómenos: crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

Hipótesis 6: Los fenómenos organizados por la definición del límite infinito de una sucesión pueden ser observados en libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Hipótesis 7: Los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión pueden presentarse en diferentes sistemas de representación y en diferentes formatos.

Hipótesis 8: Las leyes educativas influyen en el tipo de fenómenos que los autores y las autoras de libros de texto usan para presentar el límite infinito de una sucesión, así como en los sistemas de representación y formatos.

Hipótesis 9: Los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), relativos a un enfoque intuitivo, aparecen con mayor frecuencia que el fenómeno ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), relativo a un enfoque formal.

Hipótesis 10: El sistema de representación verbal es el que aparece con mayor frecuencia en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Hipótesis 11: Es posible detectar los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.) en los grupos de debate de alumnado del Máster de Formación del Profesorado cuando éstos tienen que decidir qué elementos usar para presentar el límite infinito de una sucesión.

Hipótesis 12: La aceptación de las diferentes presentaciones del límite infinito de una sucesión por parte del alumnado del Máster de Formación del Profesorado tiene mayor frecuencia cuando se detectan los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), que cuando se detecta el fenómeno ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

1.3. Metodología

En la presente investigación se lleva a cabo un estudio fenomenológico del límite infinito de sucesiones. Los fenómenos encontrados pretenden ayudar a resolver las dificultades que se presentan en el alumnado cuando tienen que abordar cuestiones relacionadas con esta noción.

Estas dificultades son señaladas por el alumnado y el profesorado y son debidas principalmente a la complejidad de conceptos que implica el límite infinito de sucesiones.

Para el desarrollo de la presente tesis se han considerado estudios fenomenológicos del límite, anteriormente ya mencionados en este capítulo; una fase teórica, donde se caracterizaron los fenómenos; y otra experimental, que consta de dos apartados: observación de dichos fenómenos en libros de texto y detección de los mismos por estudiantes del Máster de Formación del Profesorado. Este desarrollo se encuentra en el siguiente esquema metodológico, ver Figura 1.1.

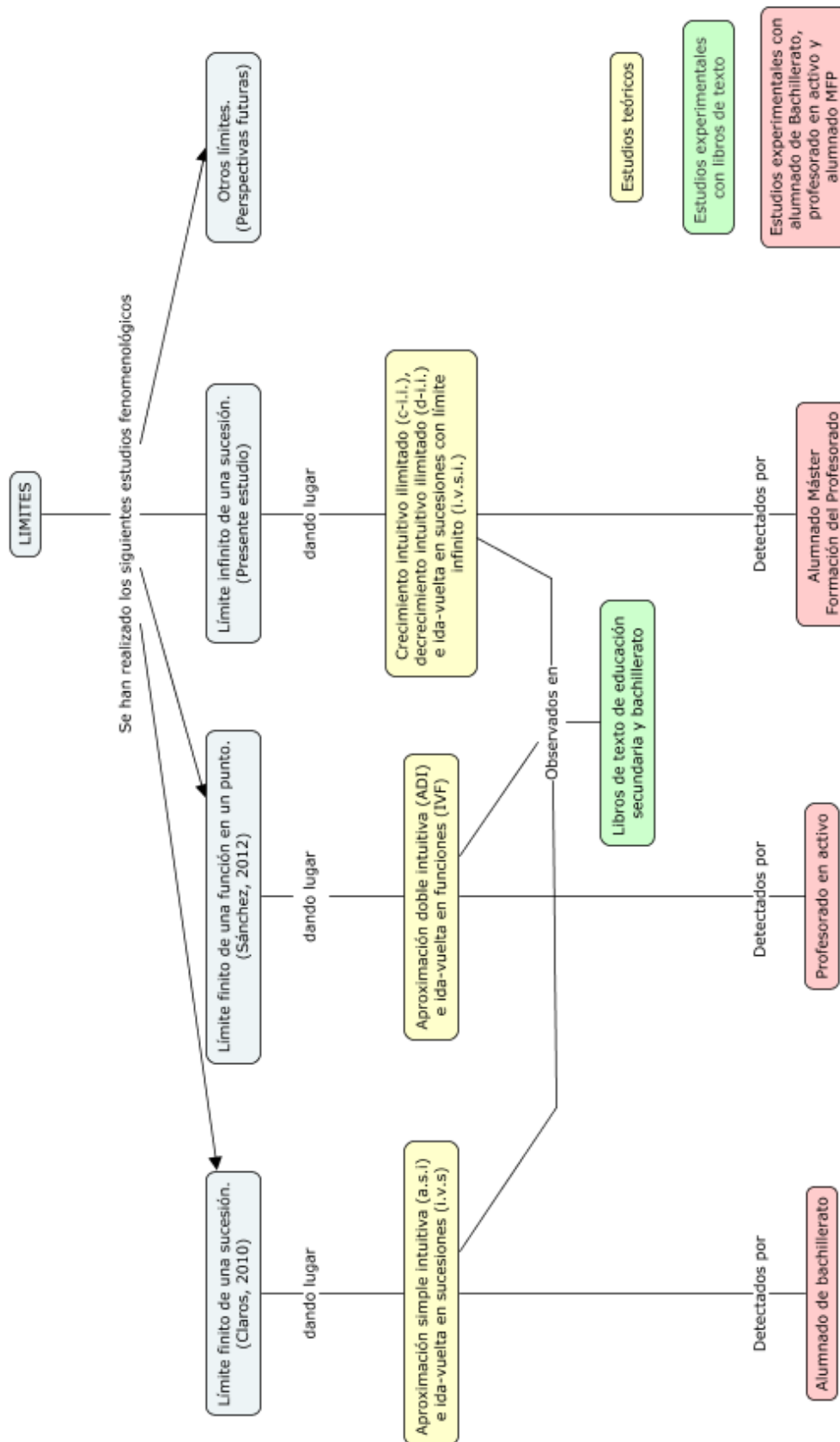


Figura 1.1. Resumen de los estudios fenomenológicos realizados de la noción de límite.

Para la resolución del problema que nos ocupa se toman como punto de partida la fenomenología dada por Freudenthal, los sistemas de representación, el Pensamiento Matemático Avanzado y la Teoría APOS. Utilizamos la fenomenología dada por Freudenthal (1983) desarrollando un análisis fenomenológico que construya objetos mentales frente a la adquisición de las nociones, en particular, de límite, divergencia e infinito. Los fenómenos caracterizados pueden presentarse en los diferentes sistemas de representación: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Para Janvier (1987) y Rico (2009), todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, necesitando el establecimiento de relaciones entre distintos sistemas de representación. Por otra parte, el límite infinito queda enmarcado dentro del PMA al requerir para su aprendizaje una capacidad lógica abstracta e intervenir el proceso de abstracción, formalización, representación y definición, elementos todos propios de un pensamiento matemático superior al que Tall denominó avanzado. Para realizar la construcción de estos objetos mentales, utilizaremos la Teoría APOS (Arnon et al., 2014), en la que están involucradas las siguientes estructuras: acción, procesos, objetos y los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, inversión, encapsulación y tematización. Para todo ello tomamos como referencia a Dubinsky, quien en 1982 pasó de la investigación en matemáticas (análisis funcional) a las actividades mentales implicadas en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes.

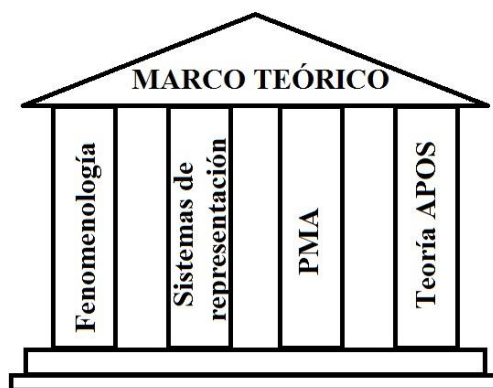


Figura 1.2. Pilares fundamentales del Marco Teórico.

Dado que nuestro estudio trata el límite infinito de sucesiones, necesitamos conocer la definición matemática de límite infinito de sucesiones “más aceptada” por los matemáticos. Este proceso llevó a la selección de diferentes definiciones de límite infinito de sucesiones de libros de texto de Bachillerato y universidad, mediante un formulario a expertos (docentes de Secundaria, Bachillerato y Universidad). Esto pretendía obtener la

definición más la aceptada por la comunidad matemática. Posteriormente se estudiaron los fenómenos organizados por dicha definición y se abordaron los diferentes elementos presentes en la misma: divergencia, monotonía, etc. para establecer su relación e importancia en el concepto de límite.

Una vez caracterizados y definidos los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión, se compararán estos con los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión (Claros, 2010). Al igual que ya se hizo en las investigaciones de Claros (2010) y Sánchez (2012) se investigó en los libros de texto de Educación Secundaria y principalmente Bachillerato, como los autores habían desarrollado la definición de límite infinito de una sucesión, haciendo especial hincapié en el uso o no de los fenómenos que habíamos observado y categorizado previamente en dicha definición.

Dada la importancia de la formación del profesorado, se ha pretendido analizar la identificación de los fenómenos caracterizados y organizados por el límite infinito de una sucesión por parte de estudiantes del Máster universitario en Formación del profesorado de Ed. Secundaria, Bachillerato, FP e Idiomas (especialidad Matemáticas). Para ello se ha elaborado un instrumento que facilite la toma de los datos a analizar y cuyos detalles del mismo se presentarán en el *Capítulo 6*.

La muestra la compusieron estudiantes del Máster Formación del Profesorado de las siguientes universidades: Universidad de Zaragoza, Universidad Rey Juan Carlos, Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Málaga. A los alumnos y las alumnas de la Universidad de Zaragoza y la Universidad Rey Juan Carlos se les administró una prueba piloto que detectara posibles errores. Una vez detectados y resueltos los errores observados en la prueba piloto se administró el cuestionario definitivo a los alumnos y las alumnas de la Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Málaga.

En el siguiente esquema se encuentra la metodología seguida en la presente tesis doctoral (véase Figura 1.3).

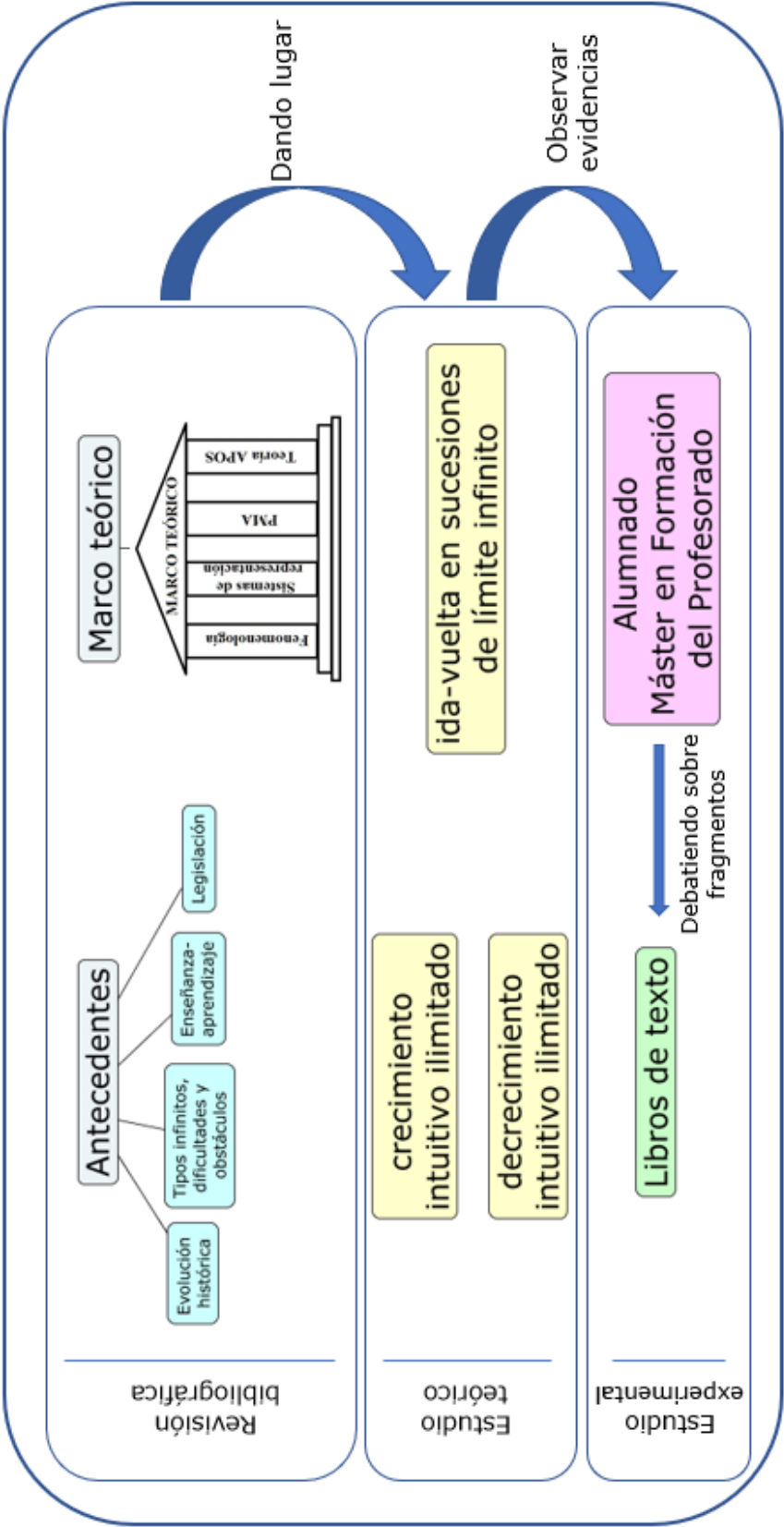


Figura 1.3. Metodología de esta tesis doctoral.

Capítulo 2. Antecedentes

2. Antecedentes

En este capítulo se realiza una revisión de las investigaciones que han sido llevadas a cabo sobre los términos y nociones involucradas en el límite infinito de una sucesión.

En el primer apartado se encuentra una recopilación de autores que han centrado sus investigaciones en el desarrollo histórico del límite. Se presenta como ha evolucionado esta noción desde la antigua Grecia hasta la actualidad, a través de autores como Aristóteles, Newton, Leibniz, Euler, D'Alembert, Cauchy o Gauss. Abordamos también la evolución del infinito desde el ámbito de la filosofía y las matemáticas.

El segundo apartado se ha dedicado a la revisión de investigaciones relativas a la enseñanza y aprendizaje del límite, en las que incluiremos los diferentes tipos de infinito (elemento imprescindible en el desarrollo de dicha noción), las dificultades, obstáculos y errores ya estudiados por diferentes autores sobre el límite finito e infinito, y los procesos infinitos. En el primer subapartado, se recogerán las diferentes acepciones de la noción de infinito, incidiendo en las que tienen un carácter matemático: infinito potencial e infinito actual. Además, en el segundo y tercer subapartado se presentarán las definiciones de error y obstáculo, así como las preocupaciones de los docentes sobre ellos. Como reflejan algunos autores, existe una preocupación por los docentes sobre los errores, que aparecen en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos, a veces de forma persistente y masiva, y que influyen en el aprendizaje de las personas. Su análisis servirá de ayuda en la práctica docente, dotando de nuevas estrategias para un mejor aprendizaje.

Además de las dificultades en torno a las nociones de límite e infinito, también será necesario la revisión de los obstáculos de los procesos infinitos, ya que en el límite infinito de una sucesión es necesario diferenciar dos procesos, uno para la variable independiente, n , y otro para la variable dependiente $s(n) = a_n$.

En el tercer apartado se estudian diferentes investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje del límite, tomando tres puntos de vista diferentes: las trabajadas con el alumnado, las trabajadas con el profesorado y las que utilizan los libros de texto y manuales universitarios. En el caso del alumnado se consideran estudios de diferentes niveles educativos: bachillerato y nivel universitario, en los que se recoge la información a partir de cuestionarios y en los que se utiliza dicha información para la elaboración de diferentes secuencias didácticas que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las

investigaciones desde el punto de vista del profesorado acerca del límite y del infinito son mucho menos numerosas que las que tienen al alumnado como protagonista. Sin embargo, el contenido trabajado en ellas es muy parecido. El estudio de libros de texto se lleva a cabo por ser un recurso habitual en las aulas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y constituir una ayuda para el docente y su labor en el aula.

En el último apartado, se realiza una revisión bibliográfica de autores que han analizado las nociones de infinito y de límite en las diferentes leyes educativas españolas y se ubica curricularmente el límite infinito de una sucesión en dichas leyes: Ley General de Educación, LGE; Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo, LOGSE; Orgánica de Educación, LOE y Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, LOMCE. Éstas ya habían sido tomadas como referente en diferentes estudios de Didáctica de las Matemáticas relativos al límite (Sierra, González & López, 1999, 2003).

2.1. Evolución histórica

En este apartado se presenta una revisión bibliográfica de la evolución histórica del límite y del infinito.

En el primer subapartado se aborda la recopilación de autores que se han ocupado del estudio del límite, así como su evolución histórica, desde la antigua Grecia hasta la actualidad. Desde esta misma época se presenta la evolución del infinito, noción discutida tanto desde el ámbito de la filosofía como de las matemáticas.

2.1.1. Evolución histórica de la noción de límite

En la antigua Grecia la noción de límite era utilizada para validar los resultados a partir de la comparación de aproximaciones muy finas de figuras geométricas. Esta idea se mantuvo hasta el siglo XVII, cuando Newton amplió la concepción mantenida por los griegos dando una nueva interpretación a la aproximación de límite, asignando cantidades variables a cuerpos físicos en movimiento (Camacho & Aguirre, 2001).

En esta etapa, iniciada en la segunda mitad del siglo XVII hasta el XVIII, el ámbito matemático se esfuerza en el tratamiento de procesos infinitos. Destacan las investigaciones de Newton, quien evita considerar el estudio de noción de límite en términos generales y solo recurre a él como un instrumento para estimar la noción de derivada. Por otra parte, Reynaud aprecia el uso intuitivo del límite infinito al llegar a la solución mediante una sustitución de valores extremos intentando hallar un área. También destacan las investigaciones de Leibniz sobre el cálculo diferencial y series infinitas, y las de D'Alembert, quien interpreta estas series como límites. Durante esta etapa el cálculo aparece separado de la geometría (Blázquez, Ortega, Gatica & Benegas, 2006).

Blázquez et al. (2006), siguiendo las investigaciones de Cornu (1983) y Robinet (1983) consideran tres etapas en el desarrollo de la noción de límite: hasta los métodos infinitesimales, periodo que abarca desde la Antigua Grecia hasta el siglo XVII y donde todavía no es posible considerar los límites de funciones, aunque sí algunos métodos de resolución; la supremacía del cálculo, desde la segunda mitad del siglo XVII hasta el siglo XVIII donde las investigaciones se centran en el tratamiento de los procesos infinitos, y un tercer periodo que denominan la aritmetización del análisis, donde surgen nuevos problemas desde las matemáticas y la física a partir de conceptos aritméticos.

Según Boyer (1999, p.567), D'Alembert creía que la “verdadera metafísica” del cálculo debería encontrarse basándose en la idea de límite. Oponiéndose a Euler y Leibniz, insistía en que “una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente”.

En su artículo sobre “Límite” que escribió para la *Encyclopédie* realiza la siguiente definición:

Definición 1: “Llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)” (Boyer, 1999, p. 567).

Boyer (1999) continúa estableciendo la comparación entre autores: Euler había considerado las cantidades infinitamente grandes como la inversa de magnitudes infinitamente pequeñas, mientras que D'Alembert definía lo infinitamente grande en términos de límites. La formulación de la noción de límite de D'Alembert carecía de precisión lingüística y de exactitud para poder ser operativo, por ese motivo, no fue aceptable por sus contemporáneos y esta definición sería suprimida posteriormente por los matemáticos del siglo XIX.

Cauchy (1821) rechazó el planteamiento de Lagrange basado en el desarrollo en serie de potencias del teorema de Taylor, tomando en cambio como fundamental la noción de límite de D'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético que lo hacía más preciso. Prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, y formula la siguiente definición de límite:

Definición 2: “Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir en él tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás” (Boyer, 1999, p. 647).

La concepción de Cauchy, expresada de forma verbal, formula una definición de continuidad mediante sucesiones, que será muy útil para la demostración de teoremas.

Según Boyer, la definición de Cauchy hacía uso de expresiones como “valores sucesivos” o “tan pequeño como uno quiera”, expresiones satisfactorias desde el punto de vista pedagógico, pero sin la precisión matemática esperada.

Weierstrass contribuyó con una depuración de la definición de Cauchy.

Definición 3: “Si dado cualquier ε , existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε , entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$ ” (Boyer, 1999, p. 696).

Sería Heine, en sus *Elemente* de 1872 quien escribiese esta definición bajo la influencia de Weierstrass.

Ya en el siglo XX comienza a generalizarse el límite a otros espacios matemáticos, permitiendo su concepción topológica. Esta definición es la utilizada en la actualidad, aunque con pequeñas modificaciones en la notación (Blázquez et al., 2006).

Estos mismos autores destacan que todas las conceptualizaciones que han surgido del límite a lo largo de la historia lo hacen desde la matemática, pero no desde la didáctica. Tienen como objetivo el rigor matemático y su formalismo sintáctico, aunque en ningún momento se han tenido en cuenta los aprendizajes.

Solamente a partir de este siglo pueden encontrarse este tipo de estudios, ausentes durante la evolución de la noción de límite. Entre ellos, se encuentran los de Tall y Vinner (1981) que formularon una distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos por los que son concebidos; Cornu (1983), el cual elaboró varios modelos del límite, afirmando que la noción adquirida por el alumnado no tiene por qué ser idéntica a como se ha construido dicha noción a lo largo de la historia; Robinet (1983), estudió los obstáculos del límite con el objetivo de elaborar secuencias didácticas que mejoren la enseñanza del mismo en la educación secundaria; Sierpinski (1985, 1987) detectó obstáculos epistemológicos de la noción de límite y propuso situaciones didácticas que ayudarán a superarlos, esto será desarrollado con mayor profundidad en el punto 2.2.2.; Sánchez (1997), analizó manuales de los siglos XIX y XX donde apareciese la noción de límite, y Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2013), quienes realizaron un estudio exploratorio realizado con estudiantes de bachillerato para analizar los distintos términos utilizados para describir la noción de límite finito de una función en un punto. Con todas ellas se trata de esclarecer cual es la conceptualización más sencilla del límite y cuál puede ser más adecuada para su uso en los currículos de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y el primer curso de carreras de ingeniería y similares.

Esta ausencia histórica justifica la realización del presente estudio, en el que se caracterizarán algunos de los fenómenos organizados a partir de una definición de límite infinito de sucesiones.

2.1.2. Evolución histórica del infinito

Tras la revisión bibliográfica de la evolución histórica del límite, se aborda la segunda noción involucrada en el límite infinito. Para ello, se tomarán en cuenta desde las primeras ideas surgidas en la antigua Grecia hasta el siglo XXI.

En la antigua Grecia, Aristóteles veía el infinito como una fuente de contradicción (Salat, 2011).

Según Costa y Otto (2005), en la Grecia clásica se utilizaba la expresión “apeirón” que significa sin fin, sin límite, lo infinito, lo ilimitado o lo carente de definición, sin medida. Algunos autores veían al infinito como una idea de eliminación en las que la “ a ” desaparece.

$$a \pm \infty = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty, \quad a^\infty = \infty, \dots$$

Desde la perspectiva filosófica se induce a contradicciones. Sirvan como ejemplo las afirmaciones de Euclides, el todo no es mayor que las partes, o la paradoja de Zenón, ¿cómo recorrer una infinidad de mitades en un tiempo finito?

Salat (2011) recoge las afirmaciones históricas de los documentos de Aristóteles y Metafísica. En el primero se admite la existencia y la distinción entre infinito potencial e infinito actual, mientras que en el segundo se afirma que el infinito actual no puede existir.

Las civilizaciones egipcia y azteca, con sistemas de numeración no posicionales, nunca se plantearon cantidades superiores a ciertos valores, ya que ni siquiera disponían de símbolos que les permitiesen representar dichas cantidades. Sin embargo, el infinito subyacía de manera implícita en los sistemas posicionales y la forma en que se representan las cantidades resulta clave para producir una noción intuitiva del infinito. El sistema de numeración decimal indo arábigo, por ejemplo, permitió utilizar en la Antigua India números del orden de 10^{421} , según una antiquísima leyenda hindú (aunque no dispusieron de esta noción de infinitud) (Guedj, 1996, citado en Fedriani y Tenorio, 2010).

La visión de Aristóteles persiste con Galileo en el siglo XVI, aunque este último reconoce por primera vez que, en los conjuntos infinitos, a diferencia de los finitos, un subconjunto

propio puede tener la misma cantidad de elementos que el conjunto. Y establece el hecho por medio de la noción de biyección. Esta idea es clave para el desarrollo de la Aritmética de los Números Transfinitos de Cantor (Salat, 2011).

Este mismo autor recoge en sus estudios el diálogo de Simplicio y Salviati que describió Galileo. Simplicio señala que un segmento mayor que otro tiene una cantidad de puntos infinitamente mayor que la cantidad infinita de puntos del otro segmento. Salviati le responde que existe una confusión al aplicar a cantidades infinitas nociones utilizadas en cantidades finitas. Salviati le propone a Simplicio los números naturales cuadrados perfectos, para posteriormente hacerle ver que hay la misma cantidad de números cuadrados y el conjunto de todos los números naturales. Galileo comienza a emplear la biyección entre un conjunto y un subconjunto propio, para poder comprobar si un conjunto es infinito o no, pero interpreta la biyección como una contradicción (Salat, 2011).

En el siglo XVII se introdujo la concepción moderna de infinito, donde se considera que el mundo finito e infinito están determinados por leyes y preceptos diferentes. Durante este mismo siglo Wallis introdujo el símbolo de infinito, ∞ (Costa & Otto, 2005).

Según Boyer (1999), Galileo y Bolzano pusieron su atención en los infinitos elementos de una colección concreta, por ejemplo, los números naturales o los puntos de un segmento. Cauchy y Weierstrass pensaban que solo podían resultar paradojas de los intentos de identificar un infinito actual en las matemáticas, creyendo que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño no representaban más que las correspondientes potencialidades de Aristóteles. Sin embargo, pese a ser discípulo de Weierstrass, Dedekind vio que las paradojas de Bolzano eran una propiedad universal de los conjuntos infinitos, definiendo lo siguiente:

“Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es un sistema finito” (Boyer, 1999, p.700).

Cantor, en el siglo XIX, reconoció lo mismo que Dedekind, la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos, pero además señaló que no todos los infinitos son del mismo tamaño. Construyó una jerarquía de conjuntos infinitos, atendiendo a la “potencia” del conjunto, por ejemplo, el conjunto de los cuadrados perfectos y el conjunto de todos los números triangulares tienen la misma potencia que el conjunto de los números naturales, ya que tienen correspondencia biunívoca con este conjunto. Estos resultados de Cantor

llevaron a desarrollar una teoría de conjuntos como una rama autónoma de las matemáticas, y construir una aritmética transfinita completa (Boyer, 1999). En el punto 4.3.2. se detallará más acerca de los procesos infinitos involucrados en el límite infinito de una sucesión.

Ya en el siglo XX, Hilbert afirma que el infinito no lo encontramos en la realidad. Argumenta que no es posible dividir la materia indefinidamente y que el infinito puede ser una noción necesaria en nuestro pensamiento, aunque no exista en la realidad (Salat, 2011).

Aunque la noción de infinito parecía estar rigurosamente definida, siguió siendo causa de controversias y paradojas. Helge von Koch construyó una curva continua y cerrada consistente en repetir indefinidamente el siguiente proceso: en un triángulo de lado 1, dividir cada lado en tres partes iguales y levantar un triángulo equilátero con cada parte central como base, siempre hacia el exterior del triángulo anterior y suprimiendo sus bases. Esta curva presenta la característica de que la longitud del arco entre dos puntos arbitrarios de la curva es infinita. Esto llevó a estudiar otras curvas que se obtenían con procedimientos análogos o verificando esa misma propiedad. Mandelbrot las denominó fractales, estudiando sus propiedades en lo que se ha denominado Geometría Fractal (Fedriani & Tenorio, 2010).

Las dos evoluciones históricas, tanto la del límite como la del infinito, muestran dificultades, obstáculos y errores que se han ido sucediendo durante siglos. Algunos de ellos incluso persisten en la actualidad. Por ese motivo surge la necesidad de la presentación del apartado siguiente.

2.2. Tipos de infinito, dificultades, obstáculos y errores en torno al límite infinito de una sucesión.

En este apartado va a realizarse una revisión bibliográfica acerca de los diferentes tipos de infinito, las dificultades, obstáculos y errores del límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión y los procesos infinitos.

En primer lugar, se recogen las diferentes acepciones de la noción de infinito, incidiendo en las que tienen un carácter matemático: infinito potencial e infinito actual.

Además, se presentan las definiciones de error y obstáculo, así como las preocupaciones de los docentes sobre ellos, que nos permitirán acercarnos a los encontrados para los distintos límites y procesos infinitos.

Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2004) recogen la preocupación de los docentes acerca de los errores, que aparecen en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos, a veces de forma persistente y masiva, influyendo en su aprendizaje. Estos autores afirman que su análisis servirá como ayuda al docente creando nuevas estrategias para un mejor aprendizaje.

Rico (1995, p.3) considera al error “como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento” y su presencia es “la necesidad de un ejercicio constante de la crítica”.

Este autor, recoge las ideas de Bachelard quien define la noción de obstáculo epistemológico como la aparición inevitable de errores que constituyen parte del avance del conocimiento. El obstáculo epistemológico puede considerarse desde dos puntos de vista: desde el desarrollo histórico del pensamiento matemático y desde la práctica educativa.

2.2.1. Diferentes tipos de infinito

En la clasificación de los diferentes tipos de infinito se han tomado en cuenta las investigaciones llevadas a cabo por Fischbein (1982), Ortiz (1994), Palacios, Barcia, Bosch y Otero (1995), Waldegg (1996), D'Amore (1996), Costa y Otto (2005), Dubinsky et al. (2005), Valdivé (2006), Buitrago, Gaviria y Márquez (2014), y Kidron y Tall (2015).

El infinito puede tener varias acepciones, incompatibles entre sí. Se distinguen varios aspectos: teológicos, finalistas, potenciales y actuales. Además, se considera que el menos infinito y el cero, en multitud de ocasiones, pueden confundirse, aunque son nociones diferentes. “La carencia absoluta de la bondad se puede equiparar con la maldad total, aunque son nociones diferentes, no tener algo no significa tener lo contrario, no ser bello no implica ser feo, aunque su belleza no exista” (Costa & Otto, 2005, p.2).

Para evitar estas dificultades, definen el infinito diciendo que:

Un conjunto es infinito cuando se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él. Aceptar esta concepción de infinito implica la necesidad de introducir y matizar un nuevo aspecto del infinito que es el que se conoce con el nombre de infinito potencial (Costa & Otto, 2005, p.5).

Actualmente, el infinito distingue dos acepciones en matemáticas. La primera de ellas, el infinito tomado como aquello que no tiene fin, que siempre puede continuar, que denominamos infinito potencial. La segunda, el infinito considerado como una totalidad, un proceso acabado y con sus límites alcanzados, pensar en el conjunto de todos los números sin pensar en cada uno de ellos, denominado infinito actual (Waldegg, 1996).

Históricamente y aunque matemáticos como Cauchy o Gauss negaran la existencia del infinito actual, puede demostrarse que tenemos diferentes infinitos, de distintos tamaños. Los números pares, $2n$, y los números naturales, n , son ambos infinitamente grandes, equivalente a decir que son mayores que cualquier otro valor pensado, y del mismo cardinal. Sin embargo, el conjunto \mathbb{R} también es infinitamente grande, pero tiene un cardinal distinto a los dos anteriores. Pese a que Gauss negase la existencia de infinito actual, sí admitió el infinito potencial (Costa & Otto, 2005).

D'Amore (1996) muestra algunas direcciones que se han tomado en la investigación en didáctica del infinito matemático, a través de una exposición que no toma como referencia las distintas nociones de infinito y las concepciones correspondientes, sino la referencia histórica del desarrollo de la noción. Dada la relevancia sobre el tema de estudio,

D'Amore publicó en 1997, una colección de 280 trabajos o investigaciones de interés histórico, epistemológico, psicológico, filosófico y didáctico, realizados desde 1951.

Infinito potencial

Fischbein (1982) expresa que la noción de infinito potencial es la que responde a la interpretación natural intuitiva del infinito.

Por otra parte, para Waldegg (1996) este infinito es un obstáculo cuando se pretende comparar dos conjuntos: es evidente en el conjunto no acotado, por poder continuar el proceso, mientras que queda oculto en el acotado, produciendo lo que el autor denomina parálisis ante el problema.

Además, Dubinsky et al. (2005) definen el infinito potencial como la concepción del infinito como un proceso, empezando por los primeros pasos (1, 2, 3, ...) y su posterior repetición.

El infinito potencial fija su interés en la operación reiterativa e ilimitada, donde se tiene una recursividad que no acaba nunca. Por muy grande que pueda pensarse un número natural, siempre existirá otro mayor. Además, es la base de la noción de límite en el cálculo infinitesimal (Ortiz, 1994).

El infinito potencial se obtiene mediante procesos que no son en ningún momento una totalidad, sino una posibilidad que se va realizando progresivamente (Palacios et al., 1995).

Infinito actual

Por otro lado, el infinito actual fue pensado por primera vez en un contexto geométrico. Se trata de un infinito ilimitado, que permite la cuantificación y la resolución de problemas de la vida real (Buitrago et al., 2014).

En el estudio de Ortiz (1994) se diferencian los tres contextos en los que Cantor consideraba la noción de infinito actual: el primero utilizado en la forma más completa, independiente de otro mundo, y que denominó Infinito Absoluto o simplemente Absoluto, el cual se considera, por definición, imposible de alcanzar. El segundo en el mundo físico; teniendo en cuenta que el espacio puede ser infinito de tres formas distintas: universo de tres dimensiones infinitamente grande, la negación de un espacio de cuatro dimensiones y que existan espacios reales de todas las dimensiones. Atendiendo a la teoría de la relatividad de Einstein el espacio es infinito porque puede expandirse siempre y no hay

pruebas de que el universo sea finito, admitiendo como posibilidad ontológica el infinito. El tercer contexto se encuentra en la mente como una magnitud matemática, número o tipo de orden, relacionando esto último con el problema de la hipótesis del continuo de Cantor. Para él el infinito actual de las matemáticas y el infinito actual de la física constituirían lo transfinito, donde existen infinitud de infinitos, limitados a nuevas extensiones y en consecuencia relacionados con lo finito.

Años más tarde, Valdivé (2006) sugiere promover cursos de actualización del profesorado de matemáticas en activo sobre los conjuntos infinitos, en los que se realice el paso al infinito actual evitando los conflictos cognitivos o incoherencias cuando se utilicen los límites, las derivadas o las integrales.

Kidron y Tall (2015) señalan la multitud de interpretaciones posibles, desde los que realizan cálculos finitos como aproximaciones y niegan el infinito actual, hasta los que tienen un sentido de límite como un objeto, desarrollando un sentido formal de la noción de límite.

Ambos tipos de infinito, actual y potencial, están presentes en el límite infinito de una sucesión, tal y como se describirá en el punto 4.3.2. de este trabajo.

2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores específicos del límite

El conocimiento de las dificultades, obstáculos y errores de la noción de límite es imprescindible en el estudio que trata de abordarse en el presente trabajo. Para ello se tomarán en consideración los trabajos de Tall y Vinner (1981), Cornu (1983), Sierpiska (1985, 1987), Hitt (2003), Sacristán (2003), Flores (1999), Vrancken, Gregorini, Engler, Muller y Hecklein (2006), Morales, Reyes y Hernández (2013), Irazoqui y Medina (2013), entre otros.

Irazoqui y Medina (2013) clasifican las variables que dificultan el aprendizaje de la noción de límite: epistemológicas, que dan cuenta de la noción en sí; didácticas, las cuales se relacionan con la labor docente, y cognitivas, que se relacionan con las estructuras cognitivas que posee el estudiante para aprender.

Entre los obstáculos epistemológicos, Cornu (1983) realiza la siguiente identificación:

- Sentido común de la palabra límite, interpretado como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

- Aspecto metafísico de la noción de límite, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Las nociones infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Sierpinska (1985, 1987) señaló cuatro elementos que podían provocar diferentes obstáculos epistemológicos acerca de la noción de límite: conocimiento científico, infinito, función y número real. Además, la autora los clasifica en obstáculo “heurístico” y obstáculo “rigurístico”. El primero de ellos se caracteriza por no considerar el paso al límite como una operación matemática sino un razonamiento basado en la inducción, mientras que, en el segundo, el paso a límite es un método de demostración de la relación entre cantidades, al que denomina obstáculo Eudoxio, y también la operación matemática que sustituye números variables y omite valores no deseados, que denomina obstáculo Fermat.

Posteriormente, la autora crea situaciones didácticas con las que poder ayudar a superar estos obstáculos epistemológicos, ya que considera que su superación es necesaria para la adquisición de la noción de límite. En esta propuesta, dirigida a alumnos de 17 años, el contexto utilizado fueron las sucesiones numéricas, realizando una actividad con $0.999...=1$, donde aparecieron los dos tipos de infinito: actual y potencial, dando lugar a cuatro modelos de conceptualizar el límite:

- Modelo potencialista, donde el límite nunca es alcanzado.
- Modelo potencial-actualista, el límite es alcanzado, pero después de un tiempo infinito.
- Modelo frontera del límite, en el que se considera a la sucesión como un conjunto y donde la sucesión puede tener dos límites y estar contenidos en ella (es decir son elementos de la sucesión), o bien tener un solo límite y no estar contenido en ella (es decir no es un elemento de la sucesión).
- Modelo infinitesimal del límite, cuando consideramos la diferencia entre el valor considerado límite y el conjunto de términos de la sucesión es infinitamente pequeña.

La autora, pese a no conseguir la supresión de estos obstáculos en el alumnado al que se le aplicó la secuencia didáctica, sí creó unos conflictos en ellos que dieron lugar al punto de partida de posteriores aprendizajes.

Vrancken et al. (2006) afirman que una forma de abordar los diferentes problemas surgidos por el límite es la necesidad de utilizar diferentes representaciones, pese a que en la actualidad exista una tendencia a la enseñanza del cálculo desde un enfoque algorítmico y algebraico. Las autoras destacan que la aparición de errores utilizando exclusivamente una representación algebraica impide al alumnado identificar donde se encuentra el error. Estos no utilizan apenas las representaciones gráficas, además de no considerarlas como apoyo en procesos algebraicos.

En su estudio, estas autoras pretendían detectar las dificultades relacionadas con la noción de límite de forma genérica, sin especificar cuáles estarían relacionadas con cada tipo de límite: de sucesión, de función, finito, infinito, etc. Para ello diseñaron una secuencia de actividades en las que trabajar el límite de una función, en las que el alumnado debía ser capaz de definir, explicar la definición, proponer ejemplos, analizar diferentes situaciones, comprender teoremas y propiedades del límite para demostrar que el alumnado dominaba esta noción. Los límites utilizados fueron límite finito de una función en un punto, límite infinito de una función en un punto, límite finito de una función en el infinito y límite infinito de una función en el infinito. Tras esta secuencia se detectaron las siguientes dificultades:

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.
- Dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

Por otra parte, Sacristán (2003) combina la noción de límite y la paradoja, trabajando los procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar en diferentes contextos y construir diferentes representaciones externas de la noción e interactuar con ellas. Un ejemplo con el que trabaja la autora es la Curva de Koch, con la que exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante esta figura geométrica recursiva.

Las paradojas son utilizadas también por Flores (1999), quien presenta un razonamiento matemático basado en la resolución de éstas, con la intención de utilizarlas en la formación del futuro profesorado, permitiendo mostrar la riqueza interpretativa y de representación de las nociones matemáticas involucradas en cada una de ellas. El autor afirma que estas actividades de formación provocan la búsqueda de significados en su conocimiento matemático y educativo, rompiendo con la creencia habitual de que domina el conocimiento matemático y solo se necesita formación didáctica. Además, persiguió en el futuro profesorado que en una primera visión hubiese una contradicción con sus expectativas intuitivas, buscando así una interpretación más amplia y profunda en la noción matemática.

Hitt (2003) muestra que los obstáculos de aprendizaje del límite están precisamente en la palabra “límite” y “tender hacia”. Estos términos no son empleados en el mismo contexto, el primero es preciso, mientras que el segundo puede denominarse más vago. Se contraponen las ideas promovidas por la instrucción, como el autor denomina, y las ideas intuitivas. Estas últimas nos muestran la noción de que el límite no es alcanzado. Además, si las definiciones formales no son comprendidas no será posible crear el vínculo entre una definición y otra representación de la misma noción. De nuevo, como ya ocurriese en otros autores, los obstáculos de la noción de límite se estudian de forma general, sin especificar qué ocurre para cada tipo de límite, utilizando en su propuesta el límite funcional.

Estas mismas expresiones cotidianas, “tender”, “aproximarse”, “acercarse”, ... habían sido elegidas por Tall y Vinner (1981) para evidenciar las dificultades que provocan y en las que se puede observarse el infinito potencial. Estas expresiones dificultan el significado de límite, por tener que considerar el proceso infinito de aproximación y el infinito actual.

Según Morales et al. (2013) la noción de límite tiene un papel muy importante en la comprensión de la mayor parte del contenido de las áreas de Cálculo y de Análisis Matemático. Identifican y caracterizan las dificultades en torno a la noción de límite infinito que desarrollan los estudiantes cuando lo analizan y lo interpretan en distintas representaciones. Además, observan que la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo han estado centradas en el límite finito, ante escasos estudios de límite infinito, sin aclarar si dichas investigaciones han sido realizadas para el límite de una sucesión o para el límite de una función. Consideran que es fundamental investigar sobre cada límite de forma

particular. En el caso que nos ocupa, señalamos por lo tanto la importancia de estudiar el límite infinito de sucesiones de manera particular. Por último, concluyen en su investigación que las actividades relacionadas con la noción de límite infinito utilizando diferentes representaciones, permitió identificar algunas dificultades, entre las que se encuentran: justificación del límite, aplicación de las condiciones de la definición de la noción, generalización y preferencia en el uso de métodos procedimentales frente a los métodos conceptuales.

2.2.3. Dificultades, obstáculos y errores específicos del infinito

Como ya sucediese en la evolución histórica, se pretenden recoger las dificultades, obstáculos y errores específicos tanto del límite como del infinito. Para este último se han revisado los estudios de Fischbein, Tirosh y Hess (1979), Cornu (1982, 1991), Sierpinska (1985), Duval (1993), Medina (2001), Garbin y Azcárate (2002), Belmonte y Sierra (2011), Medina y Rojas (2015), entre otros.

Los autores Medina y Rojas (2015) realizaron una revisión de los obstáculos específicos del infinito, identificados en los estudios de Sierpinska (1985), Cornu (1982, 1991) y Medina (2001):

- No aceptación del infinito actual y la influencia del infinito potencial (Sierpinska, 1985).
- Separación de lo geométrico y lo numérico, es decir, lo continuo de lo discreto. El éxito de la solución de algunos problemas a través de su interpretación geométrica impide el paso a la noción de límite numérico (Cornu, 1991).
- Generalización de propiedades de lo finito a lo infinito.
- Principio de continuidad de Leibniz. Generalizar la propiedad de una sucesión convergente a su límite. Por ejemplo, creer que el límite de la sucesión $0.9, 0.99, 0.999, \dots$ es menor que 1 porque todos sus términos lo son.
- Debate generado a lo largo de la historia sobre si el límite se alcanza o no (Cornu, 1991).
- Los producidos por la simbología propia de las matemáticas (Sierpinska, 1985).

Además, Fischbein et al. (1979) advierten de las contradicciones que conlleva la noción de infinito. Existen dos aspectos diferentes: el matemático, incuestionable como construcción lógica, y por otra parte la realidad psicológica que puede ser contradictoria

y relacionada con dificultades intuitivas. Una solución a esta contradicción ya la había dado Aristóteles, admitiendo la posibilidad ilimitada de aumentar un intervalo o dividirlo. Esta concepción del infinito, denominado potencial, dominó las matemáticas hasta Cantor. Estos autores indican que la intuición del infinito comienza a permanecer estable a partir de los 12-13 años, etapa anterior a la incursión del límite con el que va a trabajarse en este estudio.

Para empezar a comprender una noción, como pueda ser la de límite infinito de una sucesión, los estudiantes deben identificarla en diferentes representaciones: gráfica, numérica, algebraica y verbal. Además, es necesario la coordinación de los diferentes registros de representación para obtener la comprensión íntegra de la noción (Duval, 1993).

Además de las diferentes representaciones, Belmonte y Sierra (2011) consideran diferentes contextos para profundizar en las dificultades asociadas a la noción de infinito lo que les permite observar su influencia en las imágenes generadas. Estos autores señalan que es frecuente hallar expresiones de estudiantes del tipo: no se sabe, no se puede saber o calcular porque son infinitos, no se pueden contar porque son infinitos, no se puede calcular porque no sabemos dónde acaban, ... Estas respuestas se daban tanto en contextos numéricos como geométricos, después de aplicar un cuestionario en primero de Bachillerato cuando todavía no se había impartido la noción de límite. En ese momento, el alumnado se encontraba entre el conocimiento de las sucesiones y el acceso a la idea de límite.

Por otra parte, Garbin y Azcárate (2002) han podido constatar que las investigaciones dedicadas específicamente a la intuición del infinito matemático, desde el interés didáctico y psicológico, hacen importantes aportaciones al conocimiento de las concepciones del infinito.

En una investigación realizada por estas autoras, se realizó un mismo cuestionario en dos ocasiones, la primera para responderlo con el conocimiento que tuviesen acerca del infinito actual y la divisibilidad infinita, y la segunda, una semana después, para poder modificar, corregir o matizar cualquiera de las respuestas del primer cuestionario. Estaba formado por 5 preguntas y cada una de ellas se diferenciaba por el lenguaje utilizado: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico. El cuestionario fue aplicado una semana después, permitiendo a los estudiantes corregir, matizar o ampliar las respuestas

que dieron en la primera ocasión. Posteriormente se realizó una entrevista a alguno de estos estudiantes. Como resultado de todo lo anterior obtuvieron lo siguiente:

- El alumnado apenas responde de forma infinitista cuando se utiliza un lenguaje geométrico, algebraico o numérico.
- Se han identificado, a partir de determinadas respuestas a preguntas en lenguaje geométrico, de conflictos entre finito e infinito. Además, el infinito que aparece es únicamente el potencial.
- La noción de infinito actual aparece solo en representaciones que inducen a ello, como por ejemplo espacios acotados, existencia de analogía con nociones finitas, así como que la suma infinita deba tener un valor finito.

Dados los diferentes registros de representación, surge el estudio de Duval (1998) en el que se establece que para comprender una noción es necesaria una coordinación entre ellos, ya que con solo uno no se puede obtener una comprensión integral de la noción.

De entre estos registros de representación, Camacho y Aguirre (2001), en el análisis previo a la elaboración de una situación didáctica con la que introducir el límite infinito, destacan las dificultades en torno a las representaciones algebraicas, gráficas y de formalización.

2.2.4. Dificultades en torno a los procesos infinitos

En el límite infinito de una sucesión es necesario diferenciar dos procesos infinitos, uno para la variable independiente, n , y otro para la variable dependiente $s(n) = a_n$, por ese motivo se hace indispensable la revisión de los antecedentes sobre las dificultades en torno a estos procesos. En esta revisión observamos que las investigaciones realizadas son más recientes que las realizadas sobre el límite y el infinito. Muestra de ello son algunas de las referencias consideradas, entre las que se encuentran las siguientes: Villabona y Roa-Fuentes (2016), Parada, Conde y Fiallo (2016), Mola, Sampedro, González y Travieso (2018) y Montes, Contreras y Carrillo (2018), entre otros.

Mola et al. (2018) resaltan la tendencia generalizada de evadir los procesos infinitos, donde se rechaza el paso al límite como una nueva operación matemática, considerando únicamente el límite como una aproximación que se obtiene evaluando sobre el punto deseado.

Relacionamos estos procesos con la teoría APOS, uno de los pilares fundamentales del marco teórico de este estudio y que se describirá con detalle en el punto 3.4. de este trabajo. Los procesos infinitos se describen a partir de la relación entre el conjunto de los naturales y otro conjunto cualquiera. A partir de realizar un número pequeño de iteraciones se construye una acción. Para ello, y utilizando notación matemática, se inicia $k = 1$, obteniendo el primer objeto, posteriormente continuar con $k = 2$, logrando el segundo objeto, y así sucesivamente. La iteración finita es interiorizada en un proceso mental por la coordinación de un proceso de iteración a través de los números naturales. La iteración infinita da como resultado una sucesión infinita y numerable de objetos. Una vez visto como una totalidad el proceso iterativo infinito puede ser encapsulado dando como resultado ∞ (Villabona & Roa-Fuentes, 2016).

Quienes también relacionan estos procesos infinitos con el principio de inducción matemática son los autores Montes et al. (2018) resaltando su ausencia en el currículum de la etapa en la que se enseña lo relativo a los números naturales, pero exigiendo al profesorado su conocimiento.

Sobre esta misma idea, pero con un carácter más intuitivo, se encuentra el estudio de Parada et al. (2016) donde se plantea a los estudiantes que dividan entre 2 una cuerda de forma iterativa, proponiendo una sucesión numérica de 15 términos. Éstos, utilizando únicamente lápiz y papel, deben recoger los datos en una tabla y construir con ellos una gráfica, y esperar que sean capaces de obtener una idea intuitiva sobre la que ellos denominan “la última fracción”, y que a nosotros nos permitirá relacionarlo con la idea intuitiva de límite. Por medio de aproximaciones numéricas se evidencia una tendencia a esta última fracción utilizando un proceso infinito por parte de algunos estudiantes, sin embargo, otros no llegan a concluir la no existencia de esta última fracción, evidenciando así las dificultades de las nociones de límite y de infinito ya descritas en 2.2.2 y 2.2.3. Estos autores atribuyen esta última situación a la restricción existente en la utilización del lápiz y papel, y por ese motivo plantean el uso de software informático. Con la representación en una hoja de cálculo en GeoGebra, los estudiantes amplían el número de iteraciones que habían realizado previamente y pueden argumentar sus conjeturas sobre procesos infinitos y la inexistencia de la última fracción, pudiendo observar la posibilidad de tomar siempre un valor más.

Blázquez (2000) en su tesis doctoral, después de presentar las dificultades con la enseñanza del límite, categorizó los contenidos necesarios para la adquisición de los

procesos infinitos: conjuntos infinitos, series, expresión decimal de un número, densidad de los números racionales y sucesiones. También resaltamos la categorización realizada para los límites de sucesiones: estudio tabular de las tendencias numéricas, discriminación entre las tendencias finitas e infinitas y la aritmética de los límites.

Estos tipos de infinito, dificultades, obstáculos y errores en torno a la noción de límite de una sucesión que acaban de describirse en los puntos anteriores provocan que multitud de autores realicen diferentes estudios para la mejora en su enseñanza-aprendizaje, tomando en consideración al alumnado, al profesorado y a los manuales. Esta revisión de investigaciones será la presentada en el apartado siguiente.

2.3. Investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje del límite

En este apartado se muestra una revisión de algunas de las investigaciones que han sido realizadas con alumnado y profesorado, además de presentar el proceso de enseñanza y aprendizaje que realizan los diferentes manuales sobre el límite.

2.3.1. Investigaciones realizadas con el alumnado

Entre las investigaciones enfocadas a las/os alumnas/os destacamos las siguientes: Jirotková y Littler (2003), Dong-Joong, Sfard y Ferrini-Mundy (2005), Jutter (2006), Bucari, Bertero y Tripoli (2007), Miranda, Navarro y Maldonado (2007), Engler et al. (2008), Claros (2010), Salat (2011), Valls, Pons y Llinares (2011), Contreras, García y Font (2012), Morales et al. (2013), Olaya, Mondragón, López y Villamil (2013), Ortega-Arcega, Pantoja-Rangel, Ulloa-Ibarra y Zamora-Caloca (2015), Douglas (2018), entre otros.

La noción de infinito de Galileo y de Cantor aparece muy tarde en la formación matemática de los estudiantes. De ahí que a Salat (2011) le parezca razonable pensar que hay que proponer a los estudiantes discusiones acerca del infinito en matemáticas y sus aplicaciones en torno a la reflexión sobre el propio pensamiento matemático, tan pronto como sea posible. Aunque Salat en ningún momento relaciona el infinito con el límite, consideramos que ambas nociones debieran ser discutidas por los estudiantes para la adquisición del límite infinito de una sucesión.

En las matemáticas escolares siguen apareciendo dificultades relacionadas con el carácter intuitivo y formal de la noción matemática de infinito, tal y como señalan Miranda et al. (2007). En su trabajo, realizan un estudio de la noción de límite para que el alumnado tenga un mayor conocimiento, antes del desarrollo de la propia investigación. Las dificultades que encuentran entre los estudiantes las clasifican en epistemológicas, didácticas y cognitivas. Algunas de ellas son: fracaso de la unión entre la geometría y la aritmética (epistemológicas), dificultades por la propia naturaleza de la noción, el currículo y los métodos de enseñanza que emplea el profesorado (didácticas) y eliminar el problema del infinito tomando tantos términos como sean necesarios, usar el lenguaje natural en lugar de símbolos y rehusar de admitir que el paso al límite es una operación matemática (cognitivas). En su propuesta didáctica utilizaron dos problemas con características geométricas, involucrando a la noción de límite mediante procesos

infinitos y la situación límite. Para su resolución, los alumnos trabajaron de forma individual e intuitiva, para posteriormente organizarse en grupos de tres estudiantes y dar una respuesta común. En el análisis de estas últimas encontramos algunas afirmaciones dadas por los estudiantes donde utilizan expresiones como “tiende a”, manejado como una aproximación, que el límite no se alcanza, y en consecuencia no operan correctamente con el límite.

Tomando el punto de vista más coloquial de estas nociones encontramos el estudio de Dong-Joong et al. (2005) quienes realizaron un estudio del uso coloquial de estas palabras: infinito y límite, con estudiantes estadounidenses y coreanos. Su punto de partida fue el hecho de que los estudiantes cuando llegan al aula para aprender las nociones de infinito y de límite tienen cierto conocimiento de los mismos en su vida cotidiana. Los autores parten de la premisa de que el lenguaje cotidiano puede llegar a ser crucial para el aprendizaje del alumnado. Para ello analizaron estas dos palabras en discursos coloquiales y en discursos matemáticos. En inglés existe el uso de las palabras infinito y límite en lenguaje cotidiano, mientras que en coreano no. Al existir esta diferencia entre idiomas, pese a que el estudio fue en inglés, los autores pudieron concluir que el discurso coloquial tiene impacto en el discurso matemático.

De entre las dificultades anteriores, Contreras et al. (2012) profundizan sobre las epistemológicas, caracterizando a lo largo de su investigación cuatro significados de referencia utilizados en la enseñanza del límite: gráfico, geométrico, infinitesimal y numérico. Los autores trabajaron con estudiantes que previamente no habían utilizado la noción de infinito. La noción que se estudia es el límite en el infinito de una función y el profesor la desarrolla a partir de su idea intuitiva. El alumnado recibe la presentación de cuatro gráficas para que intuitivamente determinen su límite. Los autores pretenden que los estudiantes se ejerciten y dominen técnicas de cálculo de límites apoyadas en representaciones gráficas de algunas funciones. Además, muestran que el desarrollo del límite de una función intuitivamente no desarrolla la noción de infinito actual y provoca que los estudiantes vean la noción de límite solo como un proceso sin fin (infinito potencial).

Otra secuencia didáctica encontrada para trabajar la noción de límite es la propuesta por Anderxon, Torres, Parra y Milton (2013), quienes dan comienzo al uso de sucesiones a partir de diferentes paradojas, como la de Aquiles y la tortuga de Zenón. Con este tipo de actividades el alumnado trabajó las sucesiones de forma numérica. Además, lograron

alcanzar una primera noción de límite a partir de las distintas sucesiones, utilizando en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la ubicación en la recta numérica de los términos de las sucesiones que se manejaban.

Otros autores, como Jirotková y Littler (2003), trataron de buscar información sobre el infinito en sus estudiantes sin que estos fuesen conscientes, es decir, sin la mención explícita al término. Los estudiantes debían ser capaces de definir su propio entendimiento de la noción de línea recta. Algunas de las palabras que aparecieron en ellos fueron: infinito, infinitud, interminable y punto final.

Bucari et al. (2007) deciden realizar una comparación a partir de dos presentaciones del límite utilizadas con el alumnado en distintas sesiones de la asignatura de Cálculo Diferencial, en el primer curso de ingeniería. En la primera utilizaron un orden tradicional de la enseñanza del límite de una función: definición, teorema, demostración, y en ocasiones, algún ejemplo, inmediatamente después de la noción de sucesión y del límite de una sucesión. En la segunda incluyeron estrategias de aprendizaje constructivo, colaborativo y orientado a resolución de problemas. Con la primera presentación comprobaron que el límite de una sucesión no es justificación como estrategia de enseñanza previa al límite de una función, ya que afirman que estos límites tienen una dificultad equivalente, aunque conceptualmente sean distintos. Indican que podría justificarse que se presenten de esta forma por los fundamentos del análisis real, donde pueden usarse algunas sucesiones de números racionales para construir la recta real. Con la segunda se estudiaron los límites a partir de registros numéricos y gráficos, y donde los autores resaltan la percepción “aproximativa” del límite. Además, aseguran que la decisión de desarrollar procesos de enseñanza-aprendizaje basados en el alumnado genera la necesidad de tener en cuenta la construcción histórica, admitiendo la búsqueda, el error y el debate dentro del aula.

También en la universidad, en particular en Suecia durante un curso de matemáticas, Jutter (2006), en su tesis doctoral, utilizó el límite de una función para posteriormente analizar sus resultados, dando lugar a lo siguiente:

- La definición formal del límite no estaba integrada en su concepto imagen y por lo tanto no era usada por los estudiantes.
- Los estudiantes que habitualmente tenían un alto rendimiento parecían seguir el desarrollo histórico de la noción de límite, mientras que los de bajo rendimiento

no. Los estudiantes que no lograron utilizar el límite formalmente no poseyeron tampoco el concepto imagen.

- En un principio, los estudiantes eran capaces de resolver rápidamente las tareas rutinarias, pero cuando debieron utilizar la propia noción comenzaron a confundirse acerca de lo que hacer con la definición, en buena parte de los casos por una mala interpretación.

Douglas (2018), realizó un cuestionario de dos preguntas de respuesta corta, una pregunta de varios apartados en los que indicasen si ocurría siempre, a veces o nunca verdadero, y finalmente tres preguntas gráficas involucrando a diferentes límites de funciones. Su objetivo era que los estudiantes, de la asignatura de Cálculo III y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pudiesen demostrar el conocimiento que tenían sobre los límites en los cálculos, en la representación gráfica y en la noción en sí misma. El autor pudo comprobar que después de los primeros límites muchos estudiantes no alcanzaron la definición formal de la noción. Además, probó que la mayoría de los estudiantes no eran capaces de resolver problemas que implicaban el uso de límites, llegando a conjeturar que la discrepancia que tiene el estudiante entre la definición de su noción personal y la noción formal de límite es el motivo de sus problemas.

Estableciendo un análisis más preciso, ya que analizaron por separado la noción de límite de una sucesión y límite de una función, nos encontramos con la investigación Valls et al. (2011) en la que realizaron un cuestionario a estudiantes, que ya habían trabajado previamente con estas nociones, y el cual estaba formado por tres etapas: en la primera, consideraban elementos matemáticos y características de comprensión obtenidas de otras investigaciones; en la segunda, analizaron nociones de aproximación dinámica y métrica del límite para identificar los elementos matemáticos que intervienen; en la tercera, seleccionaron diferentes problemas para los que se debía utilizar diferentes sistemas de representación. Afirmaron que los alumnos adquirirían la concepción dinámica del límite de forma paulatina, y que la comprensión métrica en términos de desigualdades se apoyaba en que el alumnado supiera coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango. Los resultados a los que llegan los autores evidencian que el sistema de representación más utilizado para la comprensión de la coordinación entre las aproximaciones mencionadas es el numérico.

En el caso de la tesis doctoral de Claros (2010), todavía se particulariza más que en el caso anterior, elaborando un instrumento de recogida de información con el que poder analizar las dificultades encontradas por el alumnado al hacer frente al límite finito de una sucesión. Para ello se consideran los fenómenos caracterizados por el autor, en el sentido dado por Freudenthal, y a los que se hará mención en el *Capítulo 3*, así como a los diferentes sistemas de representación.

Engler et al. (2008) diseñaron una situación didáctica para trabajar el límite infinito de funciones en distintos sistemas de representación y teniendo en cuenta las nociones de infinito, tanto para más como para menos infinito. Esta propuesta estuvo formada por tres momentos: el diseño y la discusión entre docentes de las actividades y las dificultades y errores que habían tenido lugar en años anteriores, la puesta en marcha de estas actividades en el aula y finalmente el análisis de los resultados obtenidos. Como resultado obtuvieron que las diferentes interpretaciones favorecen adquirir los conocimientos y su relación con los conocimientos ya adquiridos previamente.

Morales et al. (2013) relacionan las distintas representaciones del límite infinito a partir de cuatro actividades. En ellas el alumnado elabora un diseño para trabajar el límite infinito con lápiz y papel. Los alumnos y las alumnas con los que elaboraron su estudio son estudiantes universitarios de Matemáticas, y han abordado previamente las nociones de función real de una variable, límite de funciones, definición intuitiva y formal del límite y sus propiedades. Por ese motivo se parte de la premisa de que estos estudiantes tenían un dominio de las nociones que aparecían en las actividades propuestas. Pese a ello, los autores identifican las siguientes dificultades: justificación del límite, uso de cuantificadores, aplicaciones de las condiciones de la noción, dificultades para establecer y utilizar equivalencias, identificación de las condiciones de una definición de la noción, dificultad para la generalización, preferencia por métodos procedimentales frente a los conceptuales, el alumnado identifica las condiciones de la noción de límite, pero no la aplican correctamente a casos concretos, entre otros. Los autores indican que es posible que en los estudiantes prevalezcan las concepciones informales de la noción, es decir, las ideas intuitivas, y no lo hagan las concepciones formales.

Dejando a un lado el lápiz y papel de los autores anteriores encontramos el estudio de Ortega-Arcega et al. (2015), quienes analizan el aprendizaje del límite y continuidad usando los softwares matemáticos libres WinPlot y GeoGebra, para incentivar el

acercamiento a la representación gráfica y numérica, apoyándose de cuestionarios y problemas.

2.3.2. Investigaciones realizadas con el profesorado

Por otra parte, revisamos las investigaciones realizadas con el profesorado, entre ellas encontramos: Movshovitz y Hadass (1990), Ramírez (2004), Kattou, Michael, Kontoyianni, Christou y Philippou (2009), Lacasta y Wilhelmi (2010), Sánchez (2012), Lestón (2012), Macías, Jiménez, Duarte, Sánchez y Claros (2017), entre otros.

Esta revisión se hace indispensable en este trabajo puesto que en el *Capítulo 6* se analizarán las respuestas del profesorado en formación cuando, en grupos, debaten sobre la adecuación o no de algunas definiciones y ejemplos de límite infinito de sucesiones en diferentes sistemas de representación, y en las que pretendemos identificar el perfil fenomenológico de cada uno de ellos.

Partimos de la idea de que la formación de estos futuros profesores y profesoras debe integrar tanto a los contenidos matemáticos como los psicológicos y pedagógicos (Movshovitz & Hadass, 1990). Y en lo que atañe al infinito, Lestón (2012) parte del supuesto de que el profesorado en formación debe enfrentarse a los conjuntos infinitos y números transfinitos para poder construir un constructo teórico que les permita afrontar las situaciones en las que está involucrada el infinito en las aulas de educación secundaria.

Las investigaciones sobre el límite y el infinito desde el punto de vista del estudio del profesorado son mucho menos numerosas que las que tienen al alumnado como protagonista. Sin embargo, el contenido trabajado en ellas es muy parecido. Por ejemplo, nos encontramos de nuevo con la relación entre las paradojas y el límite infinito. Uno de los autores que estudia esta relación es Ramírez (2004), quien recogió las reacciones de diferentes profesores de matemáticas utilizando las paradojas, en las que destacaba una reacción reflexiva y expresaban un mayor análisis para la resolución, creyendo que estaban mal planteadas o que había algún error.

Por otra parte, Kattou et al. (2009) trabajaron con docentes en activo de Educación Primaria seleccionados de un seminario ofrecido por la Universidad de Chipre en Educación Matemática, en lugar de futuros profesores y profesoras de Educación Secundaria como será nuestro caso. Las autoras pretendían provocar percepciones acerca de la noción de infinito. Los docentes debían dar una definición de infinito y presentar dos ejemplos que involucrasen a la noción. La mayoría de los docentes comprendían al

infinito como un proceso ilimitado. Esta interpretación intuitiva, como ya indicaban algunos autores que hemos mencionado anteriormente, provoca un obstáculo cognitivo de la noción. Los maestros citaron ejemplos de distintos campos de las matemáticas: geometría, trigonometría y series, indicando además su aplicación limitada a la vida diaria. Las autoras pudieron comprobar que los maestros daban respuestas contradictorias durante la comparación de conjuntos que se presentaban en diferentes representaciones, sin reconocer que las respuestas incompatibles no eran aceptables en matemáticas. Tras estos resultados, propusieron los siguientes pasos:

- Presentar el infinito con distintas tareas típicas y guiadas para poder descubrir la intuición en el profesorado sobre el infinito.
- Discutir sobre las aplicaciones del infinito en la vida cotidiana.
- Introducir la definición formal de infinito, así como ambos tipos: potencial y actual, distinguiéndolos en ejemplos.

Lacasta y Wilhelmi (2010) realizaron un cuestionario en el que mostraban 4 presentaciones distintas del límite de funciones, atendiendo a los siguientes criterios: sistema de representación gráfica, sistema de representación tabular, por medio de un ejemplo e idoneidad epistémica. La muestra utilizada por los autores estaba formada por profesorado de secundaria en España, que ejercían como docentes entre los años 1995 y 2010, y en Francia en 2009. Con ello pudieron probar la preferencia del profesorado por la representación tabular, frente a la representación gráfica, además de preferir condiciones que permitan el uso de ejemplos, donde la noción de límite se entienda de forma intuitiva, dejando para el último momento la definición o la formalización de la noción.

Además de todo lo expuesto hasta ahora en este apartado, destacamos la investigación de Sánchez (2012) realizada en su tesis doctoral. La autora, además de realizar un estudio minucioso de libros de texto, realizó entrevistas a docentes en activo con las que poder determinar el perfil fenomenológico de cada uno de ellos basado en sus respuestas. Previo a su realización, la autora había seleccionado y entregado diferentes fragmentos a los profesores y las profesoras para que pudiesen estudiarlos con detalle antes de la entrevista y poder así comprobar cómo usaban los fenómenos organizados por una definición del límite finito de una función en un punto. Estos fenómenos habían sido también

caracterizados en este mismo estudio, dando lugar a lo que la autora denomina ADI, aproximación doble intuitiva, e IVF, ida y vuelta en funciones.

Para el desarrollo de la entrevista a los profesores y profesoras, la autora elaboró un guion para cada una de ellas, una categorización de las posibles respuestas para un posterior análisis y finalmente un protocolo de actuación de la propia investigadora durante las entrevistas. Posteriormente, para el análisis de estos resultados se elaboraron los perfiles fenomenológicos del profesorado en activo a partir de una componente numérica y otra visual. La componente numérica contabiliza los comentarios de utilización y no utilización que realiza el/la docente en el aula, diferenciando cuales se realizaban de forma espontánea y cuales eran inducidos por la investigadora. Esta componente es una fracción, donde en el numerador se indica el cómputo del fenómeno ADI y en denominador del fenómeno IVF. La componente visual recoge la información referida a los fenómenos y a los sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico o simbólico, o la ausencia de ellos. A partir de la componente numérica fue posible poder enunciar un criterio y un posterior agrupamiento del profesorado según su perfil fenomenológico.

La mayor parte de los comentarios ofrecidos por los profesores y las profesoras fueron sin precisar el sistema de representación. Si se considera el enfoque formal e intuitivo durante toda la entrevista, el fenómeno IVF (formal) es el que más comentarios recoge, mientras que si se considera únicamente la fase espontánea el más numeroso es el fenómeno ADI (intuitivo).

De este estudio, Sánchez (2012) concluye que el fenómeno ADI se usa de forma generalizada, siendo el sistema de representación más apropiado el gráfico, mientras que el fenómeno IVF se supedita a un alumnado concreto y ligado a un sistema de representación simbólico en el formato definición.

El instrumento de análisis usado por Sánchez (2012) fue modificado por Macías et al. (2017), al encontrar problemas en algunos casos, que no habían sido detectados con anterioridad, debido a la existencia de un posible denominador 0 en la componente numérica. Por ello, ésta fue modificada por una componente numérico-vectorial, sustituyendo una fracción por dos vectores, uno para el fenómeno ADI y otro vector para el fenómeno IVF. Con el argumento de ambos vectores se indica la inclinación del docente a la utilización o no del fenómeno en el aula, siendo la bisectriz del primer cuadrante la que indica la distinción entre uno y otro. Si de forma excepcional la

inclinación del docente, tomada a partir del argumento del vector, coincide con la bisectriz, los autores se decantan por afirmar que éste utiliza el fenómeno. Además, para poder recoger todos los casos del estudio de Sánchez (2012), y dado que el argumento no muestra un mayor o menor número de respuestas, se consideró tomar también la diferencia en valor absoluto entre la primera componente y la segunda del vector para poder determinar si era mayor o menor que 1 y así mostrar la implicación del docente en la entrevista.

Con esta nueva componente se evita cualquier inconveniente de carácter aritmético en su utilización.

Este último instrumento será el que durante esta investigación sea utilizado, en el *Capítulo 6*, para poder analizar el perfil fenomenológico del alumnado del Máster de Formación del Profesorado en la utilización del límite infinito de una sucesión.

2.3.3. Investigaciones desarrolladas utilizando libros de texto y manuales universitarios.

Finalmente, después de la revisión de investigaciones realizadas con el profesorado y el alumnado, se realiza la correspondiente al instrumento utilizado por ambos: investigaciones con libros de texto y manuales universitarios. Entre estas investigaciones encontramos: Cockroft (1985), Sánchez y Contreras (1998), Blázquez (1999), Sierra et al. (2003), Monterrubio y Ortega (2009), Claros (2010), Gómez (2011), Sánchez (2012), González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014), entre otros.

Monterrubio y Ortega (2009) afirman que el libro de texto es un recurso habitual en el proceso de enseñanza-aprendizaje, e incluso que el propio manual es el que determina el currículo real, siendo difícil su elección por parte del profesorado. Los autores consideran que un libro de texto es aquel que corresponde a un curso y a una materia concreta, y su presencia en el aula va unida a la labor del docente.

Por otra parte, Gómez (2011) resalta que a pesar de contar con manuales en el ámbito escolar desde el siglo XVIII, no ha sido hasta hace pocos años cuando los investigadores en didáctica de las matemáticas han comenzado a estudiarlos como apoyo y fuente del alumnado y el profesorado, aunque siempre hayan estado en el centro del debate educativo. Los libros de texto, o manuales escolares como denomina el autor, surgieron para dar respuesta a los requerimientos del sistema educativo: para suplir la falta de profesorado con la formación necesaria, dar respuesta al modelo de enseñanza simultánea

y adaptarse a las características del alumnado en los diferentes niveles educativos. El autor diferencia el análisis de los libros de texto en a priori, para su elección como medio de instrucción, y a posteriori, para poder indagar en aquello que ha sido o es la práctica real de la enseñanza, por ser el único registro disponible del conocimiento matemático que la educación ha transmitido. En nuestro caso, el análisis que se realizará en el *Capítulo 5* será a posteriori, tomando cada una de las leyes educativas como periodo de referencia.

Cockroft (1985) destaca la importancia del libro de texto, el cual constituye una ayuda para el docente y su labor en el trabajo en el aula.

Después de la realización del análisis de diferentes manuales universitarios, González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014) concluyeron que la mayor parte de ellos potencian la noción de límite como un proceso, dando más importancia a las propiedades de cálculo en lugar de las propias de la noción, acentuando todavía más este aspecto a las actividades propuestas para afianzar los conocimientos.

Particularizando el análisis de manuales a la noción de límite encontramos el estudio de Sánchez y Contreras (1998), quienes distinguen varias concepciones ligadas a esta noción: concepción geométrica, concepción numérica, concepción analítica o métrica y concepción topológica. Los autores comprobaron que la noción de límite de una función presentaba modificaciones metodológicas en el transcurso del tiempo. En cada manual los autores consideraban las siguientes variables: forma de introducir la noción de límite, la definición que formalizaba la noción, qué ejemplos aparecían, que concepciones derivaban y obstáculos y dificultades extraídas de los contenidos. En este análisis detectan que desde el año 1990 el límite de una función se apoya en el conocimiento previo del límite de una sucesión. Además, se ha prescindido de la definición topológica en los últimos años, evitando la rigurosidad de los manuales de enseñanzas medias de los años 80, además de la ausencia de situaciones didácticas en las que apareciera la concepción geométrica del límite.

Blázquez (1999) constató la dificultad del alumnado de Secundaria cuando debían enfrentarse a la noción de límite. En uno de los análisis realizados por la autora utiliza 11 libros de texto, todos ellos del periodo LOGSE, en los que se compara la distribución de los contenidos matemáticos. Además, estableció dos categorías, la primera de ellas tomando como referencia el currículo y la segunda la relación existente entre los

componentes de la noción de límite. La mayoría de estos libros de texto no trabajan contenidos sobre sucesiones o límite de una sucesión, y tampoco aparecen cuestiones relativas a los cambios en el sistema de representación, que sí aparecen en el currículo. La autora destaca que los libros de texto tratan la noción de límite de forma inadecuada, sin una motivación real, propiciando que el alumnado no vea la necesidad de construir dicha noción.

El desarrollo de los libros de texto no ha sido uniforme en cada una de estas épocas, existiendo diferencias entre ellos a pesar de que debiesen ajustarse a las leyes vigentes, coexistiendo libros de texto de planes distintos (Sierra et al., 2003).

Estos autores ponen de manifiesto que en los últimos años se ha dado más importancia al estudio de los manuales escolares como reflejo de la actividad en el aula, determinando la práctica educativa, incluso en mayor medida que la legislación vigente. Los autores establecen tres etapas para realizar su trabajo. En la primera, elaboran una ficha con la información relevante de cada uno de los libros de texto; en la segunda, agruparon los libros de texto por periodos educativos: 1940-1967 desde la Guerra Civil hasta el año 1967, 1967-1975 desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado de la LGE, 1975-1995 desde la implantación del BUP hasta el inicio de la LOGSE, y 1995-2000 desde la implantación de la LOGSE hasta el fin de los estudios de estos autores. En este estudio ampliaremos este último periodo hasta 2005 con la implantación de la LOE en el Bachillerato, e incorporaremos dos nuevas etapas 2005-2015 y 2015-Actualidad por las nuevas leyes educativas. Además, la información curricular de cada uno de estos periodos se desarrolla en el punto 2.4.

Sierra et al (1999) destacan que, a partir de la matemática moderna, los libros de texto muestran la idea intuitiva de continuidad para posteriormente presentar la definición formal y topológica de límite. En la etapa 1975-1995, algunos libros comienzan con la continuidad y luego la definición de límite, pero otros mezclan ambas nociones. Al finalizar la etapa predominan las nociones intuitivas.

Esta misma distribución histórica fue la que utilizaron Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales para el análisis de los libros de texto, donde se pretendía identificar los fenómenos organizados por la definición del límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto respectivamente. En este estudio empírico, los autores identificaron diferentes sistemas de representación y formatos, describiendo la evolución

y presentación de estos fenómenos, y utilizando el libro de texto como instrumento de trabajo del profesorado.

Después de dichos análisis, en un estudio posterior, Claros, Sánchez y Coriat (2016a) concluyen que en la actualidad predomina la introducción intuitiva del límite, siendo posible que el alumnado no adquiriera una comprensión completa de la noción de límite por su poco o nulo desarrollo formal. Sin embargo, este desarrollo intuitivo, junto a los diferentes sistemas de representación utilizados, hace que el alumnado pueda tener una fenomenología más completa de la noción. Los autores afirman que los fenómenos intuitivos deben preceder a los fenómenos formales en el desarrollo de la secuencia didáctica del límite.

Tal y como afirma Gómez (2011), el análisis de libros de texto es un componente crucial en la investigación en Didáctica de las Matemáticas, al no ser una interpretación exclusiva del pensamiento del profesorado y del alumnado. Por ese motivo, en el *Capítulo 5* del presente estudio se realizará un análisis de libros de texto en el que se intentarán identificar los fenómenos organizados por la definición del límite infinito de una sucesión, definidos en el *Capítulo 4*.

2.4. Ubicación curricular del límite infinito de una sucesión

En este apartado se realiza una revisión bibliográfica de autores que han analizado las nociones de infinito y de límite en las diferentes leyes educativas españolas, entre los que nos encontramos con Blázquez (1999), Belmonte y Sierra (2011), Herrera, Salazar, Hernández y Trejo (2013), entre otros.

Además, se ha revisado el contenido matemático que se encuentra en la legislación española que pudiese relacionarse con la adquisición de la noción de límite de una sucesión. Las leyes consideradas han sido:

- Ley Moyano: Ley de Instrucción Pública
- LGE: Ley General de Educación
- LOGSE: Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo
- LOE: Ley Orgánica de Educación
- LOMCE: Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa

Sirva como aclaración que esta última no es una nueva ley educativa, sino una modificación de la LOE. Otras, como la LOECE, LODE, LOPEG y LOCE no se han tomado en consideración; bien porque no se modificase el currículo anterior, en el caso de la LOECE, LODE y LOPEG, bien por su corta duración, la LOCE.

2.4.1. Investigaciones del límite y el infinito en la legislación española.

La incorporación de la noción de infinito al currículo y los libros de texto presenta, según Belmonte y Sierra (2011), una singularidad frente a cualquier otra noción: no se define, ni se acompaña de manual de uso.

Según los estudios de estos autores, hasta la finalización de bachillerato no es fácil encontrar referencias explícitas sobre el significado de infinito en un contexto educativo. El infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o como sinónimo de muy grande o muy pequeño.

Otros, como Herrera et al. (2013), tratan de esclarecer cual es la conceptualización más sencilla del límite, que puede ser más adecuada para su uso en los currículos de Educación Secundaria, Bachillerato y el primer curso de carreras de ingeniería y similares.

Blázquez (1999) señala que el currículo que propuso la LOGSE intentaba remediar el exceso formalismo de la LGE, introduciendo las nociones de una forma más intuitiva. La

autora destaca que este excesivo formalismo provocaba la creencia en el profesorado de que el aprendizaje de las matemáticas fuese inasequible para el alumnado por su insuficiente madurez.

Lacasta y Wilhelmi (2010) señalan la tendencia a evitar de forma expresa las nociones del Análisis Matemático, y concretamente la noción de límite en los currículos de secundaria. Pese a que a partir de 3º de ESO ya se considere su uso en algunas situaciones, centra su interés más en la manipulación simbólica de diferentes expresiones formales, que en el propio comportamiento del límite. En 1º de Bachillerato continúa esta tendencia, apareciendo de forma rigurosa en 2º de Bachillerato, tanto en las matemáticas científico-tecnológicas como en las aplicadas a las ciencias sociales.

Siguiendo los periodos establecidos por Sierra et al. (1999) y ya recogidos en el apartado 2.3.3, describimos los resultados arrojados en el análisis de libros de texto de la noción de límite funcional por estos autores para 1940-1967, desde la Guerra Civil; 1967-1975, desde la introducción de la matemática moderna; 1975-1995, desde la implantación del Bachillerato Unificado de la LGE. Este estudio es anterior a las últimas leyes educativas y que nosotros sí consideraremos, 1995-2005, 2005-2015 y 2015-Actualidad.

En la primera de las etapas, los autores diferencian dos tratamientos del límite. El primero de ellos va ligado a la noción de sucesión y variable. Este tratamiento es denominado “de modo oscuro”, y parte de la idea de infinitésimos e incrementos, además de contener representaciones gráficas muy escasas. En el segundo se ofrece una definición de límite y se completa con una interpretación geométrica y un aumento de las representaciones gráficas. Se utilizan también contraejemplos sobre la existencia de límite. En ambos tratamientos del límite, el desarrollo es secuencial y formal y las demostraciones no son rigurosas, predominando como consecuencia de ello el enfoque intuitivo.

En el periodo, comprendido entre 1967 y 1975, los autores diferencian tres tipos de enseñanzas de las matemáticas, y del límite en particular: las que siguen el modelo de la etapa anterior, las que presentan nuevas ideas y las que introducen axiomas al mismo tiempo que proponen actividades a realizar por el alumnado. En esta etapa la definición de límite evoluciona hacia un mayor formalismo, quedando las matemáticas desligadas del resto de ciencias.

Entre los años 1975 y 1995, el concepto de límite aparece de forma explícita en los documentos oficiales, donde se sugiere introducirlo de forma métrica en contraposición

con la orientación topológica del periodo anterior. Los autores afirman que se reduce también a casos sencillos el cálculo de límites. En esta etapa se indicó que la formación de la noción de límite no es imprescindible y tampoco el uso de una notación rigurosa para definir un vocabulario básico.

2.4.2. Legislación española. De la LGE a la LOMCE.

Pese a lo establecido por los autores anteriores, el límite infinito de una sucesión no aparece en la legislación española actual, LOMCE, de forma explícita, ni tampoco en leyes anteriores, como por ejemplo LOGSE y LOE, sino que es presentado como una generalización del límite finito de una función en un punto. Donde sí aparece de forma explícita es en la LGE. En el *Capítulo 5*, se va a realizar un análisis exhaustivo de libros de texto, y se tomarán libros de diferentes etapas legislativas. Observaremos como a pesar de que la noción de límite infinito de una función no forma parte del currículum, sí aparece dicha noción en los libros de texto como contenido previo a otro tipo de límites.

La LGE fue puesta en marcha en el año 1970, aunque consideramos el año 1975 en este estudio, por ser el momento en el que se implanta, de forma gradual, el Plan de Estudios de Bachillerato. De esta forma quedó extinto el Bachillerato General Elemental y Superior anterior.

Podemos encontrar, en el segundo curso, el límite de sucesiones, el número e y el cálculo de límites, nociones involucradas en el límite infinito de una sucesión. A continuación, se introducen la función real de variable real, los límites y la continuidad. Esta orden indica además que este curso es el de introducción al análisis.

Además, se especifica que la noción de límite conviene introducirse en su forma numérica y debe reducirse a casos sencillos. En el tercer curso no aparece ninguna de las nociones relacionadas con el límite infinito de una sucesión.

La LOGSE, puesta en marcha en el año 1990, no solo amplió la escolaridad obligatoria a los 16 años, sino que introdujo la ESO y fijó el Bachillerato en dos años.

En el primer curso del nuevo Bachillerato, tanto en la asignatura de Matemáticas I como en Matemáticas Aplicadas las Ciencias Sociales I, no se hace ninguna alusión a los términos infinito, ni límite. En el segundo curso, que da acceso a estudios universitarios, sí existe una breve reseña. En el caso de la asignatura Matemáticas II se indica como contenido a impartir de la introducción a las nociones de límite y derivada de una función en un punto, además del cálculo de límites y derivadas de las familias de funciones ya

conocidas previamente por el alumnado. Por otro lado, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, aunque de una manera somera, se indica la aplicación del límite y la derivada a la determinación e interpretación de las propiedades locales de funciones habituales basadas en situaciones contextualizadas.

Con el cambio de legislación se anticipan algunas de estas nociones a cursos anteriores. En la LOE, la noción de sucesión se introduce en 3º ESO, a partir del análisis de sucesiones numéricas, progresiones aritméticas y geométricas, así como sucesiones recurrentes. En 4º ESO no se hace ninguna referencia en el currículo a ninguna de las nociones asociadas. En 1º de Bachillerato, en la asignatura de Matemáticas I, se introduce en el currículo el bloque de análisis, donde se encuentra la aproximación a la noción de límite de una función, tendencia y continuidad. En ningún momento se establece la relación con el límite de una sucesión, ni finito, ni infinito. En la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, pese a contener un apartado de análisis, no se establece ninguna mención a la noción de límite.

En 2º de Bachillerato, en la asignatura de Matemáticas II, de nuevo se trabaja la noción de límite de una función, además del cálculo de diferentes límites. En la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se realiza la aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función.

En la ley actual, LOMCE, en 3º de la ESO, tanto en la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como en la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, se mantiene el contenido de sucesiones numéricas, sucesiones recurrentes, progresiones aritméticas y geométricas.

Además, se encuentra por primera vez la noción de límite, de nuevo, en 1º de Bachillerato. En la materia de Matemáticas I, nueva denominación a las anteriores asignaturas, se incluye la noción de límite de una función en un punto y en el infinito, cálculo de límites, límites laterales e indeterminaciones. Además, en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, se presenta la idea intuitiva de límite de una función en un punto, además del cálculo de límites sencillos. Se utiliza el límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función y su aplicación al estudio de las asíntotas.

En el segundo curso de Bachillerato, en la materia de Matemáticas II encontramos el límite de una función en un punto y en el infinito, continuidad de una función, el estudio de los tipos de discontinuidad y el teorema de Bolzano. Mientras tanto en la materia de

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, podemos encontrar los siguientes contenidos: continuidad, tipos de discontinuidad. Dicho estudio de la continuidad se aplica tanto en funciones polinómicas, racionales e irracionales sencillas como en exponenciales y logarítmicas.

Capítulo 3. Marco teórico

3. Marco Teórico

Este capítulo se organiza en cuatro apartados, que corresponden a los cuatro pilares donde se fundamenta el marco teórico de esta investigación: la fenomenología, los sistemas de representación, el pensamiento matemático avanzado y la teoría APOS.

El primer apartado lo dedicamos a la fenomenología. Cuando hablamos de ella lo hacemos como componente de su análisis didáctico en el sentido dado por Freudenthal (1983), el cual da el nombre de “fenomenología” a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre “fenómeno” y “noúmeno”. Esta reflexión filosófica entre los objetos construidos en conceptos serán los “noúmenos” y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan serán los “fenómenos”.

En el segundo presentamos los sistemas de representación. Los fenómenos caracterizados pueden presentarse en las diferentes representaciones: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Para Janvier (1987) y Rico (2009), todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, necesitando el establecimiento de relaciones entre distintos sistemas de representación. Estos sistemas de representación enfatizan algunas propiedades del concepto y dificultan otras.

El tercer apartado reúne las investigaciones previas sobre el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). El límite infinito queda enmarcado dentro del PMA al requerir para su aprendizaje una capacidad lógica abstracta e intervenir el proceso de abstracción, formalización, representación y definición. Todos estos elementos son aspectos del desarrollo cognitivo, propios de dicho tipo de pensamiento. Siguiendo a Tall (1991), profundizamos en el desarrollo cognitivo presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con el cálculo infinitesimal. Además, Tall señaló varios conceptos que debían situarse por su dificultad dentro del PMA, entre ellos el límite y el infinito.

El cuarto apartado está dedicado al último pilar en el que se fundamenta el marco teórico de este trabajo, la teoría APOS. En las últimas décadas, la teoría APOS, intenta establecer los requerimientos para encapsular un proceso sin fin como objeto cognitivo sobre el cual se pueden aplicar nuevas acciones. Esta teoría, según Weller et al. (2004), puede proporcionar una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes

a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran el concepto de límite infinito.

3.1. Fenomenología

La fenomenología se entiende como una disciplina filosófica, que comenzó a desarrollarse en el siglo XX.

Entre los trabajos destacados se encuentran los de Husserl, Hegel o Heidegger, en los que “se constituye una nueva dimensión paradigmática, opuesta tanto al positivismo como a toda ciencia sin sujeto. A este filósofo, Husserl, le parece absurda la pretensión de mirar al ser y eliminar la intención y la intencionalidad del observador” (Bolio, 2012, p.20).

En Educación Matemática, nuestro campo de estudio, fue Freudenthal quien dio relevancia a la noción de fenomenología, quien no interpreta el término como lo hacen los autores anteriores. En el estudio de Puig (1997) queda puesto de manifiesto, que la relación de las ideas dadas por Freudenthal y las que provenían de la tradición filosófica es muy débil.

En nuestro trabajo, cuando hablamos de fenomenología en el sentido dado por Freudenthal (1983), lo hacemos como la componente de su análisis didáctico. Freudenthal da el nombre de “fenomenología” a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre los términos *noúmeno*, *nooumenon*, y fenómeno, *phainomenon*.

Esta reflexión filosófica parte de la contraposición entre los objetos construidos en conceptos, que son denominados objetos de pensamiento y que recibirán el nombre de “noúmenos” y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan, cuando se tiene la experiencia adquirida, que serán los “fenómenos”.

Ambos términos, “noúmeno” y “fenómeno”, provienen del griego. Se interpreta el noúmeno como “lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible”, mientras que fenómeno significa “lo que aparece”.

Para Gravemeijer y Terwel (2000) las situaciones deben ser seleccionadas de forma que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que el alumnado ha tenido que construir. El objeto a considerar será el “noúmeno” que describe y analiza el “fenómeno”.

3.1.1. Análisis fenomenológico

Para Puig (1997) el análisis fenomenológico tiene dos ideas:

- La naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática.
- Los objetos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas.

En toda exposición de un concepto, Freudenthal comienza con un ejemplo y continua con la caracterización. Sin embargo, Puig, comienza con la caracterización, planteada como problemática, e intenta que el estudiante construya un objeto mental a través de lo que denomina fenomenología didáctica.

“El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir los fenómenos para los que es un medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura matemática con esos fenómenos”. (Puig, 1997, p.63)

Segovia y Rico (2001) establecen diferencias entre fenomenología, agrupación de fenómenos, y análisis fenomenológico, descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto. Estos autores resaltan que los conceptos organizan y también describen los fenómenos, y como el resto de organizadores del currículum, se aprende con la práctica.

Gómez (2007) y Gómez y Cañadas (2011, p.79) consideran que la fenomenología es un “elemento constitutivo del significado de concepto que surge de una visión funcional del currículum, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustenta el concepto”.

Adoptaremos esta posición dada, con el objetivo de promover el desarrollo del concepto de límite infinito de una sucesión y construir una herramienta eficaz con la que superar los problemas de comprensión que presentan los estudiantes cuando abordan dicho concepto.

3.1.2. Tipos de fenomenología

Freudenthal (1983) distingue cuatro tipos de análisis fenomenológico: Fenomenología, Fenomenología didáctica, Fenomenología genética y Fenomenología histórica. Todos ellos consideran el análisis del concepto utilizado.

- Fenomenología: Los fenómenos organizados en las matemáticas y tomados en el momento y uso actual.

- Fenomenología didáctica: Los conceptos son tratados como procesos cognitivos que se sitúan en el sistema educativo como material de enseñanza y aprendidos por el alumnado, y para ello hay que conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje, dando comienzo a la contraposición entre nómeno y fenómeno. Los objetos matemáticos son nómenos, pero una parte matemática puede ser experimentada como fenómeno. Por ejemplo, el concepto de límite y la definición del mismo es nómeno, pero las situaciones donde aparecen dichos límites pueden ser ejemplos de fenómenos.
- Fenomenología genética: Se reemplaza el “proceso de aprendizaje de la enseñanza” por el de “crecimiento cognitivo”. Los fenómenos son considerados desde el punto de vista del desarrollo cognitivo del alumnado.
- Fenomenología histórica: Se estudian los fenómenos organizados por un concepto y cómo esta organización se ha extendido a otros fenómenos.

Como ya sucediese con Claros (2010) y Sánchez (2012), en nuestro trabajo consideraremos la primera de las clasificaciones dada por Freudenthal. Nos vamos a ocupar de la caracterización de los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión y cómo éstos se relacionan con él. Estos fenómenos caracterizados los denominaremos de aquí en adelante como *crecimiento intuitivo ilimitado*, c-i.i., *decrecimiento intuitivo ilimitado*, d-i.i., e *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito*, i.v.s.i.

3.1.3. Objetos mentales y conceptos

Freudenthal presenta una contraposición entre los objetos mentales y los conceptos, es decir, considera cómo las personas conciben o usan las matemáticas y a las matemáticas como disciplina, saber histórico, social o cultural.

El análisis llevado a cabo para diferenciar el objeto mental del concepto es un análisis didáctico. Freudenthal indica que entre el objeto mental y el concepto que se ha creado a partir del objeto mental, se producen desajustes. Además, evita el término concepto intencionadamente, y en su lugar habla de los objetos mentales, que proceden de la adquisición de conceptos.

En un alto nivel de formalización, los objetos matemáticos pueden ser olvidados, pero en niveles menos formalizados son un vínculo genético y didácticamente indispensable.

Para Rico (1997) la fenomenología de cada uno de los conceptos debería estar en la base de los ejercicios y las actividades que se proponen. No es habitual que en los libros de texto aparezcan los diferentes tipos de fenomenología para un determinado concepto. Si se quiere presentar la pluralidad de los significados para un determinado concepto, debería considerarse la conexión entre los diferentes fenómenos que estos organizan y cómo se aplican a otros campos del conocimiento.

Además, señala que la aproximación ofrecida por la fenomenología didáctica realiza un balance de los fenómenos para los que, a partir de su expresión y dominio, se construyan los conocimientos matemáticos. Dicho análisis fenomenológico de la estructura matemática puede ofrecer orientaciones para organizar los contenidos correspondientes a la unidad didáctica que se está trabajando.

Puig (1997) sustituye el término “noumeno” por “medio de organización” para prescindir del significado otorgado por la filosofía. Define un concepto matemático como un medio de organización de un fenómeno, y pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático. Este proceso, tal y como indica el autor, se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no se encuentran fuera de la experiencia, ni tampoco en un lugar distinto al de los fenómenos que organizan.

El par fenómenos/medios de organización se define por la relación que existe entre ambos y donde al reiterar el proceso anterior, los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Para Puig, hacer fenomenología es describir una de estas series de pares a través de un proceso reiterativo o hacerlo de uno de sus pares.

3.1.4. Límite infinito de una sucesión

Puig (1997, p.94) realizando una interpretación de Freudenthal (1983) indica que:

“No hay de hecho nada en la experiencia física de las personas que se corresponda con los conceptos matemáticos de continuidad y, sobre todo, de infinito —que, por otra parte, no está claro que sea un único concepto. [...] Una didáctica de estos conceptos también ha de tener en cuenta que solo pueden constituirse buenos objetos mentales de ellos a condición de poder experimentar los fenómenos que organizan. Si el análisis fenomenológico de estos conceptos muestra estas dificultades para su adquisición, eso no quiere decir que haya que abandonarlos. En el camino hacia la adquisición del concepto, lo que una didáctica ha de hacer es organizar un campo de

experiencias que abarque el mayor número de fenómenos en cuestión y organizar la instrucción de modo que pueda constituirse un objeto mental con el cual se sea capaz de tratar con esos fenómenos.”

Freudenthal (1983) no dedica un apartado específico para el estudio de las sucesiones, pero sí lo hace para las funciones. Podemos entender que esto es fruto, al igual que ya sucediese con otros matemáticos de prestigio, como Spivak (1991, p.551), de que considera que “una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es \mathbb{N} ”.

3.2. Sistemas de representación

En los últimos 40 años se han visto incrementadas las investigaciones y publicaciones sobre la representación en matemáticas. Con ello se muestra la importancia de los sistemas de representación en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Entre los numerosos trabajos destacamos los de Janvier (1987), Goldin y Kaput (1996), Castro y Castro (1997), Rico (2000, 2009), Blázquez y Ortega (2001), Rojas, Londoño, Cañate, Abuabara y Pacheco (2009), Gómez y Pantoja (2013), Radillo y González (2014), entre otros.

Para Castro y Castro (1997, p. 96) un sistema de representación es:

“Un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto”.

Sureda y Otero (2011, p.270) señalan que para ellas un sistema de representación es:

“El conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento”.

3.2.1. Representaciones internas y representaciones externas

Tal y como indica Goldin (2003), el término representación puede interpretarse de múltiples maneras: corresponder, denotar, representar, codificar, evocar, etiquetar, significar, referir o simbolizar, entre otros. Para él es imprescindible considerar y distinguir entre los sistemas psicológicos internos que una persona realiza de una representación, de aquí en adelante representaciones internas, y los sistemas que son externos a esa persona. Esta distinción hace posible las interacciones entre los sistemas.

Nos referimos a las representaciones internas como las configuraciones mentales posibles que tiene cada individuo, como por ejemplo el alumnado. Estas representaciones no son directamente observables y por lo tanto nadie puede observar directamente las representaciones internas de otro. Para ello, se llevan a cabo inferencias basadas en la producción o interacción con representaciones externas.

Los sistemas de representación internos, según indica Goldin (2003), incluyen el lenguaje natural de los individuos, además de sus imágenes visuales, representación espacial, táctil

y cinestésica, estrategias de resolución de problemas, sus capacidades personales, incluyendo concepciones y conceptos erróneos.

El autor afirma que los conceptos matemáticos se aprenden cuando se ha podido desarrollar una variedad de representaciones internas, con relaciones apropiadas entre ellas.

Para Molina (2014) un individuo tiene una mejor comprensión de un concepto matemático cuanto mayor sea su conocimiento de las representaciones y propiedades del mismo.

Las representaciones internas nos ofrecen un marco para describir estructuras individuales del conocimiento y procesos de resolución de problemas (Goldin & Kaput, 1996).

Según Gómez y Pantoja (2013), habitualmente no recordamos o razonamos las reflexiones surgidas a partir de los objetos o conceptos, sino que necesitamos ayudarnos de las expresiones, dibujos o símbolos que las representen. Será necesario realizar una representación interna para pensar y razonar, pero para poder comunicar esas ideas se deberá realizar una representación externa.

Estos autores señalan que las representaciones externas son las accesibles a la observación: las palabras, las imágenes, los gráficos, las ecuaciones, etc. y señalan también que son muy importantes las interacciones bidireccionales entre las representaciones internas y las externas.

Goldin (2003) define los sistemas de representación externa como aquellos que incluyen lenguajes normativos, en nuestro caso el español, sistemas convencionales de notación como gráficos, diagramáticos y formales en matemáticas, entornos de aprendizaje que incluyen materiales manipulables concretos o lenguajes de ordenador.

El autor indica que en algunos casos será más valioso considerar la representación interna como representación de lo externo, como por ejemplo un alumno forma una imagen mental de una relación matemática descrita por el profesor. En otros casos, se considera lo externo como representación de lo interno, como por ejemplo un alumno escribe una fórmula, dibuja un diagrama o busca comunicar en palabras sus ideas. Con esto, vemos de nuevo la interacción bidireccional entre ambas representaciones (interna y externa), que también señalaban Gómez y Pantoja (2013).

Goldin (2003) describe el desarrollo de los sistemas de representación presentes en el alumnado a través de varias etapas:

- Una primera etapa inventiva, en la que las configuraciones internas se asignan por primera vez con representaciones ya establecidas. Esto mismo también fue señalado por Piaget (1969).
- Posteriormente se da paso a un periodo de desarrollo estructural, que es impulsado por los significados establecidos en la primera etapa, y donde las relaciones dentro del sistema de representación se construyen sobre una plantilla de lo realizado anteriormente.
- Finalmente, se llega a un estadio automático, donde el sistema de representación se separa de lo anteriormente establecido y funciona con flexibilidad ante nuevos significados y contextos.

Estas tres etapas pueden relacionarse con el desarrollo histórico de las ideas matemáticas.

Goldin y Kaput (1996) utilizan el término representación externa para referirse a configuraciones observables físicamente. Estas son, en principio, accesibles a la observación por cualquier persona con los conocimientos matemáticos adecuados. La interpretación que se le asigne a estas representaciones, las externas, como pertenecientes a sistemas estructurados no es objetiva, ya que depende de las representaciones internas que los individuos hagan de la interpretación. La interacción entre los sistemas de representación internos y externos proporcionan medios para poder realizar inferencias sobre los estudiantes y poder describir el aprendizaje y el desarrollo de un concepto en estos, como consecuencia del entorno de aprendizaje.

3.2.2. Sistemas de representación

En nuestro estudio, cuando hablamos de sistemas de representación tomamos en consideración las representaciones externas.

Castro, Rico y Romero (1997) indican que los sistemas de representación son formas de expresar y simbolizar algunas estructuras numéricas. Estos autores afirman que un sistema de representación debe cumplir lo siguiente:

- Organiza los símbolos presentes en los conceptos matemáticos
- La utilización de distintos sistemas de representación aporta diferentes significados a un mismo concepto.

- Un mismo concepto admite y necesita diferentes sistemas de representación.

Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2014) referenciando al manual “Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012”, señalan que la capacidad matemática de representar es una de las componentes matemáticas que se espera que alcancen los escolares cuando finalicen su etapa de escolaridad secundaria, donde se debe interpretar y traducir entre las diferentes representaciones (gráficos, tablas, diagramas, ecuaciones y fórmulas). Esta capacidad se debe desarrollar paralelamente a la utilización de operaciones, lenguaje simbólico, formal y técnico.

Goldin y Kaput (1996) consideran que utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones es necesario desde el comienzo de la enseñanza para evitar una visión sesgada de los conceptos.

Esta misma idea, la de considerar distintos sistemas de representación, la encontramos en los estudios de Parnafes y Disessa (2004, p.252):

“Cada representación enfatiza o desestima varios aspectos de un concepto y, por lo tanto, usando todas las representaciones, los estudiantes deben obtener una comprensión más completa y más flexible del concepto”.

Cada representación va a estar asociada a información específica. Además, es posible utilizar de dos formas distintas los diferentes sistemas de representación:

- La utilización de los sistemas de representación para obtener una mayor comprensión de un mismo concepto.
- La utilización de un sistema de representación para promover procesos cognitivos como son la abstracción y la generalización.

En Duval (1998) podemos encontrar que para comprender un concepto es necesario la coordinación entre diferentes sistemas de representación, ya que uno solo no permite la comprensión total de concepto, pero la conversión entre sistemas de representación no es espontánea, salvo que sean equivalentes entre el registro de comienzo y el de final.

Goldin y Kaput (1996) consideran que la profundización de ciertas nociones matemáticas está íntimamente relacionada con el tipo de representación que movilizan y son estas, las representaciones, las que permiten referirse a los conceptos matemáticos de forma sistemática y precisa.

Blázquez y Ortega (2001) utilizaron las actividades asociadas a los sistemas de representación descritas por Romero (2000) para la comprensión del concepto de límite. Son las siguientes:

- La formación de representaciones identificables en un sistema dado: Se debe seleccionar los rasgos y los datos en el contenido a representar, y es necesario asegurar la identificación y el reconocimiento, respetando unas reglas.
- Transformación dentro de un sistema de representación: Es necesario considerar las transformaciones de unas representaciones a otras. Por ejemplo, en el sistema de representación algebraico de un límite se incluyen reglas para pasar de una definición topológica a una definición métrica.
- Traducción entre sistemas de representación: Dado que existen diferentes sistemas de representación vinculados a un mismo concepto, resulta imprescindible la traducción de un sistema a otro. En el caso particular del límite, consideraremos los siguientes sistemas de representación, tomados por Janvier (1987): verbal, tabular, gráfico y simbólico.
- Cristalización: Formación de relaciones entre los objetos de la estructura conceptual, después de haber realizado la traducción entre todos los sistemas de representación.
- Modelización: Utilizar la estructura conceptual para modelizar determinadas situaciones.

Históricamente, la creación de sistemas de representación que fuesen eficientes para la comprensión del concepto ha sido un tema muy importante, permitiendo enseñar a los estudiantes a utilizar estos sistemas en las matemáticas escolares (Goldin, 2003).

En esta tesis doctoral se trabajará con estudiantes del Máster de Formación del Profesorado y libros de texto de Bachillerato, donde el límite infinito de sucesiones está presente. En este nivel, el discurso intuitivo cobra mayor relevancia, y por ello la explicación y desarrollo de un concepto es más práctica que teórica. En contraposición, a nivel universitario, su presentación se realiza de forma teórica y formal (Enríquez & Pallés, 2007).

3.2.3. Sistemas de representación del límite

Medina (2001) indica que la enseñanza de la noción de límite prioriza la representación numérica sobre todas las demás, para posteriormente continuar con representaciones gráficas (incluidas dentro del sistema de representación analítico según este autor), aunque de forma limitada. El propio autor no lo considera un soporte para la comprensión del concepto, ya que los estudiantes aplican algoritmos sin comprender realmente cuál es su significado.

Medina (2001) considera tres tipos de representación del límite: analítico, algebraico y aritmético. Para cada uno de ellos, Medina establece las siguientes categorías:

- Sistema de representación analítico. Considera las representaciones sobre las que se construye el concepto de límite, entre las que se encuentran las representaciones numérico-tabular, gráfico-cartesiano, simbólico-específico, verbal y definición formal.
- Sistema de representación algebraico. Aquellas representaciones que utilizan una notación y simbolismo algebraico. Medina distingue las siguientes: algebraico-indeterminado, presente donde se aplican factorizaciones, racionalizaciones, conjugaciones y simplificaciones para eliminar posibles indeterminaciones, y algebraico-simple, en la que se simplifica la expresión, pero no con el propósito de eliminar una indeterminación.
- Sistema de representación aritmético. Considera las representaciones en las que el papel más importante son los números y la aplicación de operaciones. El autor encuentra ejemplos en los libros de texto de los límites de sucesiones, y por ello establece las siguientes categorías: numérico-tabular, simbólico-específico, verbal, utilización de la recta real, utilización del eje cartesiano y definición formal de sucesión.

En nuestro caso, consideraremos los sistemas de representación aritmético, que como Medina (2001) mencionaba es encontrado en los límites de sucesiones, aunque realizaremos ligeras modificaciones en su clasificación.

Aunque Medina (2001) establece como categorías de clasificación los sistemas de representación analítico, algebraico y aritmético, como acabamos de señalar, Blázquez y Ortega (2001) consideran para el concepto de límite los siguientes sistemas de representación: verbal, gráfico, simbólico y numérico. En nuestro caso, el sistema de

representación numérico lo denominaremos tabular, por ser un término más utilizado en la actualidad y el presente en los libros de texto. Esta misma clasificación ya había sido considerada por Janvier (1987), para la representación de variables, y posteriormente utilizada en las tesis doctorales de Claros (2010) y Sánchez (2012) para el límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto respectivamente. Además, será la utilizada en nuestro estudio.

A continuación, presentamos un ejemplo, para cada sistema de representación, encontrado en libros de texto de cómo el límite infinito de una sucesión se sucede.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	\rightarrow	$+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	\rightarrow	$+\infty$

Figura 3.1. Sistema de representación tabular de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.160).

Una sucesión de números reales a_n tiene por límite $+\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n > K$.

Se escribe: $\lim a_n = +\infty$

Figura 3.2. Sistema de representación verbal de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.161).

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Por tanto,

$$n^2 + 1 > K \text{ para todo } n > 10\,000$$

Figura 3.3. Sistema de representación simbólico de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p.160).

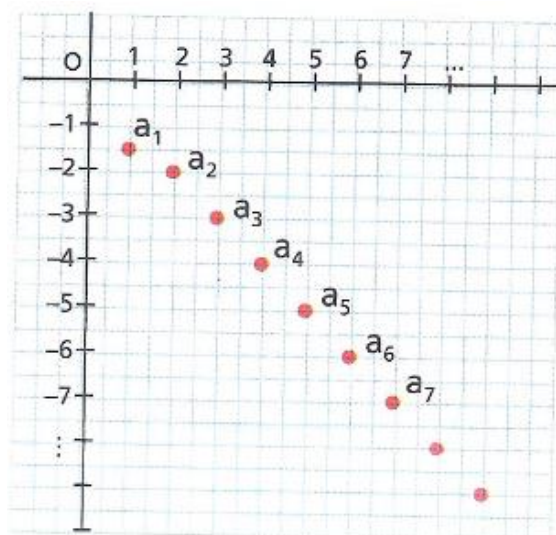


Figura 3.4. Sistema de representación gráfico de límite infinito de una sucesión (Vizmanos & Anzola, 1996, p. 161).

Dreyfus (1991) en su estudio de procesos involucrados en la representación indica que, aunque es importante tener muchas representaciones de un mismo concepto, esto no es suficiente para aceptar un uso flexible del concepto en la resolución de problemas. Solo si las diferentes representaciones están correctamente y fuertemente vinculadas entre sí se podrá gestionar con éxito la información para resolver un problema. Se necesitará el cambio de una representación a otra siempre y cuando la otra sea más eficiente para el siguiente paso que se quiera tomar.

Cada representación enfatiza más algunos rasgos del objeto matemático a estudiar, por ejemplo, para comprender el límite infinito de sucesiones, las representaciones gráficas no son suficientes, y tampoco con el apoyo de un ordenador es posible detallar su comportamiento, por ello es necesario la utilización de una representación tabular (Radillo & González, 2014).

Según Gómez y Carulla (1998) los estudiantes deben tener la necesidad de analizar las propiedades de los conceptos de forma gráfica sin que la interpretación y la modificación desde la representación simbólica supongan una dificultad.

Algunas de las dificultades que encuentra el alumnado en la representación gráfica de funciones las señalaron Arce y Ortega (2013). Ellos en su investigación establecen la siguiente clasificación de dificultades: relacionadas con el concepto de función, relacionadas con el concepto de asíntota, relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos y relacionadas con las características de las funciones. Algunas de

estas dificultades o deficiencias podrían ser encontradas no solo en las funciones, sino que sería extensible también a las sucesiones.

3.3. Pensamiento Matemático Avanzado

Desde la década de los ochenta la comunidad matemática, y en particular el área de didáctica de las matemáticas se ha preocupado por cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, es decir, por el pensamiento matemático.

Según Cantoral et al. (2000) el desarrollo del pensamiento matemático puede entenderse como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. En contraposición con esta visión, consideran que el pensamiento se desarrolla en todos los seres humanos en su vida cotidiana, en múltiples tareas que incluye el pensamiento sobre tópicos matemáticos y también procesos avanzados del pensamiento, como son la abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento basado en la justificación de las hipótesis propuestas.

3.3.1. Pensamiento Matemático Elemental vs Pensamiento Matemático Avanzado

En este estudio, nos ocuparemos del Pensamiento Matemático Avanzado. En primer lugar, estableceremos las diferencias entre éste y el Pensamiento Matemático Elemental.

El Pensamiento Matemático Elemental, a partir de ahora PME, se caracteriza por unas unidades didácticas de poca duración y en las que no se diferencian la parte teórica de la parte práctica. Las estrategias utilizadas en el aula están basadas en la resolución de problemas, aunque con una tendencia a tareas rutinarias y usando definiciones únicamente para la descripción de objetos ya conocidos. Los elementos didácticos utilizados son los libros de texto, fichas de trabajo u otros materiales proporcionados por el profesor, y el rol de éste es el de responsable del aprendizaje del alumno, mientras el alumno hace lo que el/la profesor le indica en cada momento. La evaluación se realiza a base de exámenes o pruebas parciales, en las que se pide reproducir lo realizado en clase (Calvo, 2001).

Por otro lado, el Pensamiento Matemático Avanzado, PMA, presenta mucha información en poco tiempo en la estructura de las situaciones didácticas; los espacios dedicados a la teoría y a la práctica se presentan diferenciados y en ocasiones con profesores diferentes. En esa misma línea las estrategias más habituales utilizadas en el aula se basan en exposiciones magistrales, que usan definiciones, teoremas y aplicaciones de estos. La demostración formal sustituye a la explicación como método de validación y las definiciones ya no describen solo objetos conocidos. Además, en el PME suelen realizarse

ejercicios y en el PMA suelen realizarse problemas que implican el uso de elementos propios de este, evitando de esta manera la realización de tareas rutinarias. Como instrumento didáctico se sugieren los libros de texto, aunque el profesor no los siga estrictamente, y el alumno los completará con su propio material. El profesor guía en la parte del proceso de estudio, mientras los alumnos son los responsables de su aprendizaje, debiendo ser capaces de comunicar adecuadamente esos conocimientos. La evaluación se realiza a base de exámenes en los que se suele pedir la resolución de problemas poco rutinarios y donde la teoría, que ocupa la mayor parte de la clase, no tiene una presencia equivalente en los mismos (Calvo, 2001).

Garbín (2005, 2015) señala que entre el PME y el PMA debe suceder una etapa de transición, que en un comienzo debe ayudar a traspasar el aprendizaje del profesorado al alumnado, incrementando la frecuencia y la relevancia de la demostración y la definición. Además, debe favorecer los cambios del alumnado sobre la manera de realizar sus tareas rutinarias y el cómo trata la información y realiza los procesos matemáticos, tendiendo a una utilización más frecuente de demostración para expresar afirmaciones. Este cambio se produce en el alumnado entre los 15 y 20 años.

Para Dreyfus (1991) no existe una distinción clara entre muchos de los procesos de PME y PMA, aunque considera que el PMA se centra más en la abstracción de las definiciones y la deducción.

3.3.2. Abstracción, generalización y síntesis

Los procesos que intervienen en la resolución de cuestiones en los que están involucrados conceptos matemáticos propios de Pensamiento Matemático Avanzado son la representación, la traslación y la abstracción entre otros (Garbín, 2015).

Para Dreyfus (1991) es importante tener muchas representaciones de un concepto, pero no es suficiente esto para permitir un uso flexible del concepto en la resolución de problemas. Se necesita la posibilidad de cambiar de una representación a otra, siempre y cuando esta última representación sea más eficiente para dar un paso en el procedimiento que se desea tomar. La traslación se interpreta como un proceso ligado a las representaciones. Pasa de una formulación de un enunciado o problema matemático a otro.

El tercer proceso, la abstracción, es considerado el más importante del PMA. Si un estudiante desarrolla la capacidad de hacer abstracciones conscientemente de diferentes

situaciones matemáticas, entonces habrá logrado un nivel avanzado de pensamiento matemático.

La generalización y la sintetización constituyen una fase previa a la abstracción. Se entienden estos conceptos de la siguiente forma:

- Generalizar: Derivar o inducir de lo particular, identificar los puntos comunes, y expandir los dominios de validez. Debe esperarse que los estudiantes tengan dificultades con estas generalizaciones. Su diferencia principal con la abstracción radica en que generalmente implica una expansión de la estructura del conocimiento del individuo, mientras que la abstracción es probable que implique una reconstrucción mental.
- Sintetizar: Combinar o componer partes de tal manera que formen un todo, una entidad. Se trata de ver no solo el nivel de aclaración que está involucrado en el aprendizaje, tanto en conceptos como en operaciones simples, sino cuánto trabajo detallado con estos conceptos y operaciones es necesario para poder empezar a sintetizar.

La naturaleza del proceso mental de la abstracción es muy diferente al de la generalización y al de la síntesis. La abstracción es un proceso constructivo: la construcción de estructuras mentales a partir de estructuras matemáticas, es decir, a partir de propiedades y relaciones entre objetos matemáticos. Requiere la capacidad de desplazar la atención, de los objetos a la estructura de sus propiedades y relaciones. Esta actividad mental constructiva, por parte de un estudiante, depende en gran medida de que la atención del estudiante se centre en aquellas estructuras que formarán parte del concepto abstracto y se alejarán de aquellas que son irrelevantes en el contexto deseado.

3.3.3. Procesos cognitivos

Tall (1991) y Dreyfus (1991) elaboraron una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del Pensamiento Matemático Avanzado.

Según Dreyfus (1991, p.25), el proceso del Pensamiento Matemático Avanzado que describe lo que tiene lugar en la mente del estudiante es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”.

Cuando Azcárate (1998) se refiere a estos procesos cognitivos implicados en el PMA piensa en procesos matemáticos entre los que destaca el de abstracción, que se puede definir como la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana. La abstracción no es característica de las matemáticas superiores, pero tampoco lo son otros procesos cognitivos como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar y formalizar. A pesar de ello tenemos que señalar que todos estos adquieren una mayor importancia cuando avanzamos a cursos superiores, apareciendo frecuentemente en el PMA.

Muchos conceptos que podemos encontrar en las matemáticas, y en particular en el PMA, han sido encontrados antes de ser definidos formalmente, existiendo una estructura cognitiva compleja en la mente de cada individuo que produce una variedad de imágenes mentales cuando se evoca un concepto. De aquí surge la necesidad de distinguir entre los conceptos que han sido definidos formalmente y los procesos cognitivos que los concibieron.

Concepto imagen y Concepto definición

Para comprender cómo se producen los procesos cognitivos citados anteriormente, tanto de forma exitosa como de forma errónea, Tall y Vinner (1981) formularon una distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos por los que son concebidos. Muchos conceptos usados habitualmente no están formalmente definidos, pero se aprende a reconocerlos a través de la experiencia y su uso en contextos apropiados. Estos conceptos pueden refinarse en su significado e interpretarse con o sin una definición precisa. Para tratar de categorizar estos conceptos introdujeron la distinción entre concepto imagen, *concept image*, y concepto definición, *concept definition*, para límites y continuidad.

Estos autores utilizan el término concepto imagen para describir la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados. Todos los atributos mentales asociados a un concepto deben ser incluidos en el concepto imagen, sin que lleguen a ser coherentes en todo momento. De hecho, pueden activarse diferentes partes del concepto imagen a partir de distintos estímulos produciéndose como consecuencia de ello, alguna incoherencia en la aplicación del mismo.

El concepto definición, lo definen como un conjunto de palabras usadas para especificar el concepto. Las definiciones formales son establecidas y aceptadas por la comunidad matemática en un momento dado y suelen encontrarse en libros de texto o manuales.

Según Vinner (1991), el concepto imagen puede ser una representación visual del concepto. También puede ser una colección de impresiones o de experiencias, que pueden traducirse en formas verbales, pero que quizás no sean lo primero en ser evocado en la memoria del individuo. Solo es posible hablar de un concepto imagen en relación con un individuo específico. Este individuo podría reaccionar de forma diferente a un determinado nombre del concepto, si este se produce en diferentes situaciones.

Además del proceso de formación del concepto, también existen los procesos de resolución de problemas o de rendimiento de tareas. Cuando se plantea una tarea cognitiva a un estudiante, se supone que el concepto imagen y el concepto definición del concepto se activan. Vinner (1991) considera que muchos profesores de secundaria y universidad esperan que los procesos mentales involucrados en una determinada tarea intelectual sean esquemáticamente expresados de la siguiente forma: (las flechas de las figuras representan las diferentes maneras en las que un sistema cognitivo podría funcionar).

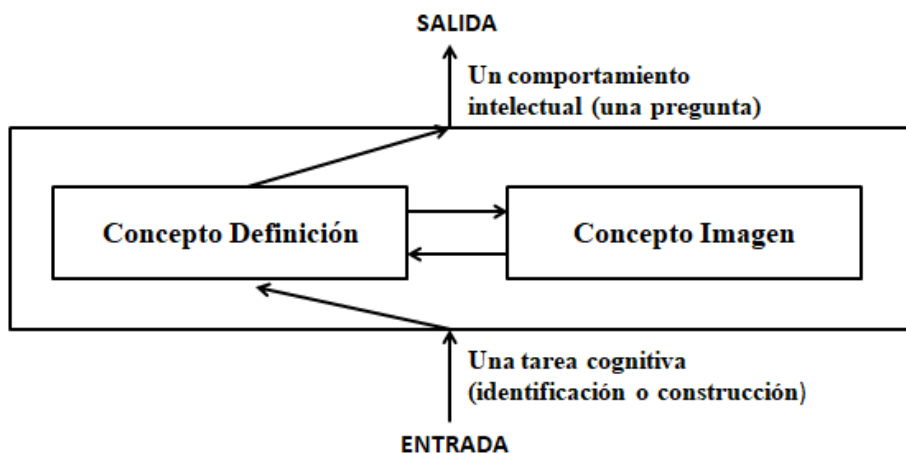


Figura 3.5. Relación entre Concepto Definición y Concepto Imagen. Traducida de Vinner (1991)

Siguiendo los estudios de Robert y Schwarzenberger (1991) encontramos que durante la educación secundaria los estudiantes parece que desarrollan algunos métodos de aproximación a la resolución de problemas que son relativamente estables pero que pueden resultar poco útiles para una gama más amplia de aplicaciones. Estos autores señalan diferentes ejemplos para su comprensión: en geometría, algunos estudiantes nunca utilizan vectores y siempre emplean métodos analíticos, en análisis, algunos estudiantes hacen uso sistemático del enfoque gráfico para resolver problemas, algunos confían en el simbolismo formal y otros en métodos numéricos. Por otro lado, otros estudiantes intentan sistemáticamente usar algoritmos para resolver problemas incluso cuando son inapropiados para el problema en cuestión.

Los autores consideraron estos métodos poco útiles por ser un comportamiento sistemático, cuando realmente el objetivo buscado es que el estudiante sea capaz de ser versátil, de poder cambiar su enfoque y adaptarse a la tarea particular.

Imagen demostración y Demostración formal

Para la construcción del conocimiento y la justificación en un caso específico del mismo, surge la noción de imagen demostración en los estudios de Kidron y Dreyfus (2014).

Para Claros et al. (2016a) una imagen demostración se dará cuando un alumno o un profesor estén convencidos de que una afirmación es verdadera y además se tengan los conocimientos matemáticos para iniciar la demostración de esta afirmación, aunque todavía no la hayan hecho. En su estudio se ocuparon del límite finito de una sucesión. Este término, la imagen demostración, así como los de concepto imagen y concepto

definición, los consideraron elementos claves en la construcción del límite finito de una sucesión, aunque su grado de generalidad fuese diferente.

La noción de imagen demostración mezcla las construcciones previas y los enlaces lógicos, que pueden ser intuitivos.

Kidron y Dreyfus (2014) están interesados en las representaciones intuitivas, el razonamiento formal y la interacción entre las componentes formal e intuitiva de un concepto. A través del pensamiento intuitivo de un alumno, sus intuiciones visuales y sus descripciones verbales, en lugar de partir de las matemáticas formales, estos autores dan una base teórica a la nueva noción a la que llaman imagen demostración y que surge al comprobar procesos en matemáticas avanzadas. La noción de imagen demostración se adapta bien a la mezcla de construcciones previas seleccionadas y enlaces lógicos, los cuales pueden ser intuitivos. Permite además analizar la interacción entre el pensamiento intuitivo y lógico del estudiante.

Weber y Alcock (2009) describen que, para la construcción semántica de una demostración, el alumno debe primero entender semánticamente la afirmación que se debe probar, para a continuación vincular aspectos del enunciado de la demostración a configuraciones que están en otro sistema de representación. Después el alumno debe construir una explicación informal. En una etapa posterior, la explicación informal se deberá expresar formalmente dentro del sistema de representación de la demostración matemática. Así, la construcción semántica de la demostración se vincula mucho más directamente a la intuición que a la construcción sintáctica de ésta, que se caracteriza por un sistema formal. Estos autores señalan que en la construcción de la demostración pueden aparecer dos problemas:

- Un ejemplo o una imagen pueden proporcionar propiedades que no son generalmente ciertas y pueden probar un resultado falso.
- Se puede desarrollar una comprensión matemática correcta, pero ser incapaz de demostrarla formalmente.

Kidron y Dreyfus (2014) sugieren una comparación entre el concepto imagen/concepto definición y la imagen demostración/demostración formal donde señalan las siguientes similitudes y diferencias:

Similitudes:

- Un concepto imagen y una imagen demostración son más personales y menos objetivas que el concepto definición y la demostración formal.
- No todo concepto imagen tiene el potencial de conducir a un concepto definición y no toda imagen demostración tiene el potencial de conducir a una demostración formal.
- El concepto imagen puede contener componentes que estén en conflicto con la definición formal del concepto. Estos autores piensan que esto también podría ocurrir en algunos casos en los que la imagen demostración no conduce a una demostración formal, aunque no han encontrado un ejemplo para ello.
- La imagen demostración y el concepto imagen son similares en el sentido de que, para ambos, se necesita una transición a la definición del concepto y a la demostración formal. Dicha transición vendrá precedida por una madurez matemática mayor.
- Existe un paralelismo entre la construcción de una imagen demostración y la de un concepto imagen, ya que ambos son procesos de construcción que parten de inicio, de un proceso y conducen a una forma más elaborada y más precisa del mismo.

Diferencias:

- Una imagen demostración normalmente contiene algunos enlaces lógicos, mientras que un concepto imagen puede estar libre de aspectos lógicos. Incluso si la imagen demostración no incluye una representación formal de los enlaces lógicos, incluye algunos hilos intuitivos que enlazan las construcciones previas seleccionadas.
- Para cada individuo, un concepto definición genera su propio concepto imagen. Tall y Vinner (1981) lo llaman “imagen definición de un concepto” y lo consideran una parte del concepto imagen. Para la imagen demostración, existe la noción paralela de “imagen demostración formal”, es decir, la imagen mental que se forma cuando se intenta entender una demostración presentada, pero Kidron y Dreyfus (2014) limitan este término a la estructura cognitiva total generada cuando el alumnado espera construir una demostración por ellos mismos.
- Tall y Vinner (1981) señalan que los conceptos imágenes se construyen a lo largo de los años a través de experiencias, y pueden ir cambiando a medida que el

alumno encuentra nuevos estímulos (a menudo inconscientemente). En la imagen demostración, Kidron y Dreyfus (2014) indican que es el alumno conscientemente quien toma la iniciativa del proceso, seleccionando los conceptos más relevantes. El proceso está personificado desde el principio y puede ser difícil de comunicar.

- Una aproximación gradual del concepto imagen al concepto definición que desarrolla un estudiante, provoca en ocasiones un conflicto con la definición formal del concepto. En la imagen demostración, no hay conflicto, pero ésta invita a la necesidad de un razonamiento más formal.
- Puede haber una construcción de nuevos conocimientos en una aproximación gradual del concepto imagen al concepto definición. También en la transición de la imagen demostración a la demostración formal. Sin embargo, el concepto imagen no invita a la construcción de nuevos conocimientos y la imagen demostración sí. Tall y Vinner (1981) indican que los estudiantes utilizan muchos conceptos sin tener clara su definición. En el proceso de crear una imagen demostración, el alumno puede ser consciente de tener que reforzar algún conocimiento previo empleando como consecuencia de ello un razonamiento más formal. Este camino llevado a cabo es una transición a la demostración formal. Esta diferencia con el concepto imagen está relacionada con la madurez adquirida por el alumnado.

3.3.4. Límite infinito de una sucesión

Tall y Schwarzenberger (1978, p.48), realizaron la siguiente afirmación sobre una definición verbal del límite finito de una sucesión: “ $s_n \rightarrow s$, podemos hacer s_n lo más cercano a s como queramos, siempre que tomemos n suficientemente grande induce en muchos individuos la noción de que s_n no puede ser igual a s ”. Esta noción es parte del concepto imagen del límite finito de una sucesión, pero no es reconocida por los matemáticos como parte de la teoría formal. Habitualmente las sucesiones se introducen sin definición formal. Suelen presentarse al alumnado a través de definiciones inductivas, pruebas por inducción y varios pasos intermedios (como pueden ser ejemplos) antes de definir la noción de función. Después, la sucesión puede ser recordada e reinterpretada como parte del concepto de una función.

Puesto que nuestra investigación se centra en el límite infinito de una sucesión y teniendo en cuenta los fenómenos intuitivos ilimitados y retroalimentación que presentaremos en el próximo capítulo, estableceremos relaciones entre estos fenómenos y los elementos del

pensamiento matemático elemental y avanzado. Esto ya fue realizado por Claros (2010) y Claros et al. (2016a) para el caso del límite finito de una sucesión.

3.4. Teoría APOS

El último pilar en el que se fundamenta el marco teórico de esta tesis doctoral es la teoría APOS que permitirá explicar cómo el alumnado construye mentalmente la comprensión de los conceptos matemáticos.

La teoría APOS surge a partir de las ideas de Piaget (1971) basadas en el proceso de Abstracción Reflexiva que describe el pensamiento lógico de los niños y se extiende a nociones más avanzadas de las matemáticas con las investigaciones de Dubinsky (1991).

A mediados de la década de 1980, Dubinsky y sus colaboradores, miembros del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), comienzan a describir las estructuras y los mecanismos mentales con los que un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. Desde este punto de vista el conocimiento matemático es descrito por estructuras generadas por los mecanismos mentales que desarrolla cada individuo.

Esta teoría intenta establecer los requerimientos para encapsular un proceso sin fin como objeto cognitivo sobre el cual se pueden aplicar nuevas acciones. Según Weller et al. (2004) puede proporcionarse una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran a la noción de límite infinito.

3.4.1. Elementos de la teoría APOS

En la teoría APOS la comprensión de un concepto matemático se consigue con la reflexión que realiza un individuo sobre problemas matemáticos y la solución dada en un determinado contexto social, a través de la construcción y reconstrucción de ciertas estructuras mentales y su organización en esquemas (Dubinsky, 2014).

APOS se compone de las siguientes estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Además, necesita de diferentes mecanismos, como son la interiorización, la encapsulación, la coordinación, la inversión, el desencapsulado, la tematización y la generalización. Dubinsky describió cómo pasar de una estructura mental a otra a través de cada uno de los mecanismos señalados anteriormente.

La interiorización permite un cambio mental, permitiendo al individuo ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones (Dubinsky, 1991).

Según Dubinsky et al. (2005), si el individuo comprende el proceso totalmente y se da cuenta de las posibles transformaciones y puede construirlas, entonces se da una encapsulación.

Cuando un proceso haya sido encapsulado en un objeto mental, podrá aplicarse una desencapsulación para volver al proceso de origen. Dos objetos se pueden desencapsular, sus procesos coordinarse y el proceso coordinado encapsularse de nuevo en un objeto. Además, todo proceso puede revertirse (Arnon et al., 2014).

Estos autores señalan que la tematización es el mecanismo que permite aplicar transformaciones a la estructura que contiene las descripciones la organización y las ejemplificaciones de las estructuras mentales construidas sobre un concepto matemático.

Asimismo, indican que reconstruir y modificar una estructura mental para afrontar una situación constituye la idea de generalización.

Un concepto se concibe como una transformación dirigida externamente de un objeto u objetos que han sido concebidos previamente, esto es lo que denominaremos *acción*. Diremos que una acción es externa porque cada uno de los pasos de la transformación necesita ser realizado explícitamente y guiado a través de instrucciones externas. Las nuevas acciones nos llevarán al desarrollo de estructuras de orden superior.

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso (Asiala et al., 1996).

Los *procesos* se construyen utilizando la interiorización o la coordinación, ambos mecanismos mentales. Dubinsky et al (2005) describe e interpreta esta estructura mental como:

“Un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que la acción interiorizada, pero totalmente en la mente del individuo, permitiéndole imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente”.

Una acción y un proceso pueden dar como resultado la misma transformación, pero la acción debe realizar realmente la transformación y el proceso puede llevar a cabo la transformación, pero sin necesidad de pasar por cada uno de los pasos.

Si el individuo toma el proceso como una totalidad, podrá observar que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y logrará realmente construir esas

transformaciones (explícitamente o en la imaginación). En ese momento, el individuo ha encapsulado el proceso en un *objeto* cognitivo. Entendemos que una encapsulación tiene lugar cuando un individuo ve una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática a la que se pueden aplicar acciones.

Según Clark, Kraut, Mathews y Wimbish (2007) el mecanismo de encapsulación es el más difícil.

El proceso que ya ha sido encapsulado en un objeto puede ser desencapsulado, siempre y cuando sea necesario. El mecanismo de coordinación es imprescindible en la construcción de algunos objetos. Dos objetos pueden ser desencapsulados, sus procesos coordinados y el proceso coordinado encapsulado para formar un nuevo objeto.

Mientras el individuo desarrolla su comprensión de un aspecto matemático, construye distintas acciones, procesos y objetos que se van organizando y relacionando poco a poco en un *esquema*. Mientras se organiza el esquema, va evolucionando hasta conseguir ser coherente y que el individuo decida si puede usarlo o no en una situación matemática concreta (Trigueros & Martínez-Planell, 2015).

Un esquema es dinámico y su reconstrucción continua está determinada por la actividad matemática que el individuo realiza en situaciones matemáticas específicas.

El individuo puede ser capaz de relacionar las acciones, los procesos y los objetos y comenzar a construir un esquema, pero estas relaciones pueden ser débiles o fuertes, lo que nos permitirá observar los distintos niveles de evolución del mismo (Kú, Trigueros & Oktaç, 2008).

Cuando un esquema se construye como una relación coherente de estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y otros esquemas, y además conexiones entre esas estructuras, puede transformarse en un objeto o utilizarse como una estructura dinámica que asimile otros objetos o esquemas relacionados. Los esquemas contienen las descripciones, la organización y las ejemplificaciones de las estructuras mentales que un individuo ha de construir de un concepto matemático (Dubinsky, 1991).

Resumiendo lo anterior podemos decir que las Acciones se interiorizan en Procesos y luego éstos se encapsulan en Objetos a los que se les pueden aplicar nuevas Acciones, y los Objetos se desencapsulan de nuevo en Procesos. Todo el sistema forma parte de un Esquema. Esta cadena de desarrollo no siempre se dirige en la misma dirección, debido a

que un individuo puede moverse hacia adelante o hacia atrás entre las diferentes etapas (Arnon et al., 2014).

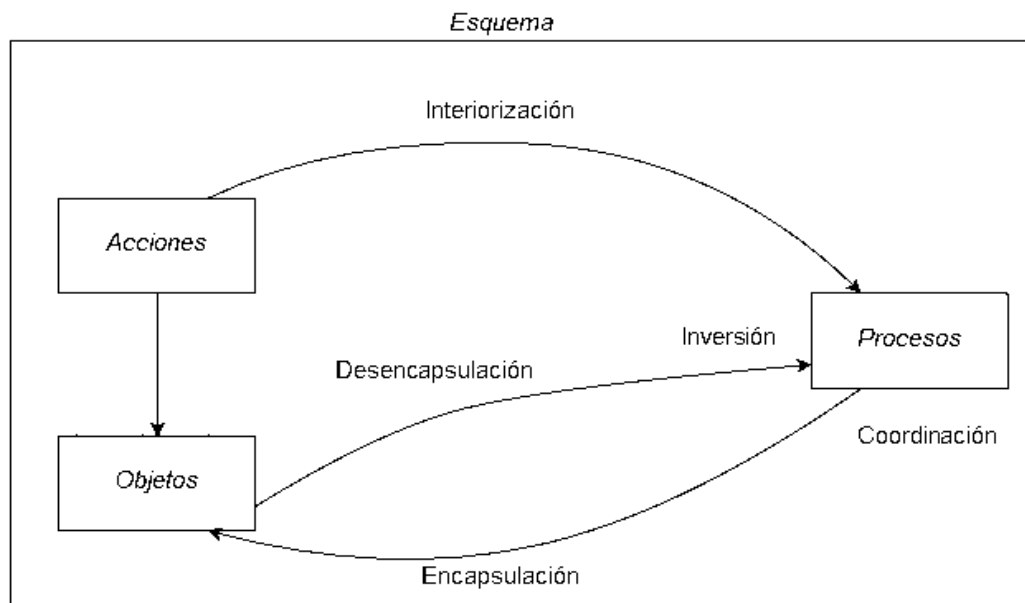


Figura 3.6. Estructuras mentales y mecanismos de la teoría APOS. Traducción de Arnon et al. (2014).

3.4.2. Descomposición genética

El análisis de la teoría APOS pretende determinar un modelo de construcción de un concepto o noción matemática. A este análisis lo denominaremos *descomposición genética*, que determina las estructuras y mecanismos mentales que sigue un individuo para construir el concepto de una forma exitosa.

Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un individuo podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. Una descomposición genética comienza siendo una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores, su conocimiento de la teoría APOS y su conocimiento matemático. Hasta que no se pruebe experimentalmente se denominará descomposición genética preliminar. Además, explica lo que se sabe acerca de los resultados esperados de los estudiantes indicando las diferencias entre unos y otros (Arnon et al., 2014).

Según Badillo (2003), la descomposición genética es el eje de la aplicación de la teoría APOS en los estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos ya que permite estructurar el concepto matemático, orientar sobre la organización del contenido a enseñar

y realizar el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los individuos desarrollen.

Su importancia reside en que predice las construcciones mentales deducidas de un análisis de datos recogidos en diseños experimentales (Dubinsky, 1991).

Villabona y Roa-Fuentes (2016) resaltan dos características importantes de este modelo:

- No es única. Dado que la construcción del conocimiento está asociada con la experiencia, una descomposición genética puede tener diferentes puntos de inicio y desarrollos.
- Debe ser validada con el trabajo de diferentes individuos. La descomposición genética tiene mayor exactitud cuantas más veces siga la guía de diseño de modelos de clase o de situaciones, donde se pone en juego el modelo propuesto.

La teoría APOS plantea un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: el *análisis teórico*, el *diseño y aplicación de enseñanza* y el *análisis y verificación de datos*.

Una vez establecida una descomposición genética preliminar, el ciclo de investigación propone el diseño de un modelo de enseñanza que siga el camino cognitivo descrito, así los individuos pueden construir el concepto sobre los principales elementos descritos en el análisis teórico. Los resultados deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar y detectar aquellos elementos que no se han considerado para ver qué construcciones no se perciben, hipotéticamente (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

Aplicar este ciclo permite obtener una descripción detallada y próxima a la construcción de un concepto matemático. Cada vez que aplicamos este ciclo, en el que utilizamos la descomposición genética de un concepto, podremos refinarlo como resultado del análisis sobre los datos empíricos obtenidos.

Roa-Fuentes y Oktaç (2010) consideran para el análisis teórico el estudio de libros de texto, la experiencia de los investigadores que llevan a cabo el estudio y los resultados previos obtenidos. Con él se establecerá la base de los resultados que se obtendrán en la aplicación total del ciclo. A través de la descripción de las construcciones mentales se puede modelar la epistemología y la cognición del concepto matemático estudiado.

El objetivo principal de este análisis consiste en diseñar una descomposición genética del concepto a través del apoyo de un camino viable, en términos de construcciones y

mecanismos mentales, que un estudiante pueda seguir para construir el concepto exitosamente.

Cuando se tenga la descomposición genética preliminar, hay que diseñar instrumentos y entrevistas para analizar como los estudiantes han construido un concepto, permitiendo que sin desarrollar un proceso de enseñanza se pueda analizar si los aspectos teóricos de la descomposición genética preliminar son viables.

Una vez definida la descomposición preliminar hay que ver su viabilidad a partir del diseño y aplicación de instrumentos que intentan identificar las construcciones descritas y las que no han finalizado, pero perduran en los procedimientos de los estudiantes.

Roa-Fuentes y Oktaç (2012) consideran que el análisis puede estructurarse de tal forma que contenga elementos que desequilibren a los alumnos durante el desarrollo de las situaciones que se planteen, permitiendo que los datos aporten significado a la descomposición genética.

En la teoría APOS, una buena parte de los trabajos desarrollan esta componente con entrevistas que son grabadas en video y después transcritas para analizar más en profundidad las construcciones que da el alumnado. El análisis debe ofrecer al entrevistador elementos que le permitan dirigir los argumentos que le ofrezcan los individuos de tal forma que ellos puedan darse cuenta de aspectos que no se hayan considerado tradicionalmente y puedan enriquecer la estructura mental del estudiante.

En la tercera componente del ciclo, el análisis y la verificación de datos, se intenta detectar qué elementos no se han considerado en la descomposición genética preliminar y se reformula, de tal forma que se construya una nueva descomposición genética para poder aplicar de nuevo el ciclo en una versión más refinada.

3.4.3. Teoría APOS para el límite

Según Blázquez, Gatica y Ortega (2008) los estudiantes no consiguen interpretar la definición formal de límite con facilidad y al poco tiempo esta definición se olvida; además señalan que una nueva dificultad la introduce el profesorado de matemáticas, ya que realiza la ejercitación del límite sin reflexionar sobre él. Artigue (1998) señala una tercera dificultad en el que las concepciones intuitivas que tienen los estudiantes prevalecen después de presentarse la definición formal de límite, y donde surge la necesidad de relacionar esta formalidad con las ideas intuitivas que tenían previamente los estudiantes.

Weller et al. (2004) señalan dos razones por las que la teoría APOS puede dar una explicación de cómo los individuos conciben el infinito.

- Esta teoría ha sido utilizada en los últimos años para analizar el pensamiento de los estudiantes.
- Los intentos iniciales para comprender el infinito a través de la teoría APOS han sido satisfactorios, utilizando por ejemplo la Tortuga de Aristóteles.

Roa-Fuentes y Oktaç (2014) definieron una descomposición genética para la noción de infinito. Los objetos que resultan de la aplicación de un proceso infinito puede ser un contexto en los que poder analizar el límite.

Realizar un pequeño número de iteraciones constituye una acción. A través de la interiorización de estas acciones, un individuo puede utilizar la estructura del proceso resultante para imaginar la repetición de las acciones indefinidamente. Dado un proceso infinito, la interiorización y la encapsulación permiten pensar en lo que sucede después de que el proceso haya finalizado. Una concepción del proceso de iteración infinita se desarrolla cuando el individuo es capaz de coordinar múltiples instancias para un proceso finito.

Capítulo 4. Estudio teórico

4. Estudio teórico

Este capítulo está formado por siete apartados, en los que se pretende realizar un estudio teórico de la fenomenología asociada a la noción del límite más y menos infinito de una sucesión. En estos apartados se encuentran: la elección de la definición a utilizar, la caracterización de los fenómenos organizados, el conocimiento matemático implícito en la noción de límite infinito de una sucesión, los fenómenos organizados por el límite más y menos infinito de una función en el más y menos infinito, la comparación de los fenómenos organizados por la definición del límite finito e infinito de una sucesión, y finalmente las conclusiones obtenidas del estudio realizado.

En el primer apartado se describe el proceso realizado para la elección de la definición de límite más infinito de una sucesión correcta y aceptada por la comunidad matemática, a partir de dos cuestionarios contestados por docentes de Educación Secundaria y Universidad, estos últimos del área de Didáctica de las Matemáticas.

El segundo se ha dedicado a la caracterización de los fenómenos organizados por la definición seleccionada anteriormente, y utilizando por analogía la definición de límite menos infinito de una sucesión. Para ello, se han considerado dos enfoques: el intuitivo y el formal. Además, se han tenido en cuenta los fenómenos caracterizados en estudios anteriores, límite finito de una sucesión (Claros, 2010) y límite finito de una función en un punto (Sánchez, 2012).

En el tercer apartado se consideran los términos y conceptos matemáticos involucrados en el límite infinito de una sucesión, como son: la dependencia, la acotación, los procesos infinitos, los tipos de infinito o la divergencia, entre otros.

El cuarto contiene una primera aproximación de los fenómenos que se encuentran en el límite infinito de una función en el infinito.

En el quinto apartado se realiza una comparación, tanto matemática como fenomenológica, del límite finito e infinito de una sucesión. Para ello se han considerado los análisis realizados en apartados anteriores.

En el sexto apartado se muestran las aportaciones de nuestro trabajo al marco teórico del capítulo anterior.

Finalmente, en el séptimo apartado, se encuentran las conclusiones de este estudio teórico.

4.1. Límite infinito de una sucesión: definición

El estudio fenomenológico del límite más y menos infinito, de aquí en adelante límite infinito, de una sucesión del que surge este trabajo comienza a partir de la definición matemática de dicha noción. Esta definición empieza a aparecer en las aulas a partir de 1º de Bachillerato y de forma excepcional en 4º de Educación Secundaria Obligatoria, pese a no encontrarse en los contenidos de las diferentes leyes de educación, tampoco en la actual LOMCE. Su aparición en las aulas se debe principalmente a ser una noción que aparece en la mayoría de los libros de texto de 1º de Bachillerato que hemos consultado (véase *Capítulo 5*).

La definición del límite infinito de una sucesión, tal y como hemos observado en los libros de texto que hemos podido consultar, se sitúa poco antes de la introducción del límite infinito de una función y de forma consecutiva al límite finito de una sucesión.

La definición tiene un papel distintivo del uso técnico de un constructo en contraste con sus usos intuitivos y coloquiales (Vinner, 1991). Un primer dato diferenciador entre ambas nociones es que la definición ha de poseer un enfoque formal, inequívoco, conciso y exacto (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo & Rico, 2015). La definición se puede considerar como la mejor representación de una determinada noción, en el sentido de ser sintética y completa, pues todas las propiedades de la noción se deducen lógicamente de ella.

Teniendo en cuenta la variedad de definiciones de límite infinito de una sucesión que hemos podido encontrar, se decidió llevar a cabo una consulta a expertos con la finalidad de seleccionar una definición correcta y aceptada por la comunidad matemática. Este paso iría seguido del posterior análisis fenomenológico de la definición seleccionada.

Dicha consulta dio lugar a un cuestionario, que de aquí en adelante denominaremos Cuestionario 1, formado por las definiciones dadas por los siguientes autores en manuales universitarios: Bradley y Smith (1998), Díaz (1998), Baenas y Martínez de Santiago (2007), Brinton (2005) y Pestana (2007).

La muestra tomada la compusieron 5 docentes de Educación Secundaria y 4 docentes de Universidad, todos ellos con una experiencia docente comprendida entre 5 y 35 años. Estas personas fueron seleccionadas de los Institutos de Educación Secundaria y de las Facultades de Educación a los que se han tenido acceso. Cada docente debía atribuir el orden de idoneidad a las 6 definiciones propuestas: un “1” a la que considerase más

adecuada desde un punto de vista matemático, un “2” a la que siguiera en adecuación, etc., hasta llegar al “6”, que se reservaría para la menos adecuada. Además, debía atribuir un “0” a las redacciones que no pudieran considerarse como definiciones o no fueran adecuadas. Cada docente disponía de un espacio libre en el que poder explicar por qué consideraba no válidas estas definiciones o la falta de adecuación para alumnos de Bachillerato. En los *Anexos A1.1.* y *A1.2.* se encuentra la documentación aportada a los expertos durante el Cuestionario 1.

A cada profesor y profesora se le atribuyó el nombre de Experto y se le acompañó de la expresión “x.1”, donde “x” es un número del 1 al 9 que hace referencia a cada uno de los 9 profesores y profesoras de la muestra, y “1” en referencia a que nos encontramos en los resultados del Cuestionario 1. Utilizamos esta nomenclatura para preservar el anonimato del experto durante todo el análisis de datos. Los resultados cuantitativos se encuentran en *Anexo A1.3.*

Los comentarios surgidos del cuestionario anterior dieron lugar a un nuevo problema, las diferentes concepciones que tenían los expertos matemáticos sobre el término divergencia, que serán estudiados en el apartado 4.3.4. Esto hacía depender la puntuación otorgada a cada definición, de lo que ellos entendían por sucesión divergente y no realmente a la adecuación o no de la definición presentada en el cuestionario.

Por este motivo se decidió llevar a cabo una nueva consulta a expertos, que dio lugar a un nuevo cuestionario, que denominamos Cuestionario 2. Se realizó una nueva búsqueda de definiciones de sucesión de límite infinito, y se seleccionaron aquellas en las que no estuviera presente el término divergencia. Estas fueron tomadas de los siguientes manuales universitarios y libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato: Bradley y Smith (1998), Linés (1983), Vizmanos, Hernández, Alcalde, Moreno y Serrano (2011), Colera, Olivera y Fernández (1997) y Pestana (2007).

La muestra a la que se administró el Cuestionario 2, estuvo formada por 5 docentes de Educación Secundaria y 2 docentes de Universidad, seleccionados de la misma forma que para el Cuestionario 1. El formato de presentación de la consulta y su posterior análisis fue el mismo que para el cuestionario anterior. Las nuevas definiciones que conformaron el Cuestionario 2 se encuentran en el *Anexo 1.5.*

Después de analizar los datos obtenidos al administrar el Cuestionario 2, pudo observarse que dos de las definiciones, Linés (1983) y Vizmanos et al. (2011), tenían una buena

aceptación por parte del profesorado que conformó la muestra. De hecho, la diferencia de puntuación entre ambas definiciones fue muy pequeña: una (Linés) obtuvo 5 puntos y la otra (Vizmanos et al.) obtuvo $4 + 1/12$. Esto, unido al hecho de que los libros de los diferentes periodos educativos comprendidos entre 1969 y 2016 usaran el sistema de representación verbal de manera preponderante y que el sistema de representación simbólico apenas tuviese presencia en el límite infinito de sucesiones, tanto en definiciones como en ejemplos (véase *Capítulo 5*), nos llevó a seleccionar como definición la de Linés (1983) (usa sistema de representación verbal) frente a la de Vizmanos et al. (2011) (usa sistema de representación simbólico). La recopilación de las respuestas de todos los expertos a este cuestionario se encuentra en *Anexo 1.6*.

Así alcanzamos nuestro objetivo de poder seleccionar una definición de límite infinito de sucesiones para abordar su posterior estudio fenomenológico. La definición seleccionada y con la que trabajaremos a lo largo de toda nuestra investigación fue la siguiente:

Definición 4.1: “Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$.” (Linés, 1983, p.29)

Pese a que la definición del límite “menos infinito” no fue presentada en ninguno de los dos cuestionarios realizados, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el Cuestionario 2, se utilizará la siguiente definición que corresponde al mismo autor y al mismo manual:

Definición 4.2: “Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n < H$, para todo $n \geq v$.” (Linés, 1983, p.29)

Estas definiciones se encuentran en el *Capítulo 2 Sucesiones convergentes y fundamentales* del manual *Principios de análisis matemático*. En él se abordan el límite de una sucesión, límites infinitos, propiedades aritméticas de los límites, transformaciones lineales que conservan la convergencia en las sucesiones, sucesiones fundamentales, cuerpos completos y finalmente ejercicios propuestos.

4.2. Fenómenos organizados por la definición de límite infinito de una sucesión

La noción de límite ha sido estudiada en múltiples investigaciones en los últimos años. En todas estas investigaciones se han puesto de manifiesto las dificultades del alumnado (véase Bucari et al. (2007), Engler et al. (2008), Contreras et al. (2012), Morales et al. (2013), Valls et al. (2011), Olaya et al. (2013) Kidron y Tall (2015), Arce y Conejo (2017), entre otros) y del profesorado (véase Hitt (2003), Ramírez (2004), Kattou et al. (2009), Couoh (2015), Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo (2018), entre otros) en los procesos de enseñanza-aprendizaje involucrados en el desarrollo de la noción en cuestión.

Como ya hiciesen Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales, con el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto respectivamente, en este trabajo se pretenden estudiar las dificultades por el uso de las distintas nociones, ideas y definiciones vinculadas al límite; en esta ocasión para el límite infinito de una sucesión.

Para ello tomaremos la definición seleccionada en el apartado anterior, y tras un análisis exhaustivo de la misma se describirán los tres fenómenos detectados, que serán caracterizados siguiendo la fenomenología dada por Freudenthal (1983).

Para este análisis fueron considerados dos enfoques: el intuitivo y el formal, formas de presentación en las que aparece la enseñanza de la noción de límite en educación secundaria.

Desde el punto de vista intuitivo se obtuvieron dos fenómenos, que se han denominado crecimiento intuitivo ilimitado y decrecimiento intuitivo ilimitado, e inicialmente denotados por c.i.i. y d.i.i. Posteriormente, dado que ambos tienen en común lo intuitivo y lo ilimitado, se decidió sustituir esta notación por la siguiente: c-i.i. y d-i.i. y que queda explicada a continuación:

c: crecimiento // d: decrecimiento, acompañado de “-” para diferenciar el fenómeno en el que se encuentra

i: intuitivo (para ambos casos)

i: ilimitado (para ambos casos)

Desde el punto de vista formal se ha determinado un solo fenómeno, el denominado ida y vuelta en sucesiones de límite infinito o de retroalimentación, i.v.s.i.

En esta investigación se pretenden describir estos fenómenos, para posteriormente estudiar su presencia en los libros de texto, *Capítulo 5*, y cómo están presentes en la comprensión y desarrollo de la noción de límite en estudiantes del Máster en Formación del Profesorado, *Capítulo 6*.

4.2.1. Crecimiento Intuitivo Ilimitado

Observamos que una sucesión creciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores. Si $n > m$, esperaremos $s(n) > s(m)$ ($s(n)$ término general de la sucesión). Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es creciente.

Las sucesiones crecientes pueden estar acotadas superiormente o ser no acotadas. En el primer caso, el límite será finito, no siendo el objeto de esta investigación dado que fue ya estudiado por Claros (2010). En el segundo caso, para las sucesiones crecientes no acotadas, no tendremos un número real mayor a todos los valores de la sucesión y por tanto tendremos un crecimiento ilimitado. A este fenómeno lo llamaremos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y es el que se observa en las sucesiones de límite más infinito.

En conclusión, podemos caracterizar el crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., como el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que avanzamos en la sucesión. Como consecuencia de este fenómeno se puede intuir que la sucesión es creciente no acotada superiormente, es decir, crece ilimitadamente. Podemos afirmar por lo tanto que este fenómeno caracteriza a las sucesiones crecientes no acotadas que tienen límite más infinito.

A continuación, se muestra el siguiente ejemplo:

$$a_n = \frac{n^2 - 3}{n}$$

Si se construye una tabla de valores y se representa gráficamente, puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	$n \rightarrow \infty$
$\frac{n^2 - 3}{n}$	-2	0,5	9,7	999,997	1 000 000	100 000 000	$+\infty$

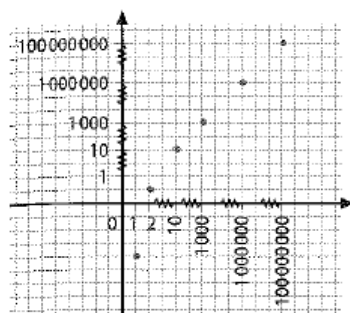


Figura 4.1. Fragmentos libro de texto de 1º Bachillerato del fenómeno c-i.i. Bescós y Pena (2001)

Se observa que los valores de la sucesión $-2 < 0.5 < 9.7 < 999.997 < 1\,000\,000 < 100\,000\,000 < \dots$ son cada vez mayores a medida que se avanza en ella, sin encontrar un número mayor a todos los anteriores y produciéndose por lo tanto un crecimiento ilimitado. La sucesión parece que es creciente y no acotada superiormente; por lo tanto, puede observarse el fenómeno c-i.i.

4.2.2. Decrecimiento Intuitivo Ilimitado

De forma análoga al crecimiento intuitivo ilimitado, observamos que una sucesión decreciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, entendiendo por pequeños aquellos números negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor. Si $n > m$, esperamos $s(n) < s(m)$. Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es decreciente.

Las sucesiones decrecientes podrán estar acotadas inferiormente o no estar acotadas. En el primer caso, el límite será finito y no es el objeto de esta investigación (véase Claros, 2010). En el segundo caso, para las sucesiones decrecientes no acotadas, no tendremos un número real menor a todos los valores de la sucesión, por lo que tendremos un decrecimiento ilimitado. Dado que la sucesión tiene infinitos términos y la sucesión no está acotada inferiormente, decrece de forma ilimitada. A este fenómeno lo llamaremos decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.). Este fenómeno se observa en las sucesiones de límite menos infinito.

Caracterizaremos el decrecimiento intuitivo ilimitado, d-i.i., como el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, entendiendo por pequeños aquellos números negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor, de manera que para cualquier valor que fijemos siempre podemos encontrar un valor de la sucesión que sea menor. Como consecuencia de este fenómeno se puede intuir que la sucesión es decreciente no acotada inferiormente, es decir, decrece ilimitadamente. Podemos afirmar también que este fenómeno caracteriza a las sucesiones decrecientes no acotadas que tienen límite menos infinito.

Análogamente al fenómeno anterior, se presenta el siguiente ejemplo:

Si se representa la sucesión opuesta a la anterior, $a_n = -\frac{n^2 - 3}{n}$, se obtiene:

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	$n \rightarrow \infty$
$-\frac{n^2 - 3}{n}$	-2	-0,5	-9,7	-999,997	-1 000 000	-100 000 000	$-\infty$

Como puede observarse, los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto, pero, al ser negativos, se dice que tienden a $-\infty$.

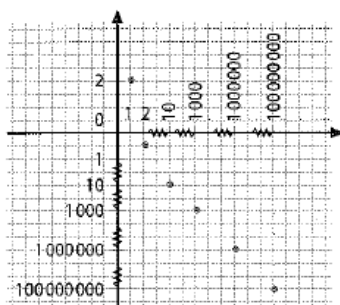


Figura 4.2. Fragmentos libro de texto de 1º Bachillerato del fenómeno d-i.i. Bescós y Pena (2001)

Se observa que los valores de la sucesión $-2 > -0,5 > -9,7 > -999,997 > -1\,000\,000 > -100\,000\,000 > \dots$ son cada vez menores a medida que se avanza en ella, sin encontrar un número menor a todos los anteriores y produciéndose por lo tanto un decrecimiento ilimitado. La sucesión parece que es decreciente y no acotada inferiormente, pudiendo observarse el fenómeno d-i.i.

4.2.3. Retroalimentación o Ida-Vuelta en sucesiones de límite más y menos infinito

En un enfoque formal de la definición 4.1. seleccionada (Linés, 1983), para el límite más infinito podemos observar dos procesos que determinan el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite más infinito:

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada elemento H de K , existe un número natural v ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$ ”.

La retroalimentación se manifiesta al observar de forma conjunta estos dos procesos. En concreto, al interpretar y aplicar los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una sucesión. Esto exige la construcción de una función $H \rightarrow n(H)$.

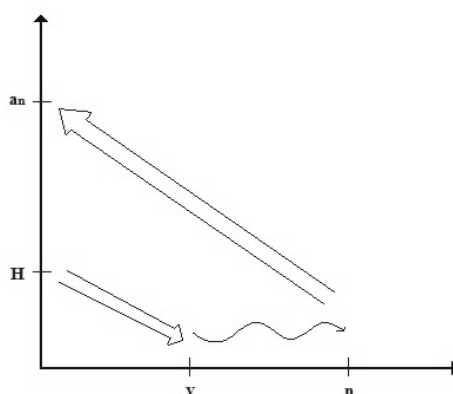


Figura 4.3. Fenómeno ida-vuelta para límite más infinito.

Establecido un H “vamos” desde él hasta un v perteneciente a los números naturales (no único) y “volvemos” considerando $n \geq v$ para el que tendremos $a_n > H$. De esta manera se construye una función real que toma valores naturales y que denotamos de manera simplificada como $(H, n(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la sucesión con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

De aquí en adelante, denotaremos este fenómeno como i.v.s.i., ida y vuelta en sucesiones de límite infinito.

Un ejemplo de este fenómeno encontrado en los libros de texto es el siguiente:

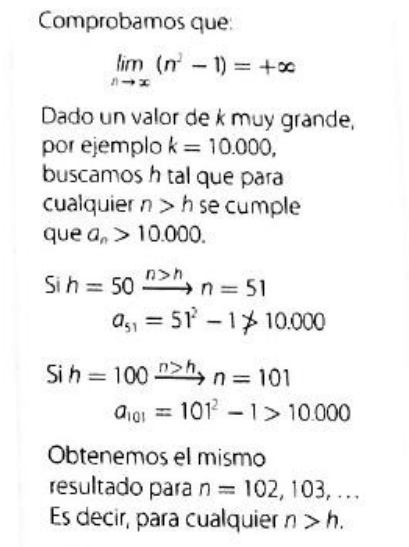


Figura 4.4. Fragmento libro de texto de 2º Bachillerato del fenómeno i.v.s.i. (Escoredo et al., 2009)

Se parte de un número real, $H = 10\,000$, situado en el eje de ordenadas y “vamos” a un número natural v , en nuestro ejemplo $v = 100$, situado en el eje de abscisas, y “volvemos” desde $n = 101$ ($n \geq v$) hacia un número real de la sucesión, $a_{101} = 10\,200$ ($a_n > H$).

Ida: Dado $H = 10\,000$, existe un v número natural, por ejemplo, $v = 100$.

Vuelta: con $n > v$, ejemplo $n = 101$, tenemos $a_{101} = 10\,200 > 10\,000 = H$.

(En este caso, los autores no consideran la igualdad $n = v$, que sí hacen otros autores)

Se deduce que $n(H) = \lceil \sqrt{H} \rceil + 1$, donde “ $\lceil \cdot \rceil$ ” se considera el siguiente número entero. Esta $n(H)$ se obtiene resolviendo la inecuación $n^2 > H$. Hemos tomado el siguiente entero de \sqrt{H} para que n sea un número natural y le hemos sumado 1 para que sea mayor que el v fijado.

$n(H)$ es la función real que toma valores naturales y que ha sido construida unívocamente para la sucesión con la que se trabaja. Además, queremos señalar que esta función no es única y que podríamos encontrar otras que satisficieran este fenómeno de ida y vuelta.

Este fenómeno se encuentra, de forma análoga, para el límite menos infinito, en la definición 4.2. seleccionada de Linés (1983), situada inmediatamente después del límite más infinito, y donde se pueden observar dos procesos que determinan el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito.

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada elemento H de K , existe un número natural v ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $a_n < H$, para todo $n \geq v$ ”.

La retroalimentación se manifiesta al observar de forma conjunta estos dos procesos, como ya sucediese para el límite más infinito. Al interpretar y aplicar los procesos incluidos en la definición de límite menos infinito de una sucesión. Esto exige la construcción de una función $H \rightarrow n(H)$.

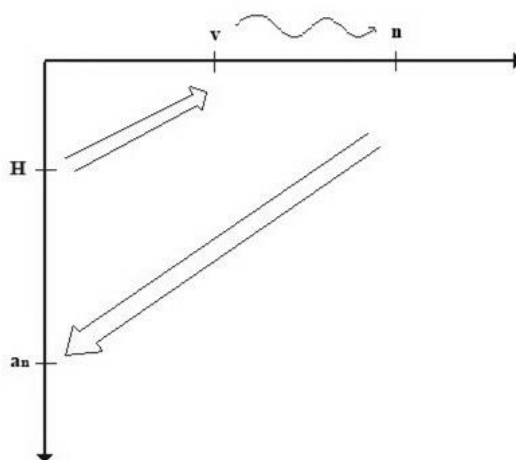


Figura 4.5. Fenómeno ida-vuelta para límite menos infinito.

Establecido un H “vamos” desde él hasta un v perteneciente a los números naturales (no único) y “volvemos” considerando $n \geq v$ para el que tendremos $a_n < H$. De esta manera se construye una función real que toma valores naturales y que denotamos de manera simplificada como $(H, n(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la sucesión con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del Eje Y y va al Eje X , exactamente igual a como sucedía para el límite menos infinito de una sucesión.

Consideramos el ejemplo análogo al presentado para el caso de límite más infinito,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 + 1 = -\infty.$$

Tomando la notación utilizada en la definición seleccionada, se parte de un número real, $H = -10\,000$, situado en el eje de ordenadas y “vamos” a un número natural v , en nuestro ejemplo $v = 100$, situado en el eje de abscisas, y “volvemos” desde $n = 101$ ($n \geq v$) hacia un número real de la sucesión, $a_{101} = -10\,200$ ($a_n < H$).

Ida: Dado $H = -10\,000$, existe un v número natural, por ejemplo, $v = 100$.

Vuelta: con $n \geq v$, ejemplo $n = 101$, tenemos $a_{101} = -10\,200 < -10\,000 = H$.

Se deduce que $n(H) = \lceil \sqrt{-H} \rceil + 1$, donde “ $\lceil \rceil$ ” se considera el siguiente número entero. Esta $n(H)$ se obtiene resolviendo la inecuación $-n^2 < H$. Hemos tomado el siguiente número entero de $\sqrt{-H}$ para que n sea un número natural y le hemos sumado 1 para que sea mayor que el v fijado.

$n(H)$ es la función real que toma valores naturales y que ha sido construida unívocamente para la sucesión con la que se trabaja. Además, como ya ocurriese con el límite más infinito, queremos señalar que esta función no es única y que podríamos encontrar otras que satisficiesen este fenómeno de ida y vuelta.

Pese a que en el enfoque intuitivo se ha diferenciado el límite más infinito y el límite menos infinito, dando lugar a la caracterización de dos fenómenos, en el enfoque formal se ha caracterizado un único fenómeno para ambos límites, por considerar el mismo proceso de ida y vuelta, es decir, la observación de una retroalimentación en ambos procesos.

4.2.4. Fenómenos organizados por otras definiciones

Como ya conjeturasen Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales, queremos probar si los fenómenos c-i.i. e i.v.s.i. caracterizados en los apartados anteriores también son organizados por el resto de las definiciones correctas del límite infinito de una sucesión.

Para su prueba utilizaremos el resto de las definiciones del Cuestionario 2. Para facilitar su seguimiento reproduciremos cada una de ellas e identificaremos los tres fenómenos.

Definición 1: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ significa que, para todo número real A , se verifica que $a_n >$

A para todo n suficientemente grande. (Bradley & Smith, 1998)

- Fenómeno c-i.i.: El lenguaje utilizado en esta definición, menos formal que en la definición seleccionada, facilita la observación de este fenómeno. Los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que n es cada vez mayor hecho que implica la observación del fenómeno c-i.i.

- Fenómeno i.v.s.i.: Para el primer proceso, “ida”, debemos utilizar el fragmento “para todo número real A existe n ”, mientras que el segundo proceso, “vuelta”, corresponde al fragmento “ $a_n > A$ para todo n suficientemente grande”, siendo suficientemente grande $n > n_0$.

Definición 3: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$ (Vizmanos et al., 2011).

- Fenómeno c-i.i.: El carácter formal de esta definición conlleva que debamos adaptar esta definición a un lenguaje informal para poder encontrar este fenómeno. Cada vez encontramos valores mayores de la sucesión a medida que n es cada vez mayor, sin encontrar una cota superior.
- Fenómeno i.v.s.i.: El primer proceso, “ida”, corresponde al fragmento: “ $\forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ ”. Mientras que el segundo proceso, “vuelta”, corresponde al fragmento “tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$ ”.

Definición 4: El límite de una sucesión es ∞ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que s_n sea tan grande como queramos dándole a n valores suficientemente grandes (Colera et al., 1997).

- Fenómeno c-i.i.: Como ya sucediese con la Definición 1, el lenguaje utilizado es informal facilitando el hallazgo de este fenómeno. Cada vez que “avancemos” en los términos de la sucesión encontraremos valores más grandes de s_n .
- Fenómeno i.v.s.i.: A pesar de no encontrar en esta definición un lenguaje formal podemos encontrar los fragmentos de los procesos de “ida” y “vuelta”, para los que habría que realizar una adaptación al lenguaje matemático formal para su completa comprensión. Los fragmentos hallados son, para la “ida”: “dado un valor $A > 0$ existe n_0 ”, mientras que para la “vuelta” tenemos “ s_n sea tan grande como queramos dándole a n valores suficientemente grandes”.

Definición 5: Decimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$ si $n > N$ (Pestana, 2007).

- Fenómeno c-i.i.: Debemos adaptar esta definición a un lenguaje informal para poder encontrar este fenómeno, como ya sucediese con la Definición 3. Cada vez

encontramos valores mayores de la sucesión a medida que n es cada vez mayor, sin encontrar una cota superior.

- Fenómeno i.v.s.i.: El primer proceso, “ida”, corresponde al fragmento: “si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ ”. Mientras que el segundo proceso, “vuelta”, corresponde al fragmento “tal que $a_n > M$ si $n > N$ ”.

4.2.5. Relación entre fenómenos intuitivos y formales del límite finito e infinito.

En los tres apartados anteriores se han definido fenómenos organizados a partir de la noción del límite infinito de sucesiones, pero no se relacionaron entre ellos.

Estos fenómenos fueron caracterizados desde una perspectiva intuitiva: crecimiento intuitivo ilimitado y decrecimiento intuitivo ilimitado, y desde una perspectiva formal: ida-vuelta en sucesiones de límite infinito.

Desde el enfoque intuitivo no es posible afirmar cuál es el límite de la sucesión con la que estamos trabajando, pero se genera una primera idea de un crecimiento/decrecimiento de manera ilimitada, conjeturando un límite infinito (más infinito o menos infinito), y apoyándonos en una representación externa (ver 3.2.1) de dicho límite.

En el enfoque formal, partimos de la definición de la noción, y a partir de ahí, con un rigor estrictamente matemático comprobamos que el valor conjeturado es el verdadero límite de la sucesión presentada. Previo a su demostración, se necesita una función, que como ya sucediese para el límite finito una sucesión, verifique la definición. Esta función no es única, y deberá generarse para cada sucesión con la que se trabaje y en la que se quiera calcular el límite infinito.

Como se muestra en la siguiente imagen, es necesario el uso de ambos enfoques para caracterizar fenómenos organizados por la definición de límite infinito de una sucesión y calcular el límite de la sucesión presentada. El primero de ellos para conjeturar el candidato a límite y el segundo para demostrar que el candidato seleccionado es el verdadero límite de la sucesión presentada.

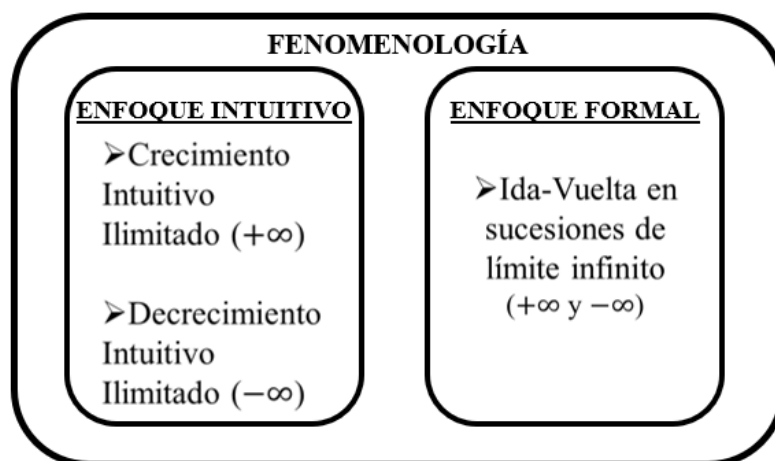


Figura 4.6. Fenomenología para el límite más y menos infinito de sucesiones.

Claros (2010, p. 150-151) afirmaba para el límite finito de una sucesión que “i.v.s., en su abstracción, supone conocido el límite y no hace más que aportar la confirmación de dicho conocimiento con los medios matemáticos disponibles hoy día; a pesar de sus limitaciones, el fenómeno a.s.i. aporta esa “confianza moral” de que el valor supuestamente aceptado se eligió con sensatez.”

En nuestro caso, la “confianza moral”, que él denomina, nos la aportarán los fenómenos c-i.i. y d-i.i. dependiendo si el límite es $+\infty$ o $-\infty$ y a partir de este resultado, realizando una abstracción de la noción, aportaremos la confirmación utilizando el fenómeno i.v.s.i.

4.2.6. Fenómenos, sistemas de representación y formatos

Una de las preguntas que nos hicimos durante la caracterización de estos fenómenos era cómo aparecían en las aulas y por ello decidimos estudiar cómo se encontraban en los libros de texto. Según nuestra experiencia docente el uso de este recurso didáctico es muy habitual entre el profesorado cuando tiene que explicar el concepto de límite.

Efectivamente, tal y como ya ocurriese en los estudios de Claros (2010) y Sánchez (2012), estos fenómenos podían ser identificados en diferentes sistemas de representación y formatos en los libros de textos actuales, y también, en diferentes ejemplares de una muestra intencional que abarcaba desde la década de 1970.

Este estudio, se presentará de una manera más profunda en el próximo capítulo, pero en este apartado queremos realizar una breve presentación.

En cada libro de texto se intentarán buscar los diferentes fenómenos presentes. Se distinguirán los diferentes sistemas de representación: verbal, tabular, simbólico y

gráfico, y además diferentes formatos: definición y ejemplo. Para su posterior análisis se utilizará una tabla que recopile la información de cada uno, como la siguiente:

Tabla 4.1. Clasificación de los tres fenómenos de cada libro de texto.

		FENÓMENOS					
		Formal			Intuitivo		
		i.v.s.i.		c-i.i.	d-i.i.		
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal						
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

A continuación, se muestran algunos ejemplos encontrados en los libros de texto consultados:

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	100 000 001	...	tiende a $+\infty$

Figura 4.7. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación tabular (Vizmanos & Anzola, 2002).

En este ejemplo de límite más infinito se presenta el fenómeno c-i.i. ya que a partir del cálculo de una serie de valores los autores afirman que el límite de la sucesión es más infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. Consideramos que el sistema predominante es el tabular, pese a que también aparece el sistema de representación verbal.

Por todo lo anterior, concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno c-i.i. en el sistema de representación tabular y en el formato ejemplo.

¿A qué valor se aproximan las sucesiones $a_n = n^2$, $a_n = 4n^3$, $a_n = 5n^4$, ...?
 A medida que n se hace mayor los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego $\lim n^2 = \lim 4n^3 = \lim 5n^4 = +\infty, \dots$

Figura 4.8. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 2002).

En este ejemplo de límite más infinito se presenta el fenómeno c-i.i. ya que a partir del cálculo de una serie de valores cada vez más avanzados de la sucesión los autores afirman que el límite de dicha sucesión es más infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. Consideramos que el sistema predominante es el verbal, aunque aparezca el sistema de representación simbólico para la notación de “límite” e “infinito”. Por todo lo anterior, concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno c-i.i. en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo.

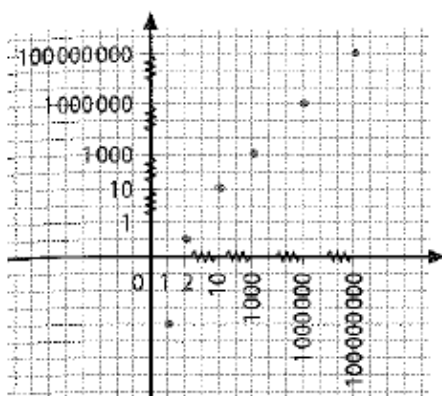


Figura 4.9. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación gráfico (Bescós & Pena, 2001).

En este ejemplo de límite más infinito se presenta el fenómeno c-i.i. ya que a partir de la representación gráfica de una serie de valores en el plano cartesiano los autores afirman que el límite de la sucesión es más infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. En este caso, consideramos que el único sistema de representación presente es el gráfico. Por todo ello concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno c-i.i. en el sistema de representación gráfico y en el formato ejemplo.

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-99 999 999	...	tiende a $-\infty$

Figura 4.10. Ejemplo del fenómeno d-i.i., sistema de representación tabular (Vizmanos & Anzola, 2002).

En este ejemplo de límite menos infinito se presenta el fenómeno d-i.i. ya que a partir del cálculo de una serie de valores cada vez más avanzados de la sucesión los autores afirman que el límite de dicha sucesión es menos infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. Consideramos que el sistema predominante es el tabular pese a aparecer el sistema de representación verbal. Por todo lo anterior concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno d-i.i. en el sistema de representación tabular y en el formato ejemplo.

A qué valor se aproximan las sucesiones

$$a_n = -2n^2, b_n = -6n^3, c_n = -7n^4$$

A medida que n se hace mayor, los términos de las sucesiones se hacen cada vez menores, luego tienden a $-\infty$.

Figura 4.11. Ejemplo del fenómeno c-i.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 2002).

En este ejemplo de límite menos infinito se presenta el fenómeno d-i.i. ya que a partir de cálculo de una serie de valores cada vez más avanzados de la sucesión los autores afirman que el límite de dicha sucesión es menos infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. Consideramos que el sistema predominante es el verbal pese a aparecer el sistema de representación simbólico para la notación de “límite” e “infinito”. Por todo lo anterior concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno d-i.i. en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo.

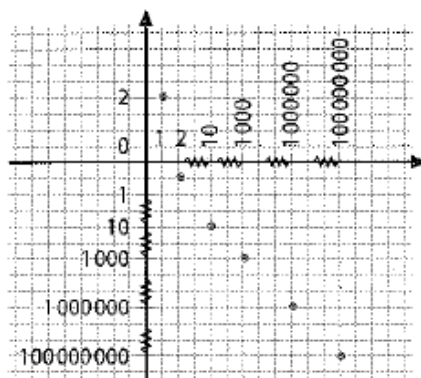


Figura 4.12. Ejemplo del fenómeno d-i.i., sistema de representación gráfico (Bescós & Pena, 2001).

En este ejemplo de límite menos infinito se presenta el fenómeno d-i.i. ya que, a partir de la representación gráfica de una serie de valores, cada vez más avanzados de la sucesión los autores afirman que el límite de dicha sucesión es menos infinito, pero no hay una demostración de dicha afirmación. En este caso, consideramos que el único sistema de representación presente es el gráfico. Por todo lo anterior concluimos el ejemplo presentado como una muestra del fenómeno d-i.i. en el sistema de representación gráfico y en el formato ejemplo.

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «listón» se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo, $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

Figura 4.13. Ejemplo del fenómeno i.v.s.i., sistema de representación verbal (Vizmanos & Anzola, 1996).

En el ejemplo aparece el fenómeno i.v.s.i. ya que puede construirse una función $n(K)$ y se observan los dos procesos implicados en dicho fenómeno (proceso de ida y vuelta). Se parte de un número real, $K = 100\,000\,000$, situado en el eje de ordenadas y “vamos” a un número natural n^* , en nuestro ejemplo $n^* = 10\,000$, situado en el eje de abscisas, y “volvemos” desde un n mayor ($n > n^*$) hacia un número real de la sucesión, $10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$.

- Ida: Dado $K = 100\,000\,000$, existe un n^* número natural, por ejemplo, $n^* = 10\,000$.
- Vuelta: con $n > n^*$, tenemos $10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$.

Además, señalamos que dicho fenómeno aparece en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo.

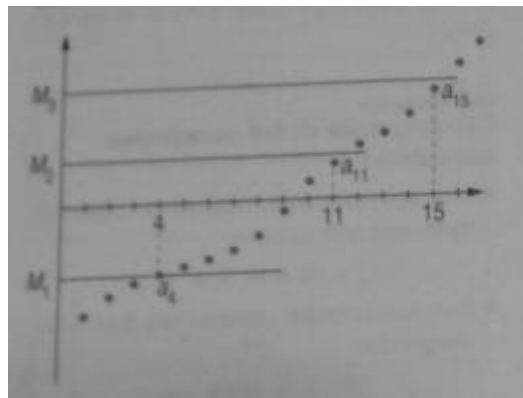


Figura 4.14. Ejemplo del fenómeno i.v.s.i., sistema de representación gráfico (González, Llorente & Ruiz, 1995).

En el ejemplo aparece el fenómeno i.v.s.i. ya que puede construirse una función $n(M_1)$, $n(M_2)$, $n(M_3)$, ... y se observan los dos procesos implicados en dicho fenómeno.

Se parte de un número real, M_2 , situado en el eje de ordenadas y “vamos” a un número natural v , en nuestro ejemplo $v = 11$, situado en el eje de abscisas, y “volvemos” desde un n mayor ($n \geq v$), por ejemplo $n = 15$ hacia un número real de la sucesión, obteniendo $a_{15} > M_2$.

- Ida: Dado M_2 , existe un v número natural, por ejemplo, $v = 11$.
- Vuelta: con $n \geq v$, por ejemplo $n = 15$ tenemos $a_{15} > M_2$.

Señalamos también que dicho fenómeno aparece en el sistema de representación gráfico al encontrarse en el plano cartesiano y en el formato ejemplo.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \text{ se puede encontrar un } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

Figura 4.15. Fenómeno i.v.s.i., en el formato definición, sistema de representación simbólico (Vizmanos et al., 2011).

En el fragmento aparece, en formato definición, el fenómeno i.v.s.i., ya que se observan los dos procesos implicados en dicho fenómeno.

- Ida: $\forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$
- Vuelta: si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$

Señalamos también que dicho fenómeno aparece en el sistema de representación simbólico, por ser el dominante y requerir de un cierto conocimiento matemático para su lectura, pese a contener la siguiente parte verbal “se puede encontrar un”.

4.3. Conocimiento matemático implícito en la definición de límite infinito de una sucesión

En este apartado se aborda el conocimiento matemático necesario para la comprensión de la definición 4.1. de límite infinito de una sucesión, que permita un uso correcto de la misma y facilite la observación de fenómenos en cada definición o ejercicio, que fue seleccionada al comienzo de este estudio y que recordamos a continuación:

“Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$ ” (Linés, 1983, p.29).

Las nociones que han sido consideradas son las siguientes: dependencia, suficientemente grande, procesos infinitos, acotación, tipos de infinito, divergencia y punto de acumulación.

4.3.1. Dependencias

En estas definiciones del límite infinito (más y menos infinito) de una sucesión se distinguen dos dependencias, como ya apareciera en los estudios de Claros (2010) y Sánchez (2012) para el límite finito de sucesiones y para el límite finito de una función en un punto respectivamente.

La primera dependencia la encontramos en la propia definición de sucesión, para la que a cada número natural “ n ” le corresponde un número real “ a_n ”, ($n \rightarrow a_n$) y en la que no interviene la noción de límite. En la segunda, se relaciona el número real H , con el número natural v , posición que ocupa en la sucesión y menor que n . En esta dependencia debemos diferenciar el límite más infinito del menos infinito. En el primer caso H es menor que el término de la sucesión a_n , mientras que en el segundo H es mayor que el término de la sucesión a_n . Con esto nos aseguramos términos cada vez mayores y la no acotación superior para más infinito, y términos cada vez menores y la no acotación inferior para menos infinito, a partir de $H \rightarrow v$. La relación existente en la primera dependencia es única, pero en la segunda no puede afirmarse lo mismo, al pertenecer H a los números reales y v a los números naturales, conjuntos de diferente cardinal.

La primera dependencia determina cada uno de los valores de la sucesión, mientras que la segunda asegura el crecimiento de los valores y su no acotación superior, permitiendo que el límite sea más infinito. De forma análoga ocurre para el límite menos infinito,

donde la primera dependencia determina de nuevo cada uno de los valores de la sucesión, mientras que la segunda asegura el decrecimiento de los valores y su no acotación inferior.

4.3.2. Suficientemente grande, procesos infinitos y tipos de infinito

El término suficientemente grande no aparece en la definición seleccionada, pero sí en distintas definiciones de límite de los libros consultados (véase muestra seleccionada en el *Capítulo 5*). Dicho término es utilizado en matemáticas en distintas definiciones de límite, algunas de las cuales fueron seleccionadas en el Cuestionario 1 y en el Cuestionario 2. Por ello, aunque no aparezca en la definición seleccionada, es preciso tenerlo en cuenta de cara a extrapolar los resultados de este estudio a otras definiciones.

La expresión “un valor suficientemente grande” equivale a decir que el número seleccionado es mayor que cualquier otro valor dado que satisface unas determinadas condiciones.

Si la sucesión tiende a infinito,
cualquier listón que pongamos por alto
que sea será superado por términos
sin más que formar uno
suficientemente grande.

Figura 4.16. Fragmento libro de texto de matemáticas de 2º BUP (Vizmanos & Anzola, 1994).

$\lim s_n = +\infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que s_n sea tan grande como queramos, dándole a n valores suficientemente grandes.

Figura 4.17. Fragmento libro de texto de matemáticas de 2º de Bachillerato (Cólera & Oliveira, 2009).

En el límite infinito de una sucesión debemos diferenciar dos procesos infinitos, uno para la variable independiente, n , y otro para la variable dependiente $s(n) = a_n$.

En el caso de la variable independiente, que refleja la posición que tiene cada uno de los términos de la sucesión, el proceso infinito es discreto, al tomar únicamente valores naturales, siendo posible avanzar ilimitadamente. Este avance es unilateral, de izquierda a derecha, ya que solo es posible avanzar en valores cada vez mayores. Esta es una característica de las sucesiones.

La variable dependiente, es decir, cada uno de los valores de la sucesión, es un proceso infinito discreto también, a pesar de que los términos de la sucesión sean números reales. Esto se debe a que vienen determinados por los valores naturales que toma la variable

independiente. Diferenciaremos las sucesiones con límite “más infinito” de las que tienen límite “menos infinito”, necesario para la comprensión de los procesos infinitos involucrados en dicha variable.

En el caso “más infinito”, siempre vamos a poder encontrar un valor de la sucesión que sea mayor que cualquier número real que fijemos. En nuestra definición, un número real $H > 0$ suficientemente grande. El avance de los valores es unilateral, de izquierda a derecha en la recta real, sin existir una aproximación a un número real.

En el caso “menos infinito”, siempre vamos a poder encontrar un valor de la sucesión que sea menor que cualquier número real que fijemos, en nuestra definición, un número real negativo, $H < 0$, cuyo valor absoluto sea lo suficientemente grande. El avance de los valores es unilateral, de derecha a izquierda en la recta real, sin existir una aproximación a un número real.

Dado que el infinito potencial está asociado a los procesos infinitos, podemos decir que tanto para la variable independiente como para la variable dependiente nos encontramos ante un infinito de este tipo, ya que existe un proceso de crecimiento que no tiene fin; siempre podemos pensar en un “siguiente”. Además, no es posible pensar en ningún número mayor para ninguna de las variables.

Revisando la bibliografía sobre el infinito actual, ya presentada en el *Capítulo 2*, obtenemos diferentes afirmaciones contradictorias entre sí: la de aquellos que aceptan su existencia y la de los que no.

Autores como Sierpinski (1985) negaron la existencia del infinito actual, guiados por matemáticos predecesores a Cantor, como son Cauchy, Gauss o Poincaré.

Igualmente ocurre con algunos docentes en activo de matemáticas. Tal y como señala Valdivé (2006) en sus estudios esta dificultad existente en ellos se encuentra en los conjuntos infinitos, y propone formación para que adquieran el paso al infinito actual, evitando así conflictos e incoherencias cuando utilicen límites.

Flores (2004) pone de manifiesto que los profesores en formación no dominan algunos conceptos, y les provoca conflictos cognitivos a partir de las paradojas.

Otros autores, como Tall y Vinner (1981), Roa-Fuentes y Oktaç (2014) y Kidron y Tall (2015) afirman su existencia.

Tall y Vinner (1981) recogen en sus trabajos las expresiones que podrían dificultar el sentido del límite, y por tanto la aceptación de infinito actual como por ejemplo son: “tender”, “aproximarse”, “acercarse”, ...

Conceptos como: conjuntos infinitos, límites de series infinitas, intersecciones infinitas, cardinalidad, ... requieren el concepto de infinito actual (Roa-Fuentes & Oktaç, 2014).

Nosotros, para nuestro caso concreto del límite infinito de una sucesión, y teniendo en cuenta los estudios de Kidron y Tall (2015), podemos decir que también nos encontramos con el infinito actual, ya que podemos considerar todos los términos de la sucesión y pensar en el límite como un concepto formal, incluyendo a los valores más y menos infinito.

4.3.3. Acotación

De nuevo debemos separar los límites “más infinito” y “menos infinito” para considerar el concepto de acotación.

En el caso del límite “más infinito” existen dos acotaciones a tratar. La sucesión está acotada inferiormente por un término de la sucesión. Por otra parte, en la definición podemos observar la acotación inferior de cada uno de los términos de la sucesión por el valor real H a partir de un cierto término de la sucesión. Sin embargo, no es posible realizar una cota superior ya que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.

En el caso del límite “menos infinito” también existen dos acotaciones a tratar. La sucesión está acotada superiormente por un término de la sucesión. Mientras que, por la definición, existe una nueva acotación superior para cada uno de los términos de la sucesión, por el valor real H a partir de un cierto término de la sucesión. Sin embargo, no es posible realizar una cota inferior ya que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.

4.3.4. Divergencia

A partir del proceso de búsqueda de la definición correcta y aceptada que ha sido descrita en el apartado 4.1. encontramos falta de homogeneidad en la definición del término “divergencia”, debido a que en las respuestas del Cuestionario 1 hubo diversidad de acepciones de dicho término entre los encuestados. Estas diferentes acepciones produjeron ciertas dificultades a la hora de seleccionar la citada definición.

Durante el análisis se observó que las definiciones donde se encontraba el término divergente o divergencia distorsionaban el orden de selección por parte del profesorado, llegando a obtener una misma definición, o el valor “1”, en el caso de que el profesor o la profesora estuviese de acuerdo con el significado otorgado a la divergencia, o un “0” en el caso de considerarla errónea.

Mostramos a continuación algunas de las respuestas textuales a una de las definiciones del Cuestionario 1, donde aparecía el término divergente.

Diremos que $\{a_n\}$ tiene por límite $+\infty$, o que $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, y lo representaremos mediante $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / a_n > M \forall n \geq n_0$. En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.

Figura 4.18. Fragmento Baenas y Martínez de Santiago (2007).

Experto 1.1: $\{a_n \in \mathbb{R}\} \{n \in \mathbb{N}\}$? Considera que es redundante la afirmación: “En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente”.

Experto 3.1: “El termino divergente es ambiguo, ¿cómo se denomina a $\{x_n\}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$?”

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el límite sea $+\infty$ ”.

Mientras que para unos expertos la definición es redundante, para otros el término divergente es ambiguo o erróneo. Esto llevó a distorsionar los resultados finales del Cuestionario 1, donde la aceptación o no del término divergente implica la aceptación o no de la definición del límite infinito, sin considerar la verdadera adecuación de dicha definición, que es realmente lo que nos preocupaba en ese instante.

Dada la falta de uniformidad que encontramos en las respuestas dadas por los profesores y las profesoras en las respuestas al Cuestionario 1, debido sobre todo a las dificultades con el término divergencia que aparecía en algunas definiciones presentadas, decidimos buscar la definición de dicho término en libros de texto y manuales universitarios con el fin de añadirla a un nuevo cuestionario que debería eliminar todo atisbo de dudas en el profesorado (ver *Anexo 1.5*).

En la búsqueda de la definición de divergencia seleccionamos 5 autores de manuales universitarios que definían el término divergencia o sucesión divergente: Spivak (1991), Bartle y Sherbert (2000), Pozniak (2000), Rey Pastor (1969) y Pestana (2007), así como los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de González et al.

(1995), Cólera, Oliveira, García y Santaella (2008), Vizmanos y Anzola (2003), Vizmanos et al. (2011).

En Spivak (1991, p.553) y Bartle y Sherbert (2000, p.54) se definía como una sucesión divergente a la que no es convergente. Previamente el autor había definido como sucesión convergente aquellas que tenían límite finito. En este caso, serían sucesiones divergentes tanto las sucesiones de límite infinito como aquellas que carecen de límite. Mostramos, a modo de ejemplo, dos fragmentos escaneados extraídos del libro de Bartle y Sherbert (2000) que refleja lo anteriormente expuesto:

3.1.3 Definition A sequence $X = (x_n)$ in \mathbb{R} is said to **converge** to $x \in \mathbb{R}$, or x is said to be a **limit** of (x_n) , if for every $\varepsilon > 0$ there exists a natural number $K(\varepsilon)$ such that for all $n \geq K(\varepsilon)$, the terms x_n satisfy $|x_n - x| < \varepsilon$.

If a sequence has a limit, we say that the sequence is **convergent**; if it has no limit, we say that the sequence is **divergent**.

Figura 4.19. Fragmento Bartle y Sherbert (2000, p.54).

3.2.8 Examples (a) The sequence (n) is divergent.

(b) The sequence $((-1)^n)$ is divergent.

If n is an odd natural number with $n \geq K_1$, this gives $|-1 - a| < 1$, so that $-2 < a < 0$. (Why?) On the other hand, if n is an even natural number with $n \geq K_1$, this inequality gives $|1 - a| < 1$ so that $0 < a < 2$. Since a cannot satisfy both of these inequalities, the hypothesis that X is convergent leads to a contradiction. Therefore the sequence X is divergent.

Figura 4.20. Fragmentos Bartle y Sherbert (2000, p.64).

Otra definición de convergencia es la del matemático Pozniak (2000, p.54), que admite que una sucesión con límite infinito pueda tener límite, y, por consiguiente, ser convergente. Según este autor las sucesiones de límite finito son sucesiones convergentes y las sucesiones de límite infinito $(+\infty$ ó $-\infty)$ son convergentes a infinito de signo determinado.

***) Notemos que las sucesiones infinitas se denominan a veces sucesiones convergentes hacia el infinito. Por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ es infinita, se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Si los elementos de la sucesión infinita tienen, partiendo de un número, un signo determinado, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia el infinito de signo determinado. Esto se escribe simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Figura 4.21. Fragmento Pozniak (2000, p.58).

Pozniak no aclara qué ocurre con la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$, pero dada su definición de sucesiones convergentes hacia el infinito parece que ésta quedaría clasificada como tal.

Mostramos a continuación un ejemplo de sucesión convergente a infinito de Gorostizaga dado que en Pozniak (2000) la definición no viene acompañada de ningún ejemplo.

Sucesión convergente a infinito:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty \rightarrow \forall A > 0 \exists p \in \mathbb{N} \text{ , } x_n > A$$

Es decir, los términos de la sucesión (para valores de n altos) pertenecen al entorno de infinito.

Como ejemplo considérese la sucesión de números pares:

$$(2n) = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 10000000, \dots$$

Figura 4.22. Fragmento web Gorostizaga (Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales).

Una tercera acepción de sucesión convergente y divergente es la de sucesión oscilante propuesta por Rey Pastor (1969, pp.274-277).

Pastor considera que, con esta tercera categoría, las sucesiones oscilantes, soluciona uno de los problemas que tenían Bartle y Sherbert, y Pozniak con el límite de algunas sucesiones. Para él son convergentes las sucesiones que tienen límite finito, divergentes las que tienen límite infinito (véase Figura 4.23) y oscilantes las que carecen de límite finito e infinito (véase Figura 4.24). Esta última categoría no es señalada ni por Bartle y Sherbert ni por Pozniak.

diremos que tie-

ne *límite infinito*, y escribiremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty, \text{ o bien: } \alpha_n \rightarrow \infty,$$

EJEMPLO 6:

$\frac{5}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{10}{4}, \frac{19}{5}, \dots$	$\frac{6 - n^2}{n}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - n^2}{n} = -\infty$
$\frac{7}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{22}{4}, \frac{31}{5}, \dots$	$\frac{6 + n^2}{n}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + n^2}{n} = +\infty$
$-2, 4, -8, 16, -32, \dots$	$(-2)^n, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n = \infty$

Figura 4.23. Fragmentos Rey Pastor (1969, p.274).

DEF.: Una sucesión que tiene límite finito se llama *convergente*; una que tiene límite infinito, *divergente*; las que carecen de límite, finito e infinito, se llaman *oscilantes*.

Algunos autores llaman divergentes a las sucesiones no convergentes a un límite finito. Nosotros seguiremos la nomenclatura más precisa que hemos expuesto.

Figura 4.24. Fragmento Rey Pastor (1969, p.275).

Con la nueva definición de convergente, divergente y oscilante, nos realizamos la siguiente pregunta ¿la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$ es convergente, divergente u oscilante?

Pastor desecha el hecho de que esta sucesión sea convergente a infinito como señala Pozniak. Para él esta sucesión, y teniendo en cuenta no solamente las definiciones presentadas, sino también los ejemplos que muestra Pastor, dicha sucesión es divergente. En cambio, la siguiente sucesión, en la que los términos impares tienden a 0 y los pares a más infinito, sería una sucesión oscilante (véase Figura 4.25).

A partir de lo anterior, podemos afirmar que la mayor diferencia de la clasificación dada por Rey Pastor respecto a las dadas Bartle y Sherbert, y Pozniak es la introducción del término oscilante, recogiendo así casos como el siguiente:

EJEMPLO 2: La sucesión oscilante $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots$

Figura 4.25. Fragmento Rey Pastor (1969, p.277).

Hay que señalar también que Pastor considera más infinito y menos infinito como infinito; de ahí la existencia de una posible ambigüedad en algunos límites de sucesiones o en la clasificación de sucesión divergente u oscilante.

A estas diferentes acepciones del término divergencia que hemos encontrado tenemos que sumar una más dada por Pestana (2007, pp.435-436). Este autor propone una nueva definición de sucesión divergente, basada en la definición de Rey Pastor y que es actualmente muy utilizada en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Una sucesión es divergente cuando no se acerca a ningún punto finito. Para evitar dudas de la no existencia del límite añade que una sucesión que diverge puede que tenga límite infinito o menos infinito, aclarando, además, ambos términos.

Definición 15.3. Decimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$, si $n > N$. Decimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < M$, si $n > N$.

Figura 4.26. Fragmento Pestana (2007, p.436).

Idéntica definición toman algunos libros de texto de Bachillerato, (Colera, Oliveira, García & Santaella, 2009, p.58), (Avellanas, García & Martínez, 1996, p.256), (Anzola & Vizmanos, 2003, p.178).

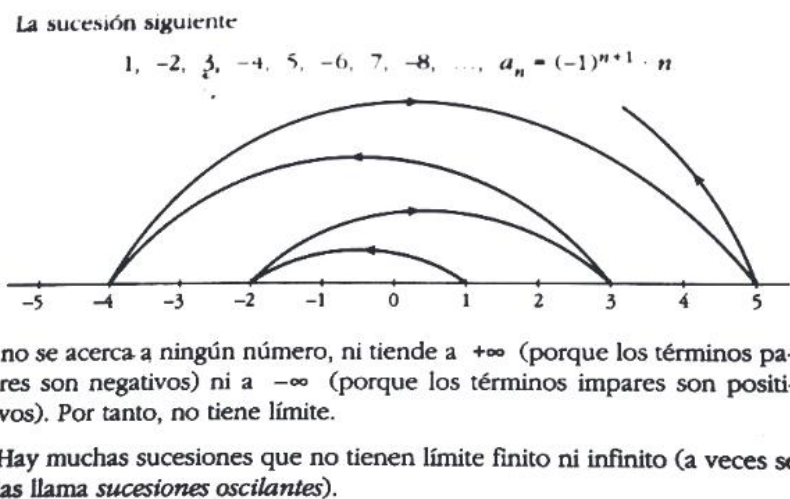


Figura 4.27. Fragmento Colera et al. (2009, p.58) de la Editorial Anaya.

Se llama sucesiones oscilantes a las que tienen *más de un punto de acumulación* (sean finitos o no).

Figura 4.28. Fragmento definición sucesión oscilantes de Avellanas et al. (1996, p.256).



Marcando en la recta real varios términos de las siguientes sucesiones, comprenderás por qué decimos que «oscilan» entre sus puntos de acumulación.

- (a) $-1, 1, \dots, -1, 1, \dots$, con $a_n = (-1)^n$ tiene dos puntos de acumulación: -1 y 1 .
- (b) $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ tiene puntos de acumulación 0 y $+\infty$.
- (c) $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$ tiene puntos de acumulación $+\infty$ y $-\infty$.

Figura 4.29. Fragmento de ejemplos de Avellanas et al. (1996, p.256).

Diremos que $+\infty$ ($-\infty$) es punto de acumulación de una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si hay términos positivos (negativos) arbitrariamente grandes (pequeños), es decir, si para

todo $M > 0$, por grande que sea, hay términos $a_n > M$ ($a_n < -M$). (Avellanas et al., 1996, p.256)

Llamar puntos a $+\infty$ y $-\infty$, como utiliza este libro de texto, es un abuso del lenguaje. Pese a que en algunos países y algunos manuales españoles los llaman puntos de la recta real completa, nosotros los consideraremos de la forma estándar, es decir no son puntos de la recta real.

A continuación resumimos, en cuatro acepciones diferentes, todas las posibles definiciones de divergencia matemática encontradas y añadimos la que consideraremos de aquí en adelante en nuestra investigación (Arnal, Claros, Sánchez & Baeza, 2017). Las sucesiones de límite finito las consideraremos convergentes, al igual que lo hacen todos los autores estudiados.

Tabla 4.2. Definiciones de divergencia.

	$x_n = 1/n$	$x_n = n$	$x_n = (-1)^n \cdot n$	$x_n = (-1)^n$
Bartle-Sherbert	Convergente	Divergente	Divergente	Divergente
Pozniak	Convergente	Convergente a infinito de signo determinado	Convergente a infinito	Divergente
Rey Pastor	Convergente	Divergente	Divergente	Oscilante
Pestana	Convergente	Divergente	Oscilante	Oscilante
Arnal-Claros-Sánchez-Baeza	Convergente	Divergente	Ni convergente, ni divergente	Ni convergente, ni divergente

Respecto a nuestra definición de divergencia señalamos lo siguiente:

- Las sucesiones de límite infinito ($+\infty$ ó $-\infty$), las clasificaremos como divergentes al considerar que estas sucesiones sí tienen límite, pero este es infinito. Por tanto, la definición de una sucesión divergente buscada inicialmente será equivalente a la de límite infinito de una sucesión.

- Las que no tienen límite, no las consideraremos ni convergentes, ni divergentes.

No consideraremos en nuestro estudio los límites de las subsucesiones contenidas en la

sucesión inicial, y por tanto no existirá su límite. Esta consideración ha sido tomada por el contexto en el que nos encontramos, siendo éstos los límites estudiados en secundaria.

4.4. Límite infinito de una función en el infinito.

Esta investigación surgió, como ya se ha mencionado anteriormente, para dar continuidad a las ya realizadas por Claros (2010) y Sánchez (2012), en las que se dejó una vía abierta al estudio de otros tipos de límites. Para este trabajo se decidió abordar el límite infinito de una sucesión, preguntándonos si estos fenómenos caracterizados y organizados por este límite también pueden serlo tomando la definición del límite infinito de una función en el infinito.

Para ello consideramos la definición dada por Linés (1983, p.201-202) para límite más infinito de una función en más infinito, del manual *Principios de Análisis Matemático*, por ser el utilizado para la selección de una definición del límite infinito de una sucesión sobre la que se sustenta esta investigación. Es la siguiente:

Definición 4.3.: “Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$ no acotado superiormente. Se dice que f tiene límite $+\infty$, cuando tiende a $+\infty$, si para cada número real H existe un número real K tal que es $f(x) > H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x > K$. Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ ”.

El autor también considera, como definiciones análogas, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty.$$

Aunque Linés (1983) no presenta la definición de tres de los límites anteriores, presentamos a continuación, una definición precisa de cada uno de ellos, enunciadas por nosotros, utilizando la notación y formalidad de la Definición 4.3.

Definición 4.4.: “Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$ no acotado inferiormente. Se dice que f tiene límite $-\infty$, cuando tiende a $+\infty$, si para cada número real H existe un número real K tal que es $f(x) < H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x > K$. Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ ”.

Definición 4.5.: “Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$ no acotado superiormente. Se dice que f tiene límite $+\infty$, cuando tiende a $-\infty$, si para cada número real H existe un número real K tal que es $f(x) > H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x < K$. Se escribe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ ”.

Definición 4.6.: “Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$ no acotado inferiormente. Se dice que f tiene límite $-\infty$, cuando tiende a $-\infty$, si para cada número real H existe un número real K tal

que es $f(x) < H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x < K$. Se escribe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ ”.

Desde un enfoque intuitivo, si analizamos las definiciones presentadas (véase Definición 4.3. y Definición 4.5.) podemos observar que los valores de la función se van haciendo cada vez mayores a medida que “avanzamos” en \mathbb{R} (remarcamos el término avanzamos ya que en la Definición 4.3. los valores de x son cada vez mayores, pero en el caso de la Definición 4.5. dichos valores son cada vez menores). En consecuencia, se puede intuir que la función es creciente no acotada superiormente, es decir, crece ilimitadamente. Por lo tanto, podemos afirmar que el crecimiento intuitivo ilimitado se observa en dichas definiciones. La primera de ellas corresponde al límite más infinito de una función cuando x tiende a más infinito, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, y la segunda al límite más infinito de una función cuando x tiende a menos infinito, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$. Por adaptación de la notación del fenómeno c-i.i., en este caso denominaremos a este fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado para funciones, c.f-i.i.

Desde un enfoque intuitivo, si analizamos las definiciones presentadas (véase Definición 4.4. y Definición 4.6.) podemos observar que los valores de la función se van haciendo cada vez menores a medida que “avanzamos” en \mathbb{R} (remarcamos el término avanzamos ya que en la Definición 4.4. los valores de x son cada vez mayores, pero en el caso de la Definición 4.6. dichos valores son cada vez menores). En consecuencia, se puede intuir que la función es decreciente no acotada inferiormente, es decir, decrece ilimitadamente. Por lo tanto, podemos afirmar que el decrecimiento intuitivo ilimitado se observa en dichas definiciones. La primera de ellas corresponde al límite menos infinito de una función cuando x tiende a más infinito, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, y la segunda al límite menos infinito de una función cuando x tiende a menos infinito, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$. Por adaptación de la notación del fenómeno d-i.i., en este caso denominaremos a este fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado para funciones, d.f-i.i.

Para los límites definidos en la Definición 4.5. y Definición 4.6., $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$, no podemos establecer una analogía con el límite infinito de una sucesión, ya que en una sucesión solo tomamos valores naturales, mientras que en la función tomamos valores reales, positivos y negativos. Los dos fenómenos anteriormente definidos, c.f-i.i. y d.f-i.i. podemos encontrarlos también para estos dos límites como se

ha señalado en los dos párrafos anteriores. Para diferenciar los fenómenos señalados cuando nos encontremos en el caso de $x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$, denominaremos +c.f-i.i. y +d.f-i.i. para el caso de la Definición 3.3. y la Definición 3.4., y -c.f-i.i. y -d.f-i.i. para la Definición 4.5 y Definición 4.6.

Desde un enfoque intuitivo, tanto el fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado (+c.f-i.i, -c.f-i.i) como el fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado (+d.f-i.i, -d.f-i.i) son organizados por cada una de las definiciones anteriores: 4.3. (+c.f-i.i.), 4.4. (+d.f-i.i.), 4.5. (-c.f-i.i.) y 4.6. (-d.f-i.i.).

Desde un enfoque formal, pueden observarse dos procesos que determinan el fenómeno de ida y vuelta en funciones de límite infinito. Analicemos dicho fenómeno en cada definición presentada.

Definición 4.3.

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada número real H existe un número real K ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $f(x) > H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x > K$ ”.

La retroalimentación, en este caso, se manifiesta al observar de forma conjunta ambos procesos. En concreto, interpretando y aplicando los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una función. Esto exige la construcción de una nueva función $H \rightarrow x(H)$.

Establecido un H en el *Eje Y*, “vamos” desde él hasta un K perteneciente a los números reales (no único) y “volvemos” considerando $x > K$ para el que tendremos $f(x) > H$. De esta manera se construye una función real que toma valores reales y que denotamos de manera simplificada como $(H, x(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la función con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

Definición 4.4.

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada número real H existe un número real K ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $f(x) < H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x > K$ ”.

La retroalimentación, en este caso, se manifiesta al observar de forma conjunta ambos procesos. En concreto, interpretando y aplicando los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una función. Esto exige la construcción de una nueva función $H \rightarrow x(H)$.

Establecido un H en el *Eje Y*, “vamos” desde él hasta un K perteneciente a los números reales (no único) y “volvemos” considerando $x > K$ para el que tendremos $f(x) < H$. De esta manera se construye una función real que toma valores reales y que denotamos de manera simplificada como $(H, x(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la función con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

Definición 4.5.

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada número real H existe un número real K ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $f(x) > H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x < K$ ”.

La retroalimentación, en este caso, se manifiesta al observar de forma conjunta ambos procesos. En concreto, interpretando y aplicando los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una función. Esto exige la construcción de una nueva función $H \rightarrow x(H)$.

Establecido un H en el *Eje Y*, “vamos” desde él hasta un K perteneciente a los números reales (no único) y “volvemos” considerando $x < K$ para el que tendremos $f(x) > H$. De esta manera se construye una función real que toma valores reales y que denotamos de manera simplificada como $(H, x(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la función con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

Definición 4.6.

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada número real H existe un número real K ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $f(x) < H$ para todo $x \in X$, que cumpla $x < K$ ”.

La retroalimentación, en este caso, se manifiesta al observar de forma conjunta ambos procesos. En concreto, interpretando y aplicando los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una función. Esto exige la construcción de una nueva función $H \rightarrow x(H)$.

Establecido un H en el *Eje Y*, “vamos” desde él hasta un K perteneciente a los números reales (no único) y “volvemos” considerando $x < K$ para el que tendremos $f(x) < H$. De esta manera se construye una función real que toma valores reales y que denotamos de manera simplificada como $(H, x(H))$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la función con la que trabajamos. La particularidad de esta función está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

Tabla 4.3. Comparación de los fenómenos caracterizados para límite más y menos infinito de una sucesión y una función.

LÍMITE MÁS Y MENOS INFINITO					
		Sucesión		Función	
Fenómenos	Enfoque intuitivo	$a_n \rightarrow +\infty,$ $n \rightarrow +\infty$	$a_n \rightarrow -\infty,$ $n \rightarrow +\infty$	$f \rightarrow +\infty,$ $x \rightarrow +\infty$	$f \rightarrow -\infty,$ $x \rightarrow +\infty$
		c-i.i.	d-i.i.	+c.f-i.i.	+d.f-i.i.
		$n \rightarrow -\infty$ No existe		$f \rightarrow +\infty,$ $x \rightarrow -\infty$	$f \rightarrow -\infty,$ $x \rightarrow -\infty$
				-c.f-i.i.	-d.f-i.i.
	Enfoque formal	i.v.s.i.		i.v.f.i.	

En esta comparación se han tenido en cuenta los posibles cambios de notación, que deben adaptarse por tratarse del límite de una función. Además, se ha intentado ser lo suficientemente precisos como para poder contemplar todas las casuísticas. A lo largo de este estudio, alguno de los casos no se había dado, porque en sucesiones solo podíamos tener $n \rightarrow +\infty$.

4.5. Comparación entre el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión

Claros (2010) en su tesis doctoral ya conjeturaba diferencias significativas entre fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión y el límite infinito de una sucesión. En este apartado, compararemos ambas nociones centrándonos en los requisitos matemáticos y fenómenos organizados por dichas definiciones.

4.5.1. Comparación de los requisitos matemáticos

Los datos mostrados a continuación se encuentran en Claros (2010, p.160-164) y ya fueron recopilados por Sánchez (2012, p.143) en su tesis doctoral para una posterior comparación con el límite finito de una función en un punto.

Tabla 4.4. Requisitos matemáticos del límite finito de una sucesión.

Dependencia	Variable independiente: $\{n \rightarrow a_n\}$
	Variable dependiente: $\{\varepsilon \rightarrow N\}$
Procesos infinitos	- Sin aproximación en la variable dependiente.
	- Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores.
	- Procesos infinitos discretos.
Tipos de infinito	- Infinito potencial presente.
	- Infinito actual numerable.
Acotación	Variable independiente no acotada.
	Variable dependiente acotada.

Los requisitos matemáticos del límite infinito de una sucesión ya fueron considerados en el apartado 4.3. y serán comparados en la siguiente tabla con los del límite finito de una sucesión.

Tabla 4.5. Comparación requisitos matemáticos del límite finito de una sucesión y el límite infinito de una sucesión.

	Límite finito una sucesión			Límite infinito de una sucesión		
Dependencia	Variable	independiente:		Variable	independiente:	
	$\{n \rightarrow a_n\}$			$\{n \rightarrow a_n\}$		
	Variable dependiente: $\{\varepsilon \rightarrow N\}$			Variable dependiente: $\{H \rightarrow v\}$		
Procesos infinitos	- Sin aproximación en la variable independiente.			- Sin aproximación en la variable independiente.		
	- Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores.			- Sin aproximación en la variable dependiente.		
	- Procesos infinitos discretos.			- Procesos infinitos discretos.		
Tipos de infinito	- Infinito potencial presente.			- Infinito potencial presente.		
	- Infinito actual numerable.			- Infinito actual numerable.		
Acotación	Variable	independiente	no acotada.	Variable	independiente	no acotada.
	Variable dependiente acotada.			Variable	dependiente	no acotada.

La diferencia más significativa se encuentra en los procesos infinitos de la variable dependiente, en el caso del límite infinito, no se aproxima a ningún número real en la variable dependiente, hecho que lleva implícito la diferenciación en la no acotación de dicha variable. Además, existe diferencia en la dependencia, donde ε tiende a cero y H tiende hacia infinito, hecho que está relacionado con los procesos infinitos.

En la siguiente figura se recoge la comparación de los requisitos matemáticos entre ambos límites.

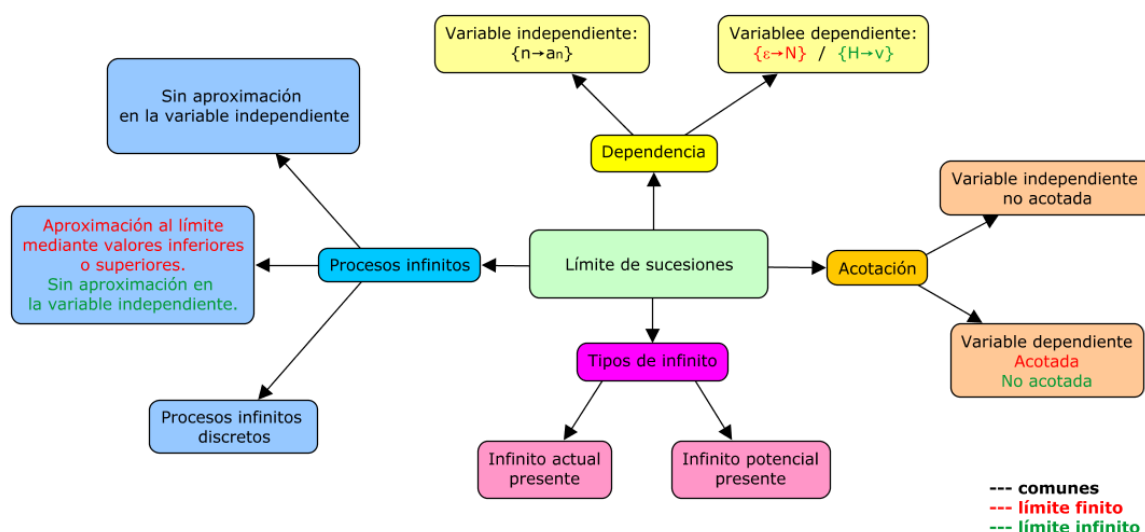


Figura 4.30. Comparación requisitos matemáticos límite finito y límite más y menos infinito de una sucesión.

4.5.2. Comparación de los fenómenos

Los dos fenómenos organizados por la definición del límite finito de una sucesión son: aproximación simple intuitiva e ida-vuelta en sucesiones, cuya definición es la siguiente:

“Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (k, a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores a_1, a_2, \dots, a_k cuando “parecen acercarse” a otro valor fijo” (Claros, 2010, p.147).

El fenómeno ida-vuelta en sucesiones se observa al tomar de forma conjunta los dos siguientes procesos:

- Primer proceso, denominado ida, se produce cuando en la definición aparece la expresión “para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N ”.
- Segundo proceso, denominado vuelta, se produce cuando en la definición aparece la expresión. “si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$ ” (Claros, 2010, p.148).

Caracterizados los fenómenos del límite finito de una sucesión (Claros, 2010), puede establecerse una comparación con los tres fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión.

Desde un enfoque intuitivo, el fenómeno de aproximación simple intuitiva, a.s.i., parece desdoblarse en dos fenómenos, por haber diferenciado el límite $+\infty$ y $-\infty$, obteniendo

los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., y decrecimiento intuitivo ilimitado, d-i.i.

Desde un enfoque formal, existe una analogía entre el fenómeno ida-vuelta en sucesiones, i.v.s., y el fenómeno ida-vuelta en sucesiones con límite más y menos infinito, i.v.s.i. En ambos casos existe una retroalimentación que se manifiesta al observar de forma conjunta los procesos de ida y de vuelta, e interpretar y aplicar los procesos incluidos en cada una de las definiciones, siendo necesaria la construcción de una función unívoca para cada sucesión y que relaciona elementos del *Eje Y* y del *Eje X*.

En la figura siguiente se muestra la síntesis de esta comparación, en la que intervienen los límites finito e infinito (más y menos infinito) de una sucesión.

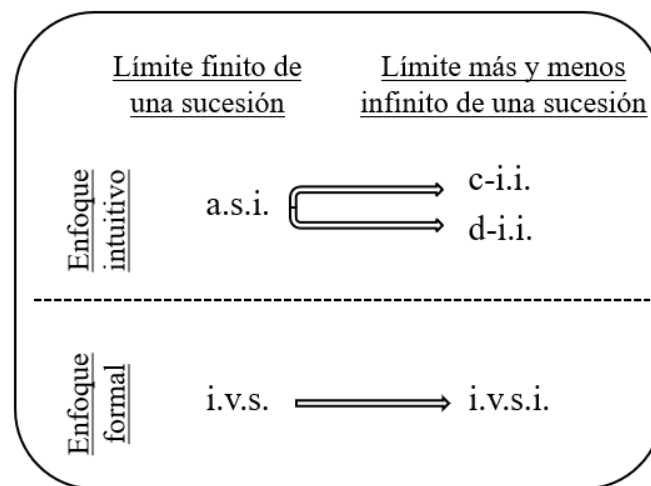


Figura 4.31. Comparación fenómenos límite finito y límite más y menos infinito de una sucesión.

4.6. Aportaciones al marco teórico

En este capítulo hemos podido realizar algunas aportaciones al marco teórico del *Capítulo 3*; correspondientes a la Fenomenología, el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y la Teoría APOS. Estas contribuciones se desarrollan a continuación.

4.6.1. Aportaciones a la fenomenología

Siguiendo a Puig (1997), podemos realizar la siguiente hipótesis: si trabajamos con el alumnado los fenómenos *crecimiento intuitivo ilimitado*, *decrecimiento intuitivo ilimitado* e *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito*, podremos conseguir que estos constituyan buenos objetos mentales del límite infinito de una sucesión.

4.6.2. Aportaciones al Pensamiento Matemático Avanzado

Teniendo en cuenta los apartados anteriores de este capítulo afirmamos:

- Los fenómenos *crecimiento intuitivo ilimitado*, c-i.i., y *decrecimiento intuitivo ilimitado*, d-i.i., son caracterizados desde un punto de vista intuitivo. Están relacionados con el concepto imagen, creado para manejar el concepto de límite infinito de una sucesión y las imágenes mentales asociadas al mismo.
- El fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito*, i.v.s.i., es caracterizado desde un punto de vista formal. Está intrínsecamente relacionado con el concepto definición de límite infinito de una sucesión ya que su caracterización surge a partir de la propia definición de dicho concepto.

Pese a que estamos situando el límite infinito de sucesiones dentro del Pensamiento Matemático Avanzado, para Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) el concepto de límite estará situado en el PME o PMA dependiendo del trabajo que se realice con él. En nuestro caso, los fenómenos c-i.i. y d-i.i. pertenecerán al PME por realizar solamente el cálculo del límite, y no una abstracción propiamente dicha del concepto de límite infinito.

Por el contrario, el fenómeno i.v.s.i. lo situamos dentro del PMA, ya que requiere un pensamiento deductivo y un riguroso razonamiento. Las relaciones mantenidas entre estos fenómenos y el pensamiento matemático elemental y avanzado se reflejan en el siguiente esquema.

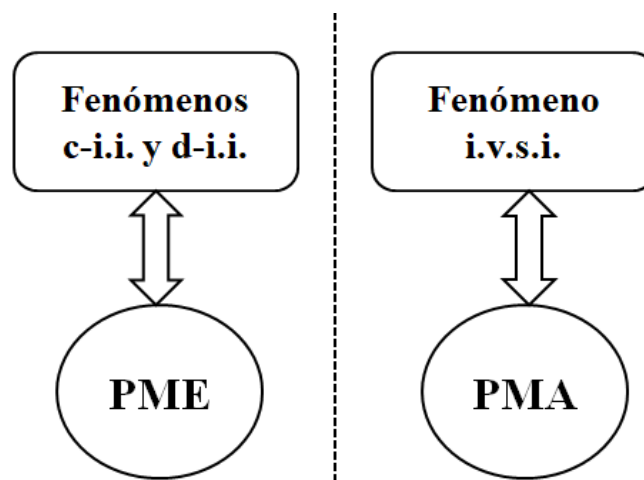


Figura 4.32. Fenómenos de límite infinito de sucesiones tomados de forma independiente.
Pensamiento Matemático.

Por otro lado, la utilización conjunta de estos tres fenómenos también implicará la utilización de elementos propios del PMA.

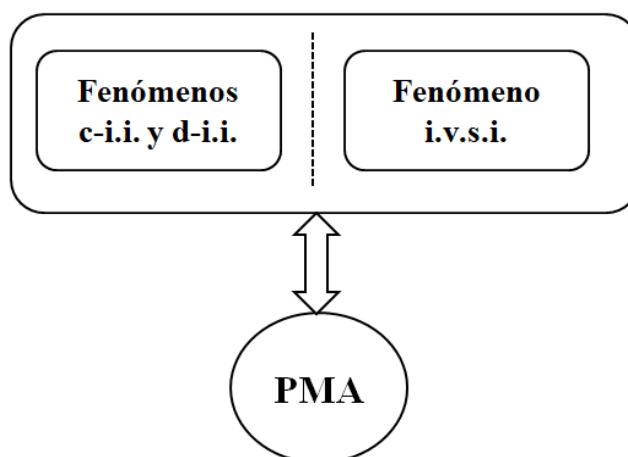


Figura 4.33. Fenómenos de límite infinito de sucesiones tomados de forma conjunta.
Pensamiento Matemático.

Pretendiendo realizar una analogía de los procesos cognitivos del límite infinito de una sucesión con los ya establecidos para el límite finito de una sucesión, encontramos el estudio realizado por Claros et al. (2016a), donde para realizar una conexión entre concepto imagen, concepto definición y los fenómenos caracterizados, se comienza delimitando el ámbito intuitivo y el ámbito formal.

En nuestro caso, donde manejamos los fenómenos c-i.i. y d-i.i., a partir de la ayuda del sistema de representación elegido, se observa que los términos de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que avanzamos en ella (c-i.i.) o cada vez se van haciendo menores a medida que avanzamos en la misma (d-i.i.), obteniéndose como

candidato a límite de la sucesión $+\infty$. Ambos fenómenos forman parte del concepto imagen generado a partir de la definición de límite infinito de una sucesión y también del ámbito intuitivo.

Mientras tanto, el fenómeno i.v.s.i. en el que realizamos la construcción de una función $H \rightarrow n(H)$ de \mathbb{R} en \mathbb{N} , satisface la definición de límite infinito de una sucesión para valores concretos de H . El número real H es aquel para el que vamos a poder encontrar un valor mayor en la sucesión, en el caso de las sucesiones con límite más infinito, o un valor menor en la sucesión, en el caso de sucesiones con límite menos infinito. Con el empleo de dicho fenómeno no podemos afirmar que hayamos realizado una demostración matemática de que la sucesión tiene límite infinito o menos infinito, pero hemos aumentado la confianza en el candidato a límite seleccionado y en consecuencia en el concepto imagen que se ha generado. Además, la colección de valores que tomamos para la función genera una imagen demostración que nos ayudará a afrontar la misma. Después, si tenemos la formación matemática adecuada, al construir la función de \mathbb{R} en \mathbb{N} demostraremos que el candidato a límite seleccionado realmente lo es, y nos acercaremos al concepto de definición formal del límite infinito de una sucesión para un caso concreto. En este caso nos encontramos con un fenómeno que forma parte del ámbito formal.

A partir de elegir distintos valores de H no se tendrá construida todavía una demostración formal, pero nos acercamos a una imagen demostración. Será a partir de la construcción de la función donde existirá una generalización, y por tanto una demostración formal del límite infinito de una sucesión a partir de la sucesión considerada.

4.6.3. Aportaciones a la Teoría APOS

En el caso que nos ocupa, el límite infinito de una sucesión, se proponen acciones para el aprendizaje del concepto de límite infinito de una sucesión. Estas acciones se constituyen a partir de los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., o decrecimiento intuitivo, d-i.i., según el límite sea $+\infty$ ó $-\infty$, que ofrecerán un primer candidato a límite. Al reiterar esta acción, el estudiante reflexiona sobre ella y se interioriza en un proceso. El proceso utilizado en nuestro caso particular será la construcción del fenómeno ida y vuelta en sucesiones de límite infinito. Si el individuo es capaz de concebir todos los procesos y acciones llevados a cabo a la hora de calcular el límite infinito de una sucesión podrá

realmente decir que el alumno ha construido el objetivo cognitivo límite infinito de una sucesión para el caso concreto que estamos trabajando.

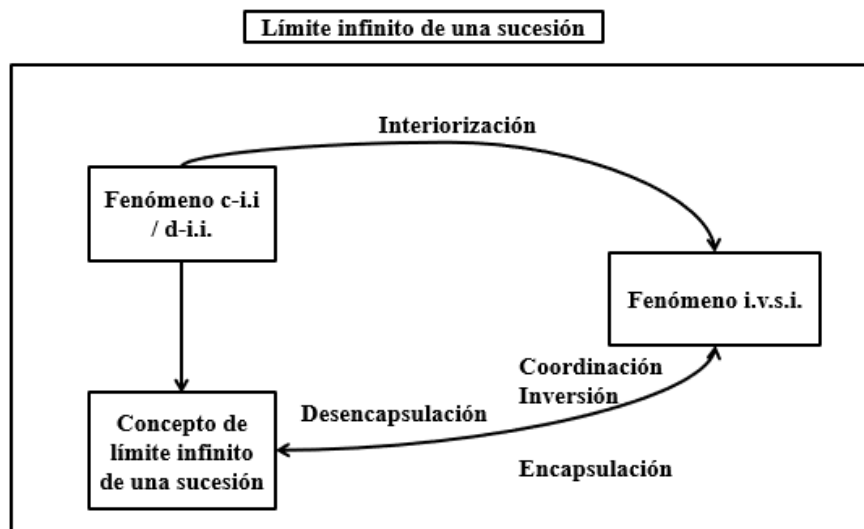


Figura 4.34. Teoría APOS en el límite infinito de sucesiones.

4.7. Conclusiones

Después del estudio teórico realizado podemos establecer el logro de las siguientes conclusiones:

1. Se ha seleccionado una definición de límite más infinito aceptada por la comunidad matemática dedicada a la educación.

Después de la realización de dos cuestionarios, compuestos por diferentes definiciones de límite más infinito de una sucesión, se ha logrado seleccionar una definición cuya calidad de contenido y redacción es aceptada por la comunidad matemática dedicada a la docencia y a la investigación didáctica. En el primero quedaron latentes las dificultades del término divergencia, presentes en alguna de las definiciones, debido a la no unicidad de su definición, ni entre el profesorado, ni entre los diferentes manuales de referencia. Además, el entendimiento otorgado a este término por cada uno de los expertos influía en la elección de las definiciones aceptadas. Por ese motivo, se decidió omitir este término, necesitando la realización de una nueva búsqueda y selección de definiciones que conformasen el segundo cuestionario. Este segundo cuestionario es el que determinó la elección de la definición seleccionada que es la siguiente:

“Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$ ” (Linés, 1983, p.29).

2. Se han descrito con detalle tres fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión denominados crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), tomando un enfoque intuitivo de la definición seleccionada anteriormente. Se ha definido con detalle el fenómeno de ida-vuelta en el infinito de sucesiones (i.v.s.i.) desde un enfoque formal de la misma.

Ha sido importante señalar las diferencias fenomenológicas entre límite infinitos (más y menos infinito), ya que para el primero encontramos c-i.i. e i.v.s.i., mientras que para el segundo son d-i.i. e i.v.s.i. Señalamos que para el análisis de estos fenómenos presentes en el límite menos de infinito de una sucesión, se ha tomado por coherencia con el estudio realizado sobre la elección de la definición de límite más infinito, al mismo autor. Es la siguiente:

“Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n < H$, para todo $n \geq v$.” (Linés, 1983, p.29)

3. Se han presentado ejemplos de fenómenos extraídos de libros de texto tanto para el límite más infinito como para el límite menos infinito de una sucesión, que permitan garantizar la existencia de ellos en la enseñanza, ya que el libro de texto es un material muy importante para el profesorado.

Para ello se han utilizado distintos formatos: definiciones y ejemplos, y sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Dada la importancia que consideramos que tiene esta búsqueda, se va a dedicar el siguiente capítulo a profundizar más en este aspecto, analizando la secuencia didáctica de cada libro de texto y realizando la clasificación de los tres fenómenos que éste usa en el estudio del límite infinito (más y menos infinito) de una sucesión.

4. Se ha profundizado en el conocimiento matemático implícito en la definición de límite infinito (más y menos infinito) de una sucesión.

Es a partir de la definición seleccionada, obtenida del segundo cuestionario, con la que se han podido enunciar los elementos que están involucrados en ella: dependencia, suficientemente grande, procesos infinitos, tipos de infinito, acotación y divergencia.

5. Se ha establecido una primera reflexión sobre los fenómenos organizados por la definición de límite infinito de una función en el infinito.

De este estudio surgen nuevas líneas de investigación, como por ejemplo la que se ha podido comenzar a conjeturar: los fenómenos organizados por una definición del límite más y menos infinito de una función en el más y menos infinito, en el que se observan nuevas casuísticas no contempladas anteriormente en el límite de sucesiones, ya que en dicho caso la variable independiente siempre tiende a más infinito.

6. Se han comparado los fenómenos definidos por el límite infinito y el límite finito de una sucesión y se han establecido las diferencias existentes en el conocimiento matemático implícito para manejar ambos límites.

Dada la caracterización de los fenómenos observados a partir de una definición de límite infinito de una sucesión, y los ya caracterizados en el estudio de Claros (2010) para el límite finito de una sucesión, se ha podido realizar la comparación entre ellos, pudiendo

contemplar un desdoblamiento del fenómeno a.s.i. en los fenómenos c-i.i. y d-i.i. en el caso del enfoque intuitivo, y una correspondencia entre la caracterización de i.v.s. e i.v.s.i. La correspondencia entre el fenómeno i.v.s. e i.v.s.i. así como los elementos necesarios para pasar de uno a otro fenómeno, quedan para futuras investigaciones.

Además, ha sido posible comparar los siguientes requisitos matemáticos de ambas definiciones: dependencia, acotación, tipos de infinito y procesos infinitos.

Finalmente, se ha señalado la aportación de los fenómenos descritos a la teoría APOS y al Pensamiento Matemático Avanzado, estableciendo la relación entre los distintos elementos de dichas teorías y los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión.

Capítulo 5. Fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. en libros de texto

5. Fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. en libros de texto

En este capítulo se pretenden identificar los fenómenos “crecimiento intuitivo ilimitado” (c-i.i.), “decrecimiento intuitivo ilimitado” (d-i.i.) e “ida y vuelta en sucesiones de límite infinito” (i.v.s.i.) a partir del análisis de libros de texto de matemáticas de secundaria en un periodo de 80 años, desde el año 1936 hasta el año 2016. Por simplificación de su notación, a partir de ahora utilizaremos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., como ya se estableció en dicho capítulo

En el primer apartado, 5.1, se describen los rasgos principales del estudio de libros de texto realizado, una breve descripción de la muestra de 35 libros considerada, la cual ha sido organizada por décadas y por periodos legislativos españoles, y el guion seguido para el análisis de cada uno de estos libros de texto. El guion está inspirado en el que ya elaboraron Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales, y puede ser replicable en futuros estudios de libros de texto.

En el apartado 5.2 se presentan cada uno de los libros de texto considerados que conforman la muestra, indicando la codificación utilizada en todo su análisis y la editorial que lo publicó. Como ya se indicase en el apartado 5.1, esta presentación de la muestra se organiza por décadas y por periodos legislativos en España. Además, en este apartado se presenta un ejemplo del análisis seguido para uno de los libros de texto. Éste ha sido seleccionado por su amplia variedad de identificación fenomenológica, de sistemas de representación y de formatos.

El apartado 5.3 muestra los resultados arrojados después de un análisis global. Para ello se han realizado tablas de frecuencias para cada uno de los fenómenos, c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., considerando la utilización de los sistemas de representación y de los formatos. Además, se ha analizado una posible relación entre las siguientes variables: fenómenos, sistemas de representación y formatos.

En el apartado 5.4 se encuentra el estudio temporal, a lo largo de los últimos 80 años, de cada uno de estos fenómenos. Para realizar la comparación entre las distintas etapas se han considerado dos maneras de organización: las décadas y los periodos legislativos, que ya fueron establecidos por Sierra et al. (1999) y que han tenido que ser ampliados por el transcurso del tiempo desde este estudio hasta la actualidad.

En el apartado 5.5 se relacionan los resultados obtenidos en los apartados 5.3 y 5.4 con los que ya obtuvieron Claros (2010) para el límite finito de una sucesión, y Sánchez (2012) para el límite finito de una función en un punto. Dado que no existe una relación biunívoca entre los fenómenos descritos en este estudio y los de estos autores se considerarán los enfoques de éstos: intuitivo y formal.

En el último apartado, 5.6, se muestran las conclusiones sobre el límite infinito de una sucesión en libros de texto alcanzados a partir de este estudio.

Además, en los anexos finales de esta memoria, *Anexo A2*, se encuentran los informes de cada uno de los 35 libros de texto.

5.1. Estudio empírico de libros de texto

Este apartado se encuentra estructurado en tres subapartados en los que se presentan los rasgos principales de este estudio empírico de libros de texto; una breve descripción de la muestra, tomando en consideración dos criterios organizativos: por décadas y por periodos legislativos en España; y el guion estructurado que se ha seguido para el análisis de cada uno de los manuales.

5.1.1. Rasgos principales del estudio de libros de texto

El libro de texto es un recurso habitual en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las aulas, e incluso su uso es el que determina el currículo real, siendo complicada su elección por parte del profesorado (Monterrubio & Ortega, 2009).

En esta misma corriente, autores como Conejo y Ortega (2014) destacan que el uso de los libros de texto determina la enseñanza de un país, incluso con mayor influencia que las órdenes ministeriales.

Tal y como se recogió en el apartado 2.3.3 de este trabajo, Sierra et al. (2003) establecieron cuatro periodos 1940-1967, 1967-1975, 1975-1995 y 1995-2000 para el estudio de la noción de límite en los libros de texto. Estos mismos fueron los utilizados por Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales, teniendo que ampliar el último de ellos hasta 2005, para actualizarlo a la fecha de su estudio. En el caso de esta investigación, los recientes cambios legislativos en España han generado la necesidad de dos nuevos periodos, 2005-2014 y 2015-Actualidad, correspondientes a las dos últimas leyes educativas.

En el *Capítulo 4* fueron caracterizados tres fenómenos organizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. En la identificación de cada uno de los fenómenos nos ayudaremos, para su clasificación, de dos categorías: sistema de representación y formato. Los sistemas de representación que han sido considerados en la identificación de estos fenómenos en los diferentes libros de texto son: verbal, gráfico, tabular y simbólico, mientras que los formatos a distinguir son: definición y ejemplo.

La combinación de los tres fenómenos, los cuatro sistemas de representación y los dos formatos dan lugar a 24 posibles presentaciones del límite infinito de una sucesión a identificar. Esta combinación ya fue presentada en la Tabla 4.1 del apartado 4.2.6.

Como se muestra en los sucesivos apartados de este capítulo, queda latente en este estudio empírico de los libros de texto que ha sido posible identificar los tres fenómenos caracterizados en algunos de los sistemas de representación y formatos. Además, no solo se han identificado, sino que ha sido posible realizar un análisis de las diferentes etapas educativas describiendo su evolución para dar con ello respuesta cuestiones sobre su enseñanza.

5.1.2. Descripción de la muestra

En este estudio se ha considerado una muestra de 35 libros de texto, de 18 editoriales diferentes y publicados entre 1936-2016 en España. En el análisis temporal se consideran dos aspectos organizativos: las décadas y los periodos legislativos. Las décadas constituyen un aspecto puramente temporal, y las consideradas han sido: 1936-1949, 1950-1969, 1970-1979, 1980-1989, 1990-1999, 2000-2009 y 2010-2016. Los dos primeros periodos son más amplios por la dificultad de encontrar libros de texto con una antigüedad superior a 50 años. Respecto al segundo criterio de organización, los periodos legislativos, atiende a las diferentes leyes educativas en España: 1936-1974, 1975-1994, 1995-2004, 2005-2014 y 2015-2016. Existe un ligero desfase entre el comienzo de la ley en vigor y el comienzo del periodo considerado, motivado por su implantación en el curso donde aparece el límite infinito de una sucesión: 6º curso, para Ley Moyano; 2º BUP, para LGE; y 1º Bachillerato, para LOGSE, LOE y LOMCE.

La muestra utilizada es intencional, ya que se han analizado aquellos libros de texto a los que se ha tenido acceso, además de considerar diferentes fechas y editoriales de publicación. Para ello se han utilizado las bibliotecas universitarias de las facultades de Educación, y de sus departamentos, de la Universidad Complutense de Madrid y de la Universidad de Zaragoza, así como del Instituto de Enseñanza Secundaria Pedro Espinosa de Antequera (Málaga), y diferentes fondos particulares de algunos docentes. Para los manuales más antiguos, editados entre los años 1936 y 1969, se ha tenido que recurrir a la Biblioteca Nacional de España (BNE).

En las siguientes tablas se muestra una descripción resumida de la muestra, atendiendo a los dos aspectos organizativos que acaban de describirse: décadas y periodos legislativos.

Tabla 5.1. Resumen de la muestra de libros de texto por décadas.

Décadas	Nº de libros	Nº de editoriales
1936-1949	3	2
1950-1969	4	4
1970-1979	5	5
1980-1989	5	4
1990-1999	6	5
2000-2009	8	5
2010-2016	4	3

Tabla 5.2. Resumen de la muestra de libros de texto por periodos legislativos.

Periodo legislativo	Nº de libros	Nº de editoriales
1936-1974	8	6
1975-1994	13	10
1995-2004	6	4
2005-2014	4	3
2015-2016	4	3

Los libros que forman la muestra son solo aquéllos en los que se ha identificado alguno de los tres fenómenos caracterizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión, es decir, c-i.i., d-i.i. y/o i.v.s.i. Han sido causa de exclusión aquéllos en los que no apareciese el límite infinito de una sucesión y también aquéllos que, aunque se presentase el límite infinito de una sucesión, no se identificase ninguno de estos fenómenos.

5.1.3. Guion estructurado para el análisis

Para este estudio empírico de libros de texto se ha realizado un análisis minucioso de cada una de las unidades donde apareciese la noción límite infinito de una sucesión. Para ello se elaboró un guion estructurado que facilitase dicho análisis. Éste se componía de: ficha del libro, secuenciación, fenómenos identificados, ficha fenomenológica y comentarios.

Cada uno de estos 5 criterios, que serán descritos a continuación, permiten recuperar la información del manual y ser capaces de comprender cada uno de los pasos realizados, además de poder replicar en estudios futuros a otros límites.

5.1.3.1 Ficha del libro

La ficha del libro ha sido creada para facilitar la organización e identificación de cada uno de los manuales. En esta ficha se recogen los siguientes datos: código, título, autor, año, ley en vigor y editorial.

Código			
Título			
Autor			
Año		Ley en vigor	
Editorial			

Figura 5.1. Ficha del libro.

- El código, siguiendo la nomenclatura establecida por Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros, Sánchez y Coriat (2016b), identifica de forma unívoca cada uno de los libros de texto. En el caso particular de esta investigación está compuesto por 8 caracteres: el primero de ellos, “L”, hace referencia a que es un libro de texto lo que se está analizando; los caracteres que ocupan el segundo y tercer lugar, “SI”, indican que el estudio llevado a cabo es sobre el límite infinito de sucesiones; en las posiciones cuarta, quinta y sexta, “xyz”, se referencian los tres últimos dígitos de la década, así para un manual del año 1986 se utilizaría “980”; los dos últimos caracteres, “ab”, permiten identificar a cada uno de los libros de texto de una misma década, ordenados de forma correlativa.

En este caso, “L”, como ya sucediese en los dos estudios previos, es el único valor de la variable, ya que la muestra está compuesta únicamente por libros de texto, pero esta codificación nos permitiría continuar en un futuro con el análisis de soportes digitales. La codificación “SI” nos ha permitido realizar la comparación con el estudio de Claros (2010), donde se utilizaba “S” por ser sucesiones con límite finito; con el de Sánchez (2012) quien utilizaba “F” para el límite finito de una función en un punto; y con otros posibles estudios venideros de diferentes límites.

- El título se recoge de la portada de cada uno de los libros de texto. En él es habitual observar la asignatura o materia y el curso para el que ha sido desarrollado.

- El autor o autores del libro de texto se han obtenido de la portada, de la primera página o de la última. El orden plasmado en la ficha del libro es el mismo que establece el manual.
- El año corresponde a la fecha de publicación, recurriendo en algunos casos a la fecha que indica el depósito legal.
- La ley en vigor se ha tomado en relación con el año de publicación. En algunos manuales se indica de forma explícita, pero en la gran mayoría se ha tenido que recurrir a su fecha de publicación y establecer la ley vigente para ese curso.
- La editorial ha sido recogida de la portada del libro de texto.

5.1.3.2 *Secuenciación*

En el análisis de los libros de texto no solo se ha tenido en cuenta el apartado o subapartado donde apareciese el límite infinito de sucesiones, ni únicamente aquellos fragmentos donde se identificasen fenómenos, sino que se ha analizado la unidad completa donde se encuentra. En la secuenciación se realiza un resumen de las nociones que aparecen; definiciones y ejemplos, indicando su orden; la presencia o ausencia de ejercicios resueltos y propuestos, así como el lugar reservado para ellos; la ubicación del límite infinito de una sucesión frente al límite finito de una sucesión; y la presencia del límite de funciones y su ubicación frente al límite de una sucesión.

5.1.3.3 *Fenómenos identificados*

En este criterio se recogen cada uno de los fragmentos en los que se ha identificado alguno de los tres fenómenos caracterizados en este estudio: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. En cada uno de ellos, además de indicar el fenómeno, se especifica el sistema de representación: verbal, gráfico, tabular o simbólico, y el formato: definición o ejemplo, en el que se encuentra.

El orden tomado para su presentación es exactamente el mismo en el que aparece en el libro de texto y su código identificativo contiene dos aspectos: el código de ubicación y el código del fenómeno.

El código de ubicación concatena, separado por un punto, el código establecido para el libro de texto con el orden en el que aparece, y para el que se reservan dos dígitos. En ocasiones, cuando nos encontramos con un ejemplo o una definición donde se identifica más de un fenómeno, a este código se le ha concatenado una nueva numeración de dos dígitos separada por otro punto.

El código del fenómeno contiene en primer lugar el fenómeno identificado, seguido de un paréntesis con dos letras, las cuales se encuentran separadas por un guion “-”. La primera de ellas presenta el sistema de presentación: verbal (v), gráfico (g), tabular (t) o simbólico (s), mientras que la segunda indica el formato: definición (d) o ejemplo (e).

LSI99001.02 c-i.i. (v-d)

Figura 5.2. Ejemplo de código identificativo de un fragmento.

LSI99001.08.02 d-i.i. (g-e)

Figura 5.3. Ejemplo de código identificativo de un fragmento con varios fenómenos.

5.1.3.4 Ficha fenomenológica

La ficha fenomenológica recopila, en una tabla, los tres fenómenos encontrados en un libro de texto, clasificados según su sistema de representación y formato, utilizando su código identificativo. En la figura siguiente se muestra la tabla utilizada.

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal						
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Figura 5.4. Ficha fenomenológica.

5.1.3.5 Comentarios

En este apartado se indica el título de la unidad en la que se encuentra el límite infinito de una sucesión, el número de páginas totales y las reservadas para el límite infinito de una sucesión, su ubicación frente al límite finito de una sucesión y los diferentes límites de una función, si se encontrasen en esa misma unidad.

Además, se precisan algunos aspectos sobre las colecciones de ejercicios resueltos y propuestos, así como algún rasgo identificado que lo diferencia de otros libros de texto.

5.2. Muestra de libros de texto y ejemplo de uno de ellos

En este apartado se presenta la muestra considerada, ordenada por décadas y por periodos legislativos. Además, se toma un ejemplo de libro de texto para mostrar el guion estructurado seguido. El resto se encuentran en el *Anexo A2*.

5.2.1. Muestra

En las dos tablas siguientes se presenta la muestra tomada para este estudio; en ella además de indicar la década o periodo legislativo, se toma el código de cada uno de los libros y la editorial que lo publicó.

Tabla 5.3. Muestra de libros de texto organizada por décadas.

Década	Código del libro	Editorial
1936-1949	LSI93001	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI93002	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI94001	Stylos
1950-1969	LSI95001	Nuevas gráficas
	LSI95002	SAETA
	LSI96001	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI96002	Summa
1970-1979	LSI97001	ECIR
	LSI97002	Librería Central
	LSI97003	Magisterio Español
	LSI97004	SM
	LSI97005	Anaya
1980-1989	LSI98001	AKAL
	LSI98002	Alhambra
	LSI98003	Vicens-vives
	LSI98004	Edebé
	LSI98005	Alhambra
1990-1999	LSI99001	ECIR
	LSI99002	Alhambra
	LSI99003	Edelvives
	LSI99004	SM
	LSI99005	SM
	LSI99006	Santillana
2000-2009	LSI00001	Bruño
	LSI00002	Oxford
	LSI00003	SM
	LSI00004	SM
	LSI00005	SM
	LSI00006	Anaya
	LSI00007	Anaya
	LSI00008	Santillana
2010-2016	LSI01001	Santillana
	LSI01002	Santillana
	LSI01003	Edebé
	LSI01004	SM

Tabla 5.4. Muestra de libros de texto organizada por periodos legislativos.

Periodo legislativo	Código del libro	Editorial
1936-1974 (Ley Moyano)	LSI93001	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI93002	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI94001	Stylos
	LSI95001	Nuevas gráficas
	LSI95002	SAETA
	LSI96001	Ministerio de Educación y Ciencia
	LSI96002	Summa
	LSI97001	ECIR
1975-1994 (LGE)	LSI97002	Librería Central
	LSI97003	Magisterio Español
	LSI97004	SM
	LSI97005	Anaya
	LSI98001	AKAL
	LSI98002	Alhambra
	LSI98003	Vicens-vives
	LSI98004	Edebé
	LSI98005	Alhambra
	LSI99001	ECIR
	LSI99002	Alhambra
	LSI99003	Edelvives
	LSI99004	SM
1995-2004 (LOGSE)	LSI99005	SM
	LSI99006	Santillana
	LSI00001	Bruño
	LSI00002	Oxford
	LSI00003	SM
	LSI00004	SM
2005-2014 (LOE)	LSI00005	SM
	LSI00006	Anaya
	LSI00007	Anaya
	LSI00008	Santillana
2015-2016 (LOMCE)	LSI01001	Santillana
	LSI01002	Santillana
	LSI01003	Edebé
	LSI01004	SM

5.2.2. Ejemplo

A continuación, se presenta el resultado del estudio de uno de los libros de texto analizados tras proceder con el guion estructural descrito previamente. Su elección atiende a la amplia variedad de fenómenos, sistemas de representación y formatos que han sido identificados en él.

Ficha del libro

Código	LSI99005		
Título	Ciencias de la Naturales y de la salud - tecnología, matemáticas. 1º Bachillerato		
Autor	Vizmanos, J.R., Anzola, M.		
Año	1996	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	SM		

Secuenciación

1. Presentación de las sucesiones nulas a partir de ejercicios resueltos y su definición.
2. Presentación de las sucesiones no nulas, en las que se incluyen las sucesiones con límite finito a partir de ejercicios resueltos y su definición.
3. Ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite más infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular.
4. Definición de límite más infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal.
5. Ejercicios resueltos que concluyen el apartado de límite más infinito de una sucesión.
6. Ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite menos infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular.
7. Definición de límite menos infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal.
8. Ejercicios resueltos que concluyen el apartado de límite menos infinito de una sucesión.
9. Presentación del número e y un ejemplo de su aplicación.
10. Introducción del límite de funciones a través de una idea intuitiva y de su definición.

Fenómenos identificados

LSI99005.01.01 c-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	\rightarrow	$+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	\rightarrow	$+\infty$

LSI99005.01.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «listón» se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo, $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

LSI99005.01.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Por tanto,

$$n^2 + 1 > K \text{ para todo } n > 10\,000$$

LSI99005.01.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por grande que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán mayores que K .

LSI99005.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión de números reales a_n tiene por límite $+\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n > K$.
Se escribe: $\lim a_n = +\infty$

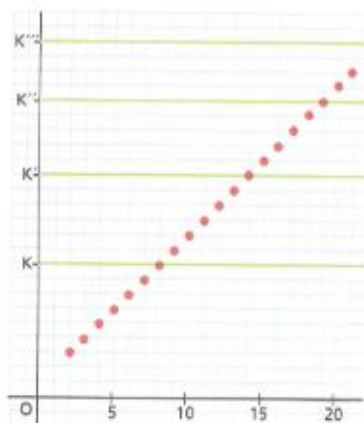
LSI99005.03 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

1. ¿A qué valor se aproximan las sucesiones $a_n = n^2$, $a_n = 4n^3$, $a_n = 5n^4$, ...?
A medida que n se hace mayor los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego $\lim n^2 = \lim 4n^3 = \lim 5n^4 = +\infty$, ...

LSI99005.04.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación gráfico.



LSI99005.04.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Si la sucesión tiende a $+\infty$, cualquier listón que pongamos, por alto que sea, será superado por términos simplemente con formar uno suficientemente grande.

LSI99005.05.01 d-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	\rightarrow	$+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	...	\rightarrow	$-\infty$

LSI99005.05.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez menores, pero de forma que por bajo que sea el «listón» se pueden encontrar términos menores que él. Si fijamos un valor muy bajo, por ejemplo, $K = -100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son menores que el valor previamente fijado:

LSI99005.05.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\begin{aligned} \text{Por tanto,} \quad & -10\,000^2 + 1 = -99\,999\,999 \\ & -n^2 + 1 < K \text{ para todo } n > 10\,000 \end{aligned}$$

LSI99005.05.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Por pequeño que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán mayores que K .

LSI99005.06 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión de números reales a_n tiene por límite $-\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n < K$.
Se escribe: $\lim a_n = -\infty$

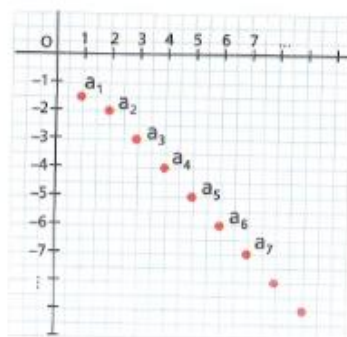
LSI99005.07 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

1. ¿A qué valor se aproximan las sucesiones $a_n = -2n^2$ y $a_n = -6n^3, \dots$?
 A medida que n se hace mayor los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego $\lim -2n^2 = \lim -6n^3 = \lim -7n^4 = -\infty, \dots$

LSI99005.08.01 d-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación gráfico.



Representación gráfica de la sucesión
 $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

LSI99005.08.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Representación gráfica de la sucesión
 $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
 Si la sucesión tiende a $-\infty$, cualquier
 listón que pongamos, por bajo que
 sea, será superado por términos
 simplemente con formar uno

Ficha fenomenológica

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99005.01.04 LSI99005.02 LSI99005.05.04 LSI99005.06	LSI99005.01.02 LSI99005.04.02 LSI99005.05.02 LSI99005.08.02		LSI99005.03		LSI99005.07
	Gráfico				LSI99005.04.01		LSI99005.08.01
	Tabular				LSI99005.01.01		LSI99005.05.01
	Simbólico		LSI99005.01.03 LSI99005.05.03				

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Funciones: Límites y continuidad”. En ella se encuentran las siguientes nociones: sucesiones nulas, límite de sucesiones, sucesiones no nulas, límite más infinito de una sucesión y límite menos infinito de una sucesión. Posteriormente se presenta la avaricia del usurero y el número e . En la última parte de la unidad se encuentra el límite de funciones, presentado a partir de una idea intuitiva y después de las diferentes definiciones. Se contemplan los límites determinados e indeterminados, los límites de funciones racionales, los límites de funciones irracionales, los límites de funciones trigonométricas y la continuidad en un punto. La unidad cuenta con un total de 20 páginas, de las que las 17 primeras intercalan la teoría y los ejercicios resueltos. En las 3 últimas, se encuentran los ejercicios y problemas propuestos, pero ninguno de ellos sobre el límite de una sucesión. De las 17 páginas que intercalan teoría y ejercicios resueltos, 4 de ellas son del límite de una sucesión, 2 del límite finito y otras 2 del límite infinito.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la definición y ejercicios resueltos del límite finito de una sucesión nula, encontrándose dividido en el límite de una sucesión nula y el límite de una sucesión no nula.

El apartado “Límite más infinito de una sucesión” comienza, a modo de presentación, con un ejemplo en el sistema de representación tabular. Posteriormente se define, de manera formal, el límite más infinito de una sucesión. Finalmente se presentan algunos ejemplos, concluyendo el apartado sin la propuesta de ejercicios a resolver por parte del alumno. Análogamente, se encuentra el apartado “Límite menos infinito de una sucesión”, el cual

tiene la misma estructura que el anterior. Durante la unidad se trata tanto el límite infinito de manera intuitiva como formal, utilizando los 4 sistemas de representación: gráfico, tabular, verbal y simbólico. Además, y motivado por la variedad de representaciones, definiciones y ejemplos, el alumnado puede alcanzar una cierta soltura del lenguaje formal del límite infinito.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al final de la unidad, ninguno de ellos del límite de una sucesión.

5.3. Los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. en la muestra

En este apartado se encuentran las tablas de frecuencias de cada uno de los tres fenómenos, c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. atendiendo a cada uno de los sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular y simbólico, y a cada uno de los formatos: definición y ejemplo.

5.3.1. Tabla de frecuencias del fenómeno c-i.i.

En la tabla siguiente se muestra la frecuencia absoluta del fenómeno c-i.i., acompañada de los códigos de ubicación.

Ha querido resaltarse la no incidencia de alguno de los códigos fenomenológicos coloreando de gris el espacio reservado a los códigos de ubicación.

Tabla 5.5. Recuento del fenómeno c-i.i. con códigos de ubicación.

Código fenómeno	Frecuencia absoluta	Códigos de ubicación
c-i.i. v-d	19	LSI93002.01, LSI95001.03, LSI95001.04, LSI95002.01, LSI96002.01, LSI97002.02.01, LSI97003.01.01, LSI97005.01, LSI97005.03, LSI98001.02, LSI98003.01.01, LSI99001.02, LSI99002.01, LSI99006.01, LSI00001.01, LSI00001.02, LSI00006.02, LSI00007.01, LSI01003.02
c-i.i. v-e	25	LSI93001.01, LSI93002.03, LSI96002.02, LSI97004.01, LSI98001.01.01, LSI98001.01.02, LSI98001.05.02, LSI98002.01, LSI98002.02, LSI98004.01, LSI98005.01.02, LSI99001.03, LSI99001.01, LSI99001.02, LSI99005.03, LSI00001.03, LSI00001.04.01, LSI00003.05, LSI00005.01.01, LSI00006.01.02, LSI00008.05.01, LSI01001.01, LSI01002.01, LSI01003.01.02, LSI01004.01
c-i.i. g-d	0	
c-i.i. g-e	8	LSI98005.01.01, LSI99004.05.01, LSI99005.04.01, LSI00001.04.02, LSI00002.01.02, LSI00003.03.01, LSI00005.01.02, LSI00006.01.01
c-i.i. t-d	0	
c-i.i. t-e	4	LSI99005.01.01, LSI00002.01.01, LSI00003.01.01, LSI01003.01.01
c-i.i. s-d	0	
c-i.i. s-e	0	

Tabla 5.6. Recuento del fenómeno c-i.i. con subtotales.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	19	0	0	0	19
Ejemplo	25	8	4	0	37
Subtotales	44	8	4	0	56

Como puede observarse en la Tabla 5.6 no se han identificado el fenómeno c-i.i. en el sistema de representación simbólico en ninguno de los formatos ni definiciones en el sistema de representación gráfico y tabular, en ninguno de los libros de texto consultados.

El sistema de representación verbal presenta una mayor frecuencia absoluta: 44 de los 56 fragmentos, lo que representa un 78.57%; el formato ejemplo es superior al formato definición.

Para poder visualizar esta comparativa se presenta el siguiente gráfico.

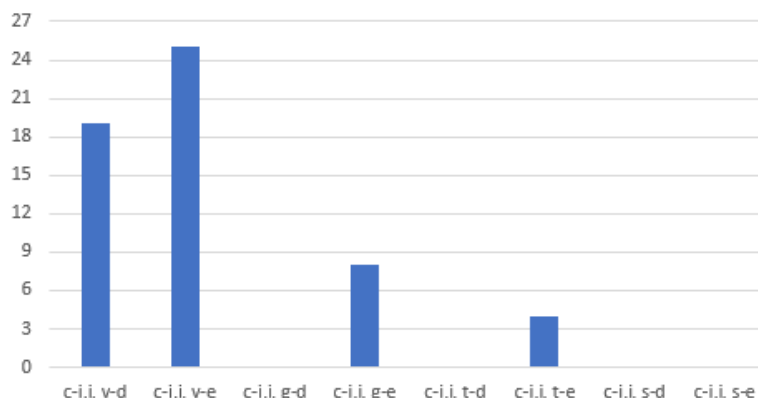


Figura 5.5. Frecuencia absoluta c-i.i.

5.3.2. Tabla de frecuencias del fenómeno d-i.i.

En la tabla siguiente se muestra la frecuencia absoluta del fenómeno d-i.i., acompañada de los códigos de ubicación.

Tabla 5.7. Recuento del fenómeno c-i.i. con códigos de ubicación.

Código fenómeno	Frecuencia absoluta	Códigos de ubicación
d-i.i. v-d	9	LSI93002.02, LSI95002.02, LSI97002.02.02, LSI97003.01.02, LSI98001.07, LSI98003.01.02, LSI99006.02, LSI00006.03, LSI01003.03
d-i.i. v-e	7	LSI97003.02.01, LSI98001.06.01, LSI98001.06.02, LSI98004.02, LSI99005.07, LSI00003.10, LSI00008.06.01
d-i.i. g-d	0	
d-i.i. g-e	4	LSI99001.08.02, LSI99005.08.01, LSI00002.03.02, LSI00003.08.01
d-i.i. t-d	0	
d-i.i. t-e	3	LSI99005.05.01, LSI00002.03.01, LSI00003.06.01
d-i.i. s-d	0	
d-i.i. s-e	0	

Tabla 5.8. Recuento del fenómeno d-i.i. con subtotales.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	9	0	0	0	9
Ejemplo	7	4	3	0	14
Subtotales	16	4	3	0	23

Como sucediese para el fenómeno c-i.i., no se ha identificado el fenómeno d-i.i. en el sistema de representación simbólico en ninguno de los formatos. Tampoco se ha identificado en definiciones en los sistemas de representación gráfico y tabular (ver Tabla 5.8).

De forma análoga al caso anterior, el sistema de representación verbal es el que tiene una mayor frecuencia absoluta: 16 de los 23 fragmentos (un 69.57%); el formato definición es ligeramente superior dentro del sistema de representación verbal.

De nuevo, como para el caso c-i.i. y para poder visualizar esta comparativa, se presenta el siguiente gráfico para el fenómeno d-i.i.

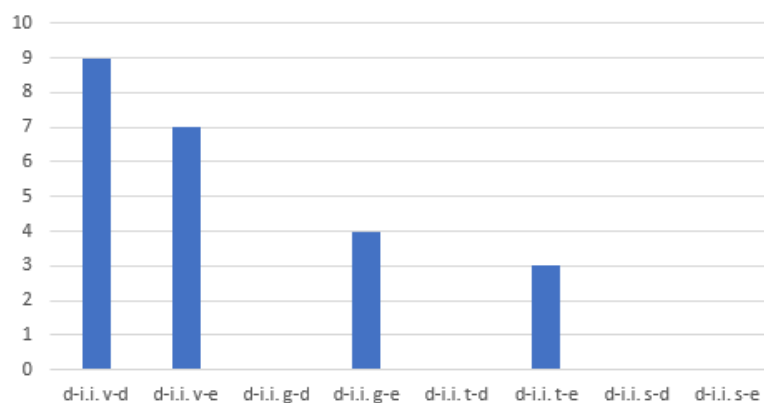


Figura 5.6. Frecuencia absoluta d-i.i.

5.3.3. Tabla de frecuencias del fenómeno i.v.s.i.

En la tabla siguiente se muestra la frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i., acompañada de los códigos de ubicación.

Tabla 5.9. Recuento del fenómeno i.v.s.i. con códigos de ubicación.

Código fenómeno	Frecuencia absoluta	Códigos de ubicación
i.v.s.i. v-d	48	LSI94001.01, LSI94001.02, LSI95001.01.02, LSI96001.01.01, LSI96001.01.02, LSI97001.01, LSI97001.02, LSI97005.02, LSI97005.04, LSI97005.05, LSI97005.06, LSI98001.03.01, LSI98001.08.01, LSI98002.03, LSI98002.04, LSI98004.03, LSI98004.04, LSI98005.02, LSI99001.04, LSI99001.05, LSI99001.03, LSI99001.04, LSI99004.02, LSI99004.03, LSI99004.04, LSI99004.07, LSI99004.08, LSI99005.01.04, LSI99005.02, LSI99005.05.04, LSI99005.06, LSI00002.02, LSI00002.04, LSI00003.02, LSI00003.04, LSI00003.07, LSI00003.09, LSI00004.02, LSI00004.04, LSI00005.02, LSI00005.03, LSI00007.02, LSI00008.01, LSI00008.02, LSI00008.03, LSI00008.04, LSI01004.02, LSI01004.03
i.v.s.i. v-e	35	LSI95001.01.01, LSI95001.01.03, LSI95001.02, LSI96001.02, LSI97002.01.01, LSI97002.01.02, LSI97002.03, LSI97003.02.02, LSI97005.07.01, LSI98004.04, LSI98002.05, LSI98002.06, LSI99001.01, LSI99001.08.01, LSI99001.05, LSI99001.06, LSI99001.07, LSI99004.01.01, LSI99004.05.02, LSI99004.06.01, LSI99005.01.02, LSI99005.04.02, LSI99005.05.02, LSI99005.08.02, LSI00003.01.02, LSI00003.03.02, LSI00003.06.02, LSI00003.08.02, LSI00004.01.01, LSI00004.01.03, LSI00004.03.01, LSI00004.03.03, LSI00008.05.02, LSI00008.06.02, LSI00008.07
i.v.s.i. g-d	3	LSI99001.06, LSI99001.07, LSI00007.03
i.v.s.i. g-e	0	
i.v.s.i. t-d	0	
i.v.s.i. t-e	0	
i.v.s.i. s-d	10	LSI98001.03.02, LSI98001.04, LSI98001.08.02, LSI98001.09, LSI98005.03, LSI98005.04, LSI00005.04, LSI00005.05, LSI00005.06, LSI00005.07
i.v.s.i. s-e	11	LSI97005.07.02, LSI97005.07.03, LSI99004.01.02, LSI99004.06.02, LSI99005.01.03, LSI99005.05.03, LSI00003.01.03, LSI00003.06.03, LSI00004.01.02, LSI00004.03.02, LSI00004.05

Tabla 5.10. Recuento del fenómeno i.v.s.i. con subtotales.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	48	3	0	10	61
Ejemplo	35	0	0	11	46
Subtotales	83	3	0	21	107

El fenómeno i.v.s.i. ha podido identificarse en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico; por tanto, no se ha encontrado ningún fragmento que correspondiese al sistema de representación tabular. Además, conviene precisar que el sistema de representación gráfico solo se ha identificado en el formato definición, al contrario de lo que ocurriese para los fenómenos c-i.i. y d-i.i. donde este sistema de representación había sido identificado en el formato ejemplo.

De nuevo, el sistema de representación predominante es el verbal: de los 107 fragmentos en los que se ha identificado el fenómeno i.v.s.i. 83 de ellos corresponden a este sistema de representación, lo que representa un 77.57%.

En el siguiente gráfico se presenta la frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i. en cada uno de los sistemas de representación y formatos.

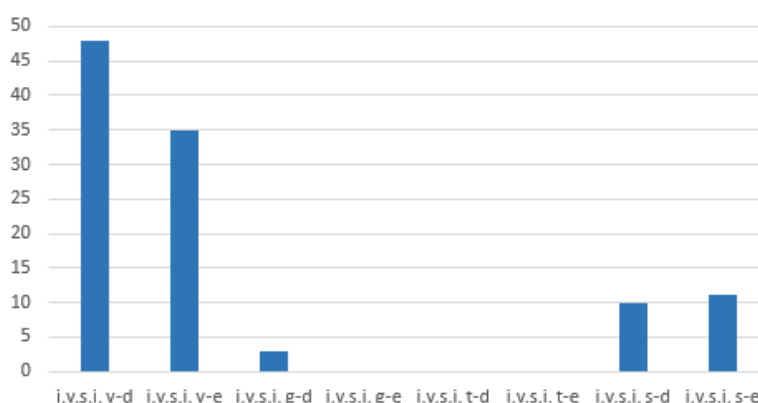


Figura 5.7. Frecuencia absoluta i.v.s.i.

5.3.4. Sistemas de representación y formatos de los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.

Durante todo el presente trabajo de investigación, se ha otorgado una gran relevancia a los sistemas de representación y los formatos en los que apareciesen los fenómenos identificados. Por tal motivo, a continuación se presentan algunos gráficos que recogen la información del apartado anterior, enfatizando estos dos aspectos.

5.3.4.1 *Sistemas de representación*

El primer aspecto que se ha tenido en cuenta es el sistema de representación: atendiendo a la columna de subtotales de la Tabla 5.6, Tabla 5.8 y Tabla 5.10, donde se encuentra la suma de los formatos para cada uno de los sistemas de representación y cada uno de los fenómenos. A continuación, se presentan los gráficos en los que se observan las frecuencias absolutas.

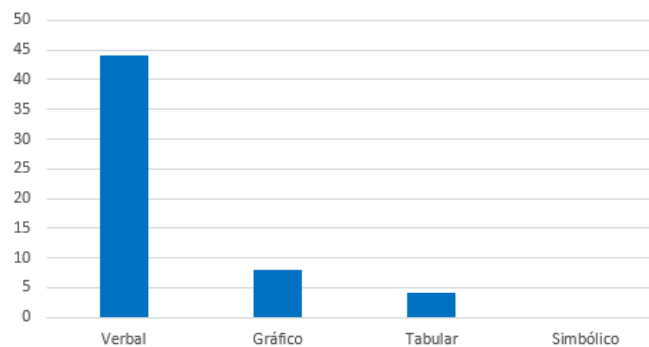


Figura 5.8. Sistemas de representación para el fenómeno c-i.i.

El fenómeno c-i.i. se ha identificado un total de 44 veces en el sistema de representación verbal, 8 en el gráfico y 4 en el tabular. Esta mayor incidencia del sistema de representación verbal se presenta, por tanto, algo más de 5 veces superior al sistema de representación gráfico y exactamente 11 mayor que el sistema de representación tabular.

El sistema de representación simbólico no ha sido identificado en ninguno de los 35 libros que componen la muestra.

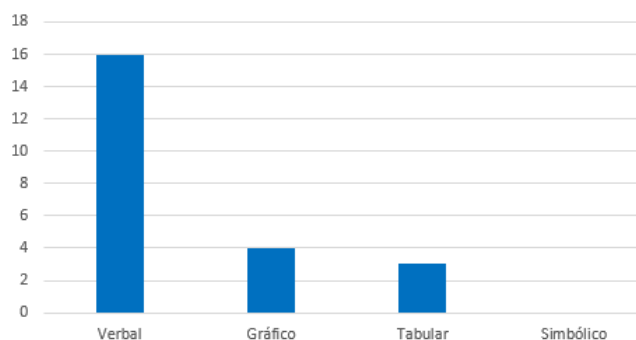


Figura 5.9. Sistemas de representación para el fenómeno d-i.i.

Lo mismo sucede con el fenómeno d-i.i. en cuanto a la dominancia del sistema de representación verbal, pero el número de veces que ha sido identificado ha sido muy inferior al fenómeno c-i.i.

El sistema de representación verbal se ha identificado 16 veces, siendo 4 veces superior al sistema de representación gráfico y algo más de 5 veces mayor que el sistema de representación tabular.

El sistema de representación simbólico, de nuevo, no ha sido identificado en los libros de texto de la muestra.



Figura 5.10. Sistemas de representación para el fenómeno i.v.s.i.

Aunque la identificación del fenómeno i.v.s.i. no tenga apenas similitudes en cuanto al sistema de representación en el que se encuentra respecto de los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, de nuevo el sistema de representación verbal es el dominante.

En esta ocasión, el sistema de representación verbal está presente en un total de 83 fragmentos; 4 veces superior al sistema de representación simbólico, que antes no había sido identificado, y más de 27 veces superior al sistema de representación gráfico. El sistema de representación tabular no se ha identificado, para el fenómeno i.v.s.i., en ninguno de los 35 libros de texto analizados de la muestra.

5.3.4.2 Formatos

El segundo aspecto que se ha tenido en cuenta son los formatos. Para ello, se ha atendido a la fila de subtotales de la Tabla 5.6, Tabla 5.8 y Tabla 5.10, donde se encuentra la suma de los sistemas de representación para cada uno de los formatos y cada uno de los fenómenos. A continuación, se presentan los gráficos en los que examina las frecuencias absolutas.

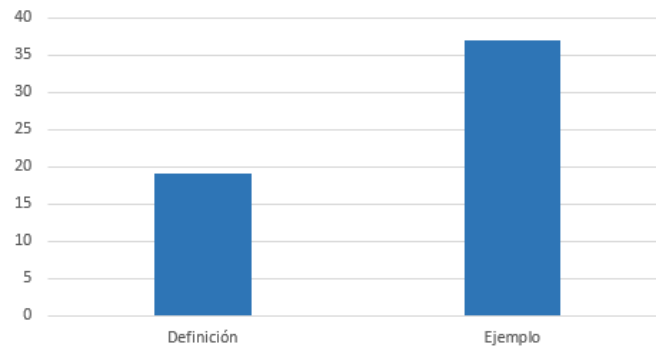


Figura 5.11. Formatos para el fenómeno c-i.i.

El fenómeno c-i.i. se ha identificado un total de 56 veces, 19 veces en el formato definición y 37 en el formato ejemplo.

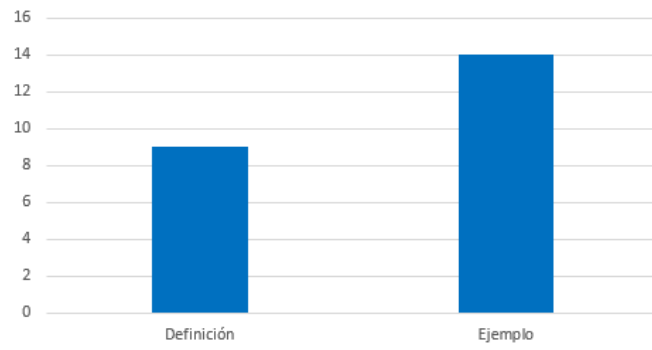


Figura 5.12. Formatos para el fenómeno d-i.i.

El fenómeno d-i.i. se ha identificado un total de 23 veces, 9 en el formato definición y 14 en el formato ejemplo.

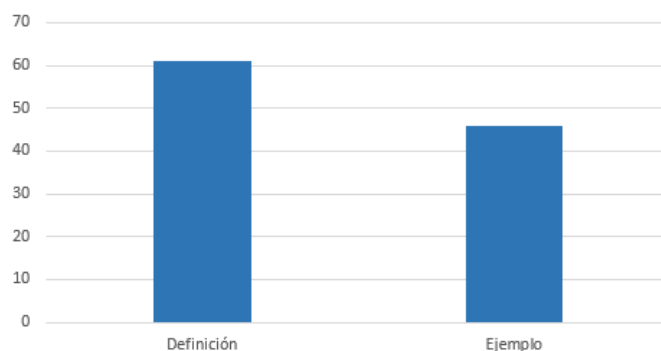


Figura 5.13. Formatos para el fenómeno i.v.s.i.

Para el fenómeno i.v.s.i., se ha identificado una frecuencia mayor del formato definición que del formato ejemplo: 61 definiciones y 46 ejemplos.

Puede observarse que el enfoque de cada uno de estos fenómenos se relaciona con la frecuencia absoluta del formato dominante. En el caso de los fenómenos de enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i., tiene una mayor ocurrencia el formato ejemplo; mientras que en el fenómeno de enfoque formal, i.v.s.i., tiene una mayor ocurrencia el formato definición.

5.3.5. Relación entre los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.

En los siguientes gráficos se aprecia la relación existente entre los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., atendiendo al código del fenómeno, compuesto por el sistema de representación y el formato.

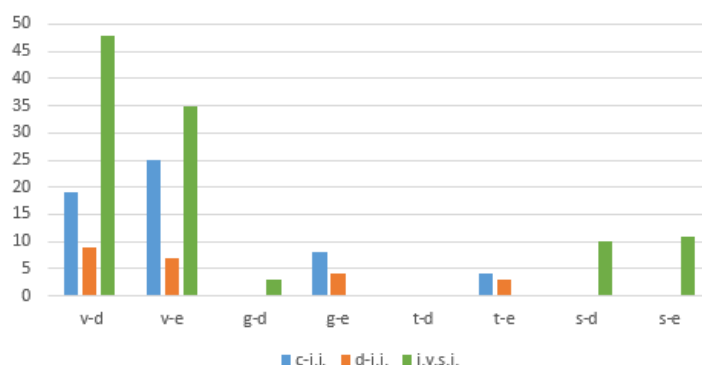


Figura 5.14. Relación de los códigos fenomenológicos.

Debemos considerar, previa a la relación entre los códigos de estos fenómenos, que las frecuencias absolutas no están equilibradas. El fenómeno i.v.s.i. tiene una mayor ocurrencia, 107, que los fenómenos c-i.i. y d-i.i., 56 y 23 respectivamente.

Partiendo de esta premisa, podemos establecer las siguientes relaciones entre los diferentes fenómenos:

- En el sistema de representación verbal, tanto en el formato definición como formato ejemplo predomina el fenómeno i.v.s.i. Las mayores frecuencias de los fenómenos de enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i., también se dan en este sistema de representación, pero con una incidencia menor que para el fenómeno i.v.s.i.
- En el sistema de representación gráfico el único fenómeno que se presenta es el fenómeno i.v.s.i. en el formato definición, y el fenómeno c-i.i. en el formato ejemplo.
- El sistema de representación tabular y formato ejemplo se encuentra en los fenómenos c-i.i. y d-i.i. En el formato definición no se presenta ninguno de los fenómenos caracterizados.
- El sistema de presentación simbólico se presenta solo para el fenómeno i.v.s.i., con una incidencia similar en ambos formatos.
- El fenómeno i.v.s.i. es el fenómeno con mayor frecuencia absoluta si contabilizamos todos los sistemas de representación y formatos.
- El fenómeno d-i.i. es el fenómeno con menor frecuencia absoluta si los comparamos con el resto de los fenómenos, independientemente del sistema de representación y formato que se use.

En el siguiente gráfico pueden observarse algunos de los resultados anteriores desde una visión conjunta; enfatizando dicha comparativa respecto a los sistemas de representación sin tener en cuenta el formato.

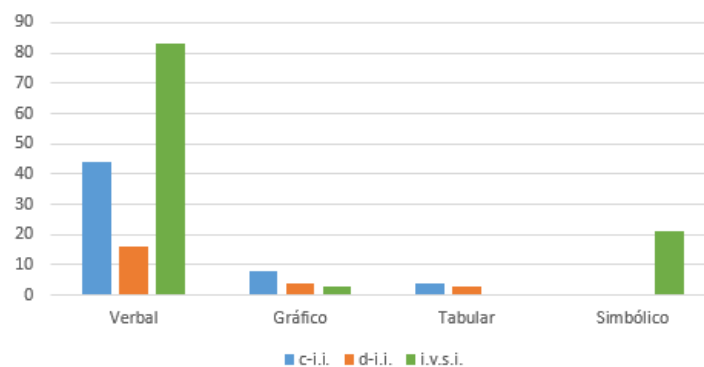


Figura 5.15. Relación de los sistemas de representación.

5.4. Estudio de los fenómenos por periodos

En este apartado se recopilan los fenómenos identificados, considerando sus sistemas de representación y formatos, siendo agrupados por “décadas”. Dada la dificultad existente de encontrar libros de textos donde apareciese la noción de límite infinito de una sucesión en el periodo comprendido entre 1936 y 1969, se decidió realizar la agrupación 1936-1949 y 1950-1969 como si se tratasen de dos décadas en lugar de cuatro como establecería una temporalización plenamente correcta. Así, quedan establecidos los siguientes 7 intervalos temporales: 1936-1949, 1950-1969, 1970-1979, 1980-1989, 1990-1999, 2000-2009 y 2010-2016.

Junto a esta clasificación temporal, se ha considerado adecuado tomar los diferentes periodos legislativos en España: Ley Moyano, Ley General de Educación (LGE), Ley de Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE), Ley Orgánica de Educación (LOE) y Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

El número de libros analizados en cada una de las décadas y en cada periodo legislativo no ha sido el mismo. Se ha considerado que las frecuencias absolutas de cada fenómeno arrojan parte de información, pero no la suficiente; por ese motivo se presentará en cada evolución temporal el número medio de fenómenos por libro, determinado por el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de libros del periodo temporal.

5.4.1. Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. por “Décadas”.

Este subapartado recoge los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i. Para ello se han realizado dos tablas, de frecuencias absolutas y de número de fenómenos por libro de texto, y diferentes gráficos que facilitan la comparación en la evolución acaecida en los últimos 80 años.

5.4.1.1 Fenómeno c-i.i. por “Décadas”

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. atendiendo a su código fenomenológico, formado por el sistema de representación y formato en el que aparece el fenómeno.

Tabla 5.11. Frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. por código de fenómeno y década.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016	Subtotales
c-i.i. v-d	1	4	4	2	3	4	1	19
c-i.i. v-e	2	1	1	7	4	6	4	25
c-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. g-e	0	0	0	1	2	5	0	8
c-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. t-e	0	0	0	0	1	2	1	4
c-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0	0	0
Subtotales	3	5	5	10	10	17	6	56

Facilitando la percepción de la evolución histórica de este fenómeno se presenta el siguiente gráfico:

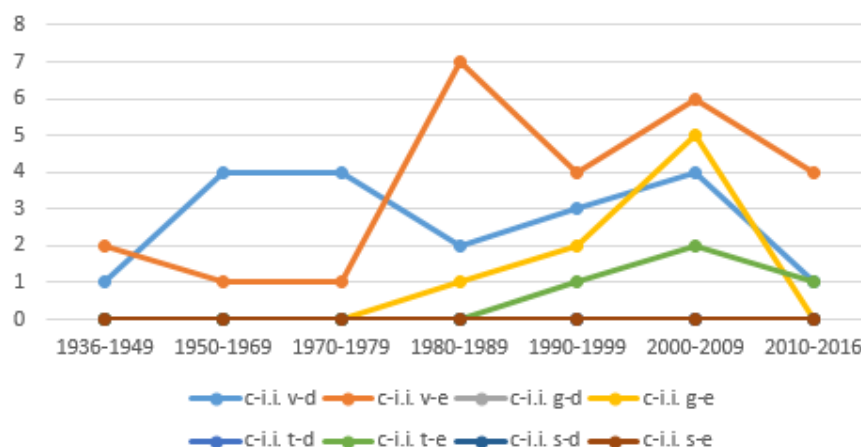


Figura 5.16. Evolución por década. Frecuencias absolutas c-i.i.

Como se ha comentado anteriormente, no se consiguió el mismo número de libros para cada una de las décadas. Por ese motivo se hace indispensable realizar una adecuación de los datos, por lo que se ha dividido la frecuencia absoluta entre el número de libros de cada década, obteniendo así el número medio de fenómenos c-i.i. por libro.

Tabla 5.12. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i. Décadas.

	1936- 1949	1950- 1969	1970- 1979	1980- 1989	1990- 1999	2000- 2009	2010- 2016
c-i.i. v-d	0,33	1	0,8	0,4	0,5	0,5	0,25
c-i.i. v-e	0,67	0,25	0,2	1,4	0,67	0,75	1
c-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. g-e	0	0	0	0,2	0,33	0,63	0
c-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. t-e	0	0	0	0	0,17	0,25	0,25
c-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0	0
c-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0	0
Subtotales	1	1,25	1	2	1,67	2,13	1,5

Constituyendo del mismo modo que para la frecuencia absoluta, se presenta el siguiente gráfico:

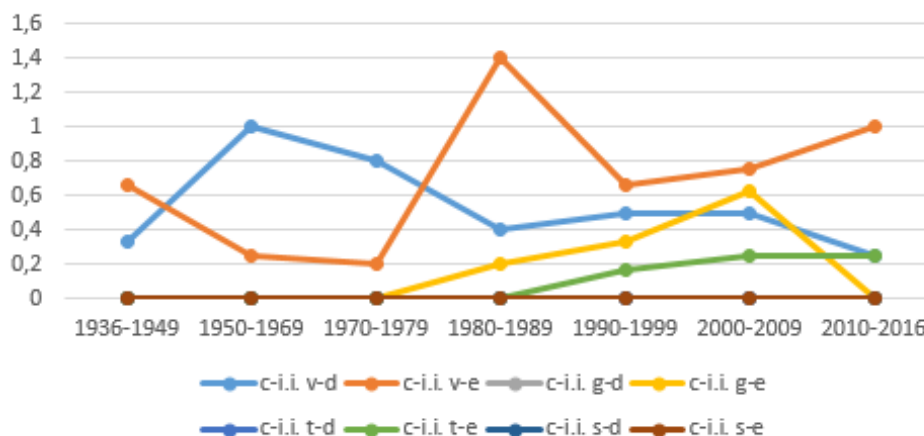


Figura 5.17. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i.

Observando la Tabla 5.12 y la Figura 5.17 puede decirse lo siguiente:

- El sistema de representación dominante para el fenómeno c-i.i. es el verbal. Desde 1936 hasta 1949 y desde 1980 hasta el periodo actual predomina este sistema de representación en el formato ejemplo, mientras que desde 1950 hasta 1979 lo hizo el formato definición.
- El sistema de representación gráfico, en el formato ejemplo, solo se presenta entre 1980 y 2009.
- El sistema de representación tabular, en el formato ejemplo, solo se presenta desde 1990.
- El número de fenómenos en cada libro de texto era superior en los periodos 1950-1969, 1980-1989 y 2000-2009.

- Los códigos fenomenológicos t-d, g-d, s-d y s-e no se identifican en ninguna de las décadas, como ya había quedado recopilado en el recuento total de fenómenos del apartado 5.3.

5.4.1.2 Fenómeno d-i.i. por “Décadas”

De forma análoga al fenómeno c-i.i. se presenta el fenómeno d-i.i. En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. atendiendo a su código fenomenológico.

Tabla 5.13. Frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. por código de fenómeno y década.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016	Subtotales
d-i.i. v-d	1	1	2	2	1	1	1	9
d-i.i. v-e	0	0	1	3	1	2	0	7
d-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. g-e	0	0	0	0	2	2	0	4
d-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. t-e	0	0	0	0	1	2	0	3
d-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0	0	0
Subtotales	1	1	3	5	5	7	1	23

Facilitando la percepción de la evolución histórica de este fenómeno se presenta el siguiente gráfico:

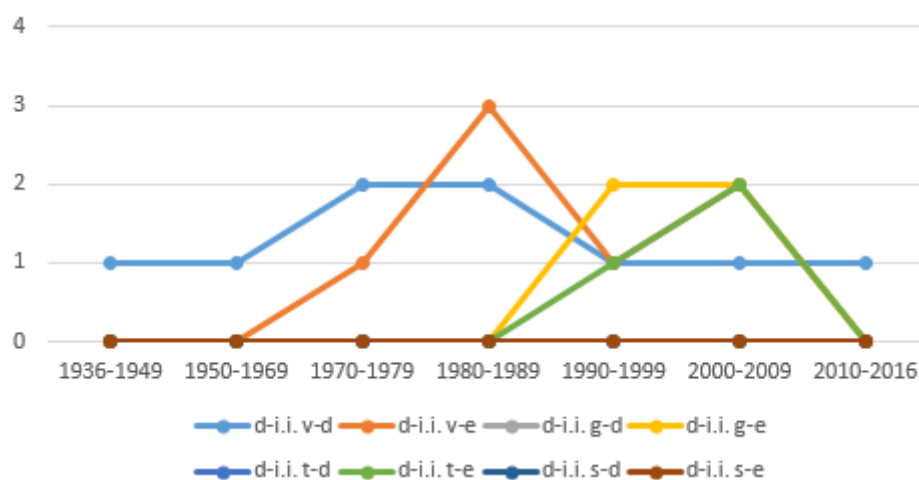


Figura 5.18. Evolución por década. Frecuencias absolutas d-i.i.

Como ya ocurrió para el fenómeno c-i.i., se hace indispensable determinar el número medio de fenómenos de cada libro de texto para cada década. Para ello, se ha dividido la

frecuencia absoluta entre el número de libros existente en cada una de ellas ($n_1=3$, $n_2=4$, $n_3=5$, $n_4=5$, $n_5=6$, $n_6=8$ y $n_7=4$).

Tabla 5.14. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i. Décadas.

	1936- 1949	1950- 1969	1970- 1979	1980- 1989	1990- 1999	2000- 2009	2010- 2016
d-i.i. v-d	0,33	0,25	0,4	0,4	0,17	0,13	0,25
d-i.i. v-e	0	0	0,2	0,6	0,17	0,25	0
d-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. g-e	0	0	0	0	0,33	0,25	0
d-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. t-e	0	0	0	0	0,17	0,25	0
d-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0	0
d-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0	0
Subtotales	0,33	0,25	0,6	1	0,83	0,88	0,25

Disponiendo del mismo modo que para la frecuencia absoluta, se presenta el siguiente gráfico:

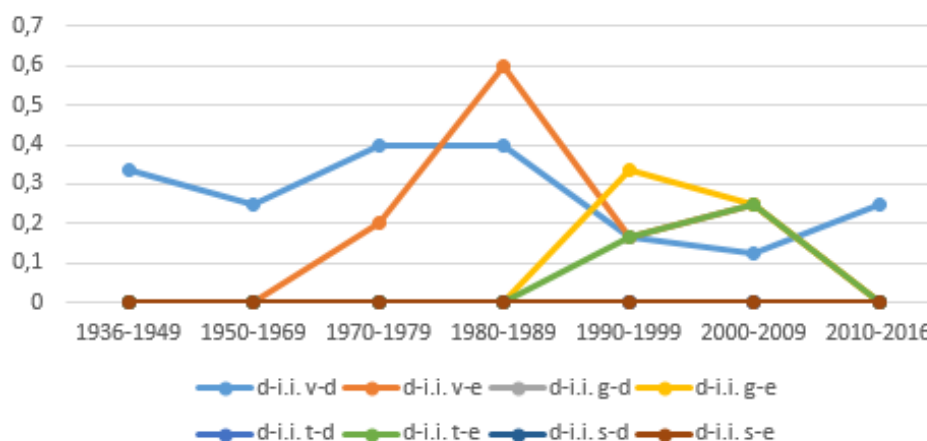


Figura 5.19. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i.

Observando la Tabla 5.14 y la Figura 5.19 puede decirse lo siguiente:

- El sistema de representación verbal ha sido siempre el dominante para el fenómeno d-i.i. con mayor frecuencia en formato definición desde 1936 hasta 1979 y desde 2010 hasta la actualidad, y en formato ejemplo desde 1980 hasta 2009.
- En la década 1990-1999, si observamos el sistema de representación y el formato de forma conjunta, predomina el código fenomenológico g-e. Mientras que en la década 2000-2009 se produce el mismo número de fenómenos en v-e, t-e y g-e.

- El sistema de representación gráfico, en el formato ejemplo, solo se presenta entre 1990 y 2009.
- El sistema de representación tabular, en el formato ejemplo, solo se presenta entre 1990 y 2009.
- Desde el año 2010 el número de apariciones del fenómeno d-i.i. ha disminuido considerablemente.
- En la última década solo se ha encontrado este fenómeno, d-i.i., en el sistema de representación verbal y formato definición.

5.4.2. El fenómeno i.v.s.i. por “Décadas”

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno i.v.s.i. atendiendo a su código fenomenológico.

Tabla 5.15. Frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i. por código de fenómeno y década.

	1936- 1949	1950- 1969	1970- 1979	1980- 1989	1990- 1999	2000- 2009	2010- 2016	Subtotales
i.v.s.i. v-d	2	3	6	7	13	15	2	48
i.v.s.i. v-e	0	4	5	3	12	11	0	35
i.v.s.i. g-d	0	0	0	0	2	1	0	3
i.v.s.i. g-e	0	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-e	0	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. s-d	0	0	0	6	0	4	0	10
i.v.s.i. s-e	0	0	2	0	4	5	0	11
Subtotales	2	7	13	16	31	36	2	107

Facilitando la percepción de la evolución histórica del fenómeno i.v.s.i., como ya sucediese con los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, se presenta el siguiente gráfico:

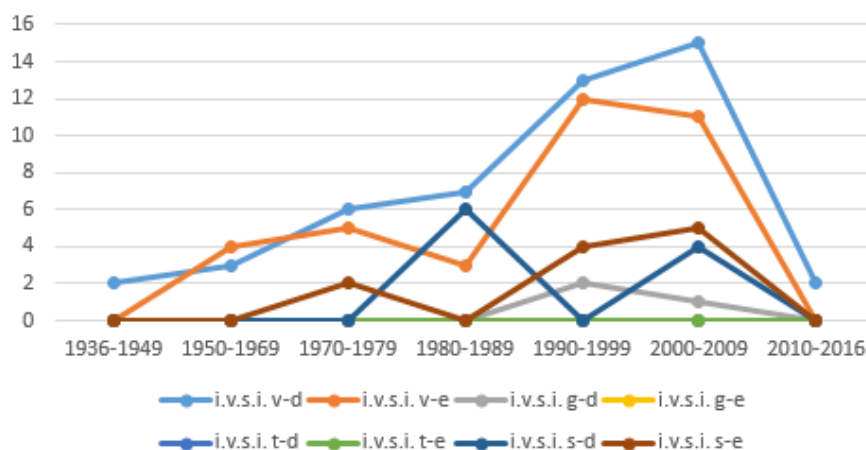


Figura 5.20. Evolución por década. Frecuencias absolutas i.v.s.i.

Como ya sucediese para los fenómenos c-i.i. y d-i.i., se hace indispensable realizar una ponderación de las décadas atendiendo al número de libros que hay en cada una de ellas, por lo que se ha dividido la frecuencia absoluta entre el número de libros existente, obteniendo así el número de fenómenos i.v.s.i. por libro.

Tabla 5.16. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i. Décadas.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016
i.v.s.i. v-d	0,67	0,75	1,2	1,4	2,17	1,88	0,5
i.v.s.i. v-e	0	1	1	0,6	2	1,38	0
i.v.s.i. g-d	0	0	0	0	0,33	0,13	0
i.v.s.i. g-e	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-d	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-e	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. s-d	0	0	0	1,2	0	0,5	0
i.v.s.i. s-e	0	0	0,4	0	0,67	0,63	0
Subtotales	0,67	1,75	2,6	3,2	5,17	4,5	0,5

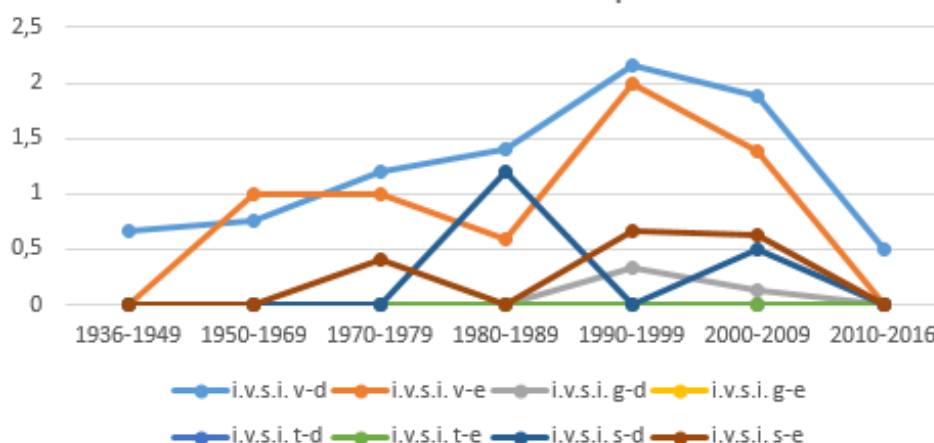


Figura 5.21. Evolución por década. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i.

Observando la Tabla 5.16 y la Figura 5.21 puede afirmarse lo siguiente:

- El sistema de representación verbal es el dominante para el fenómeno i.v.s.i. siempre. Desde 1936 hasta 1949 y desde 1970 hasta la actualidad en formato definición, y desde 1950 hasta 1969 en formato ejemplo.
- El sistema de representación gráfico, en formato definición, solo se presenta entre 1990 y 2009.
- El sistema de representación simbólico fue identificado desde 1970 hasta 2009. En particular, desde 1970 hasta 1979 y desde 1990 hasta 2009 en formato ejemplo y desde 1980 hasta 1989 y desde 2000 hasta 2009 en formato definición.
- El auge de este fenómeno se evidencia entre 2000 y 2009, coincidiendo con el auge del sistema de representación verbal en ambos sistemas de representación.
- En la última década solo se ha encontrado este fenómeno en el sistema de representación verbal y en formato definición, resultando casi inexistente. Además, ha desaparecido el sistema de representación simbólico, tanto en el formato definición como ejemplo.

5.4.3. Comparación de los fenómenos por “Décadas”

A continuación, se va a realizar la continuación de los fenómenos en algunos sistemas de representación y formato, aquellos en los que existe coincidencia. Existen dos códigos fenomenológicos en los que aparecen simultáneamente los tres fenómenos: v-e y v-d. Además, en los códigos fenomenológicos g-e y t-e coinciden los fenómenos intuitivos.

Estos cuatro códigos fenomenológicos son los que se han considerado para la comparación de su evolución histórica por décadas.

Tabla 5.17. Comparación sistema de representación verbal y formato definición.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016
c-i.i. v-d	0,33	1	0,8	0,4	0,5	0,5	0,25
d-i.i. v-d	0,33	0,25	0,4	0,4	0,17	0,13	0,25
i.v.s.i. v-d	0,67	0,75	1,2	1,4	2,17	1,88	0,5

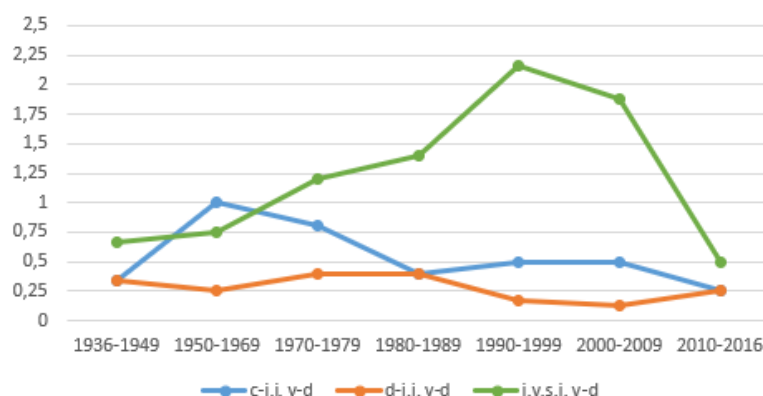


Figura 5.22. Evolución histórica. v-d.

El sistema de representación verbal y formato definición se ha identificado históricamente con mayor frecuencia para el fenómeno i.v.s.i., salvo desde 1950 hasta 1969, cuando lo fue para el c-i.i. Mientras que los fenómenos intuitivos se han mantenido “estables” durante los 80 años estudiados, el fenómeno i.v.s.i. ha tenido una incidencia dispar. Entre los años 1970 y 1999 creció, llegando a aumentar su presencia respecto a los periodos anteriores. Desde entonces, su impacto ha decrecido, llegando a la actualidad a una ocurrencia inferior a la que tuvo en los años 1930 y similar a la del enfoque intuitivo, si tenemos en cuenta los dos fenómenos c-i.i. y d-i.i.

A su vez, la presencia de c-i.i. siempre ha sido mayor que la de d-i.i., excepto en los periodos 1980-1989 y 2010-2016, que fue idéntica.

Tabla 5.18. Comparación sistema de representación verbal y formato ejemplo.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016
c-i.i. v-e	0,67	0,25	0,2	1,4	0,67	0,75	1
d-i.i. v-e	0	0	0,2	0,6	0,17	0,25	0
i.v.s.i. v-e	0	1	1	0,6	2	1,38	0

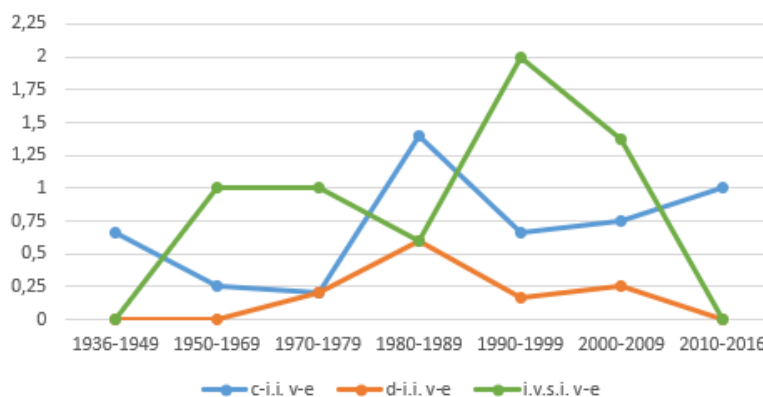


Figura 5.23. Evolución histórica. v-e.

La identificación de un fenómeno dominante para el sistema de representación verbal y formato ejemplo ha ido cambiando en los últimos 80 años. En los intervalos 1936-1949, 1980-1989 y 2010-2016 el fenómeno c-i.i. ha sido el predominante, mientras que en 1950-1979 y 1990-2009 lo ha sido el fenómeno i.v.s.i. La presencia de los tres fenómenos ha sido inestable en todo este periodo, teniendo cada uno de ellos una incidencia similar en 1936 y 2016, si comparamos cada fenómeno consigo mismo (es decir el fenómeno c-i.i. en el sistema de representación verbal y formato ejemplo en el periodo 1936-1949 con el mismo fenómeno en 2010-2016).

El fenómeno i.v.s.i. no se identificaba en 1936-1949 y tampoco en 2010-2016, alcanzando su punto álgido en 1990-1999, cuando existían, de media, en cada libro 2 fragmentos en este sistema de representación y formato.

La presencia del fenómeno c-i.i. ha existido en todas las décadas, teniendo una mayor incidencia en la década de 1980.

Por su parte, el fenómeno d-i.i., ha sido identificado solamente desde 1970 hasta 2009; además, se muestra con una baja incidencia.

Tabla 5.19. Comparación sistema de representación gráfico y formato ejemplo.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016
c-i.i. g-e	0	0	0	0,2	0,33	0,63	0
d-i.i. g-e	0	0	0	0	0,33	0,25	0

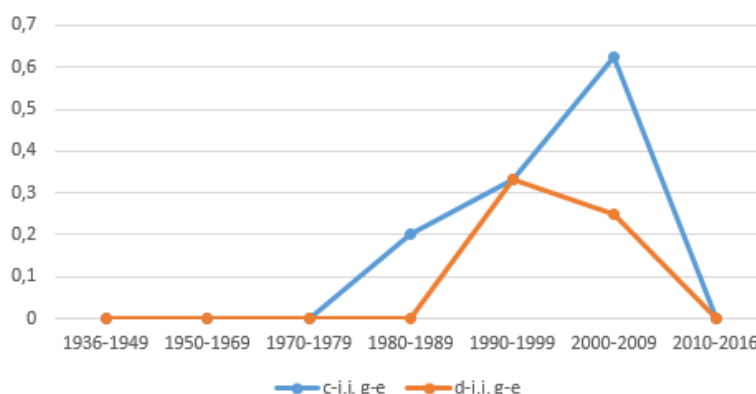


Figura 5.24. Evolución histórica. g-e.

En este caso solo se ha realizado la comparación de los fenómenos c-i.i. y d-i.i., ya que el fenómeno i.v.s.i. en el sistema de representación gráfico y en el formato ejemplo no ha sido identificado en ningún libro de texto. El primero se ha identificado entre 1980 y 2009, mientras que el segundo entre 1990 y 2009. Como ya sucediese con el resto de los sistemas de representación, el c-i.i. ha tenido una mayor incidencia que el d-i.i. Desde 2010 ninguno de estos fenómenos ha vuelto a ser identificado, como ya ocurriese entre 1936 y 1979.

Tabla 5.20. Comparación sistema de representación tabular y formato ejemplo.

	1936-1949	1950-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2016
c-i.i. t-e	0	0	0	0	0,17	0,25	0,25
d-i.i. t-e	0	0	0	0	0,17	0,25	0

En la comparación del sistema representación tabular y formato ejemplo no se presenta gráfico de evolución, ya que existe una igualdad entre 1936 y 2009 para ambos fenómenos, c-i.i. y d-i.i., y no se percibiría su evolución individual diferenciada de uno respecto del otro.

Estos fenómenos comenzaron a ser identificados en el sistema de representación tabular en el periodo 1990-1999. Su incidencia ha sido estable desde entonces para el fenómeno c-i.i., en tanto que el d-i.i. no ha sido identificado a partir de 2010.

5.4.4. Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. por periodo legislativo

Este subapartado tiene la misma estructura que el 5.4.1., recogiendo los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i., pero en este caso se consideran los periodos legislativos. Para ello se han realizado dos tablas: de frecuencias absolutas y de número

de fenómenos por libro de texto, además de diferentes gráficos que facilitan la comparación en la evolución sufrida después de 5 leyes educativas.

5.4.4.1 Fenómeno c-i.i. por periodo legislativo

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. atendiendo a su código fenomenológico y la ley educativa en vigor en el momento en el que acaecen.

Tabla 5.21. Frecuencias absolutas del fenómeno c-i.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE	Subtotales
c-i.i. v-d	5	8	3	2	1	19
c-i.i. v-e	3	11	4	3	4	25
c-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0
c-i.i. g-e	0	2	4	2	0	8
c-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0
c-i.i. t-e	0	0	3	0	1	4
c-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0
c-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0
Subtotales	8	21	14	7	6	56

Facilitando la percepción de la evolución histórica de este fenómeno se presenta el siguiente gráfico:

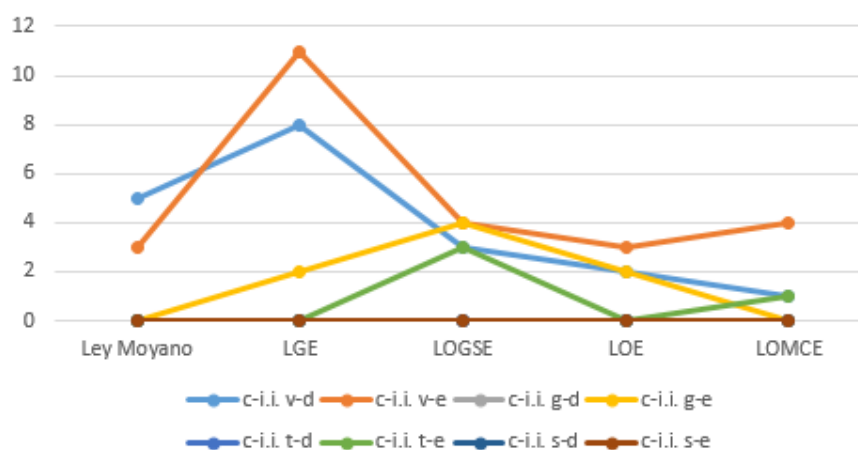


Figura 5.25. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas c-i.i.

Al igual que ya sucedió en la evolución por décadas, hay que señalar que no se consiguió el mismo número de libros para cada uno de los periodos legislativos. Por este motivo se hace indispensable realizar una adecuación de los datos, por lo que se ha dividido la frecuencia absoluta entre el número de libros de cada periodo, obteniendo así el número de fenómenos c-i.i. por libro.

Tabla 5.22. Número medio de fenómenos por libro. c-i.i. Periodos legislativos.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-d	0,63	0,62	0,5	0,5	0,25
c-i.i. v-e	0,38	0,85	0,67	0,75	1
c-i.i. g-d	0	0	0	0	0
c-i.i. g-e	0	0,15	0,67	0,5	0
c-i.i. t-d	0	0	0	0	0
c-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0,25
c-i.i. s-d	0	0	0	0	0
c-i.i. s-e	0	0	0	0	0
Subtotales	1	1,62	2,34	1,75	1,5

De manera análoga a la percepción de las frecuencias absolutas, se presenta el siguiente gráfico:

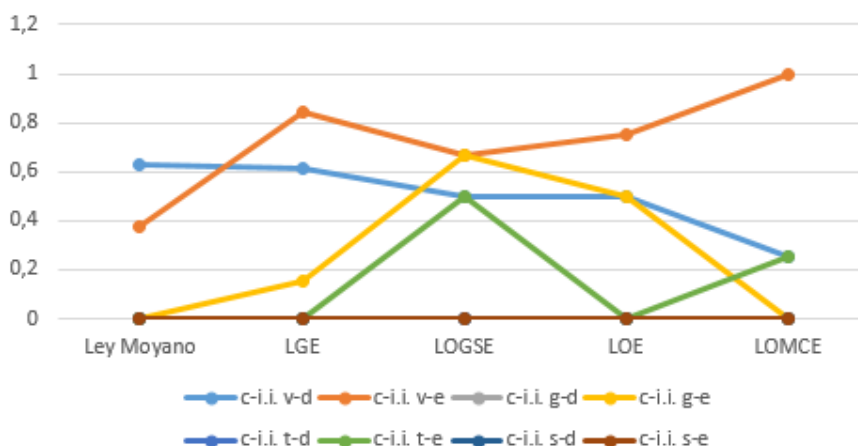


Figura 5.26. Evolución por periodo legislativo. Número de fenómenos c-i.i. por libro.

Observando la Tabla 5.22 y la Figura 5.26 puede decirse lo siguiente:

- El sistema de representación dominante para el fenómeno c-i.i. es el verbal. Durante la Ley Moyano predominó este sistema de representación y formato definición, mientras que desde la LGE lo ha hecho el formato ejemplo, pero el mismo sistema de representación.
- El sistema de representación gráfico se presenta en la LGE, en la LOGSE y en la LOE, pero no se identificó ningún fenómeno c-i.i. en dicho sistema de representación durante la Ley Moyano y la LOMCE.
- El sistema de representación tabular, en el formato ejemplo, solo se presenta en la LOGSE y la LOMCE.
- El número total de fenómenos en cada libro de texto fue superior en la LOGSE.

- Los códigos fenomenológicos t-d, g-d, s-d y s-e no se identifican en ninguno de los periodos educativos, como ya había quedado recopilado en el recuento total de fenómenos del apartado 5.3.

5.4.4.2 Fenómeno d-i.i. por periodo legislativo

De forma análoga al fenómeno c-i.i. se presenta el fenómeno d-i.i. En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. atendiendo a su código fenomenológico.

Tabla 5.23. Frecuencias absolutas del fenómeno d-i.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE	Subtotales
d-i.i. v-d	2	4	1	1	1	9
d-i.i. v-e	0	4	2	1	0	7
d-i.i. g-d	0	0	0	0	0	0
d-i.i. g-e	0	1	3	0	0	4
d-i.i. t-d	0	0	0	0	0	0
d-i.i. t-e	0	0	3	0	0	3
d-i.i. s-d	0	0	0	0	0	0
d-i.i. s-e	0	0	0	0	0	0
Subtotales	2	9	9	2	1	23

Facilitando la percepción de la evolución histórica de este fenómeno se presenta el siguiente gráfico:

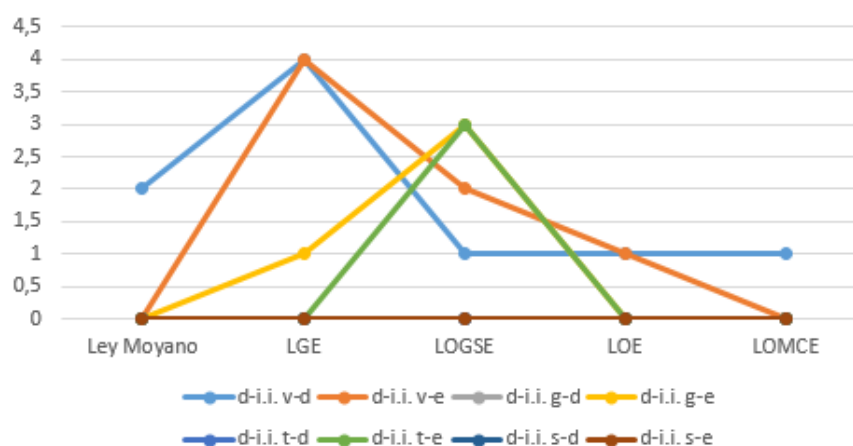


Figura 5.27. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas d-i.i.

Como ya sucediese en la evolución por décadas, y ya se señalase para el fenómeno c-i.i., hay que reseñar que no se consiguió el mismo número de libros para cada uno de los periodos educativos. Por este motivo se hace indispensable realizar una adecuación de los

datos, por lo que se ha dividido la frecuencia absoluta entre el número de libros de cada periodo, obteniendo así el número de fenómenos d-i.i. por libro ($n_1=8$, $n_2=13$, $n_3=6$, $n_4=4$ y $n_5=4$).

Tabla 5.24. Número medio de fenómenos por libro. d-i.i. Periodos educativos.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
d-i.i. v-d	0,25	0,31	0,17	0,25	0,25
d-i.i. v-e	0	0,31	0,33	0,25	0
d-i.i. g-d	0	0	0	0	0
d-i.i. g-e	0	0,08	0,5	0	0
d-i.i. t-d	0	0	0	0	0
d-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0
d-i.i. s-d	0	0	0	0	0
d-i.i. s-e	0	0	0	0	0
Subtotales	0,25	0,70	1,5	0,5	0,25

Se dispone del mismo modo que para la frecuencia absoluta el siguiente gráfico:

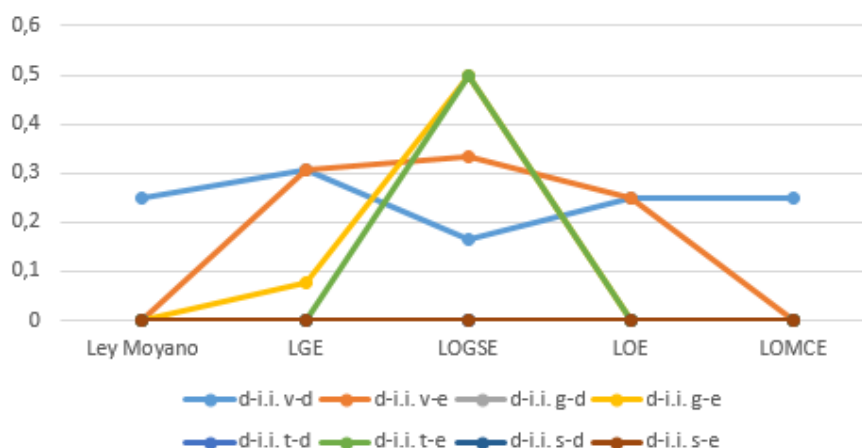


Figura 5.28. Evolución por ley educativa. Número de fenómenos d-i.i. por libro.

Observando la Tabla 5.24. y la Figura 5.28 decirse lo siguiente:

- El sistema de representación dominante para el fenómeno d-i.i. es el verbal en la Ley Moyano, LGE, LOE y LOMCE. En la LOGSE los sistemas de representación gráfico y tabular, en el formato ejemplo son los que se presentan un mayor número de veces.
- El sistema de representación gráfico, en el formato ejemplo, se identifica en la LOGSE y de forma casi insignificante en la LGE.
- El sistema de representación tabular, en el formato ejemplo, solo se presenta en la LOGSE.
- Desde la implantación de la LOE el número de apariciones del fenómeno d-i.i. ha disminuido considerablemente.

- En la LOMCE solo se ha encontrado este fenómeno en el sistema de representación verbal y formato definición.

5.4.5. El fenómeno i.v.s.i. por periodo legislativo

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas del fenómeno i.v.s.i. atendiendo a su código fenomenológico.

Tabla 5.25. Frecuencia absoluta del fenómeno i.v.s.i. por código de fenómeno y periodo legislativo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE	Subtotales
i.v.s.i. v-d	7	20	12	7	2	48
i.v.s.i. v-e	4	16	12	3	0	35
i.v.s.i. g-d	0	2	0	1	0	3
i.v.s.i. g-e	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-d	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-e	0	0	0	0	0	0
i.v.s.i. s-d	0	6	0	4	0	10
i.v.s.i. s-e	0	4	7	0	0	11
Subtotales	11	48	31	15	2	107

Facilitando la percepción de la evolución histórica del fenómeno i.v.s.i., como ya sucediese con los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, y su visualización por décadas, se presenta el siguiente gráfico:

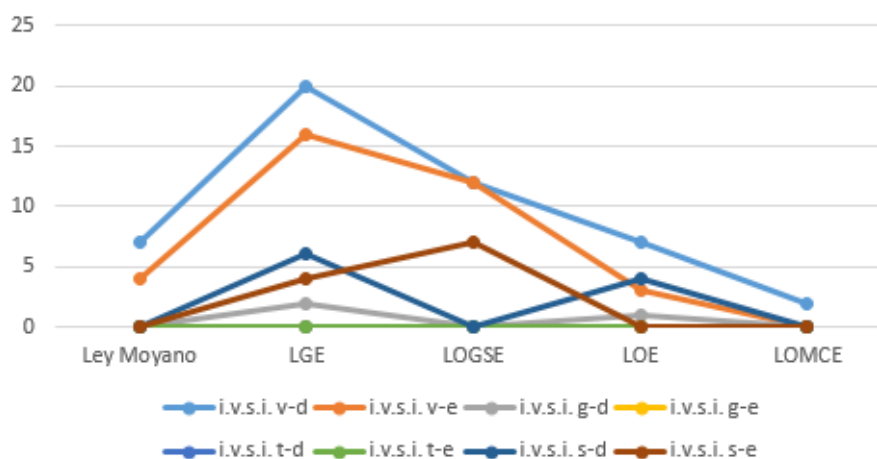


Figura 5.29. Evolución por ley educativa. Frecuencias absolutas i.v.s.i.

Como ya sucediese para los fenómenos c-i.i. y d-i.i., y para la evolución por décadas, se hace indispensable realizar una ponderación de los periodos legislativos atendiendo al número de libros que hay en cada una de ellas, para ello se ha dividido la frecuencia

absoluta entre el número de libros existente, obteniendo así el número de fenómenos i.v.s.i. por libro.

Tabla 5.26. Número medio de fenómenos por libro. i.v.s.i. Periodos legislativos.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i. v-d	0,88	1,54	2	1,75	0,5
i.v.s.i. v-e	0,5	1,23	2	0,75	0
i.v.s.i. g-d	0	0,15	0	0,25	0
i.v.s.i. g-e	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-d	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-e	0	0	0	0	0
i.v.s.i. s-d	0	0,46	0	1	0
i.v.s.i. s-e	0	0,31	1,17	0	0
Subtotales	1,38	3,69	5,17	3,75	0,5

Estableciendo del mismo modo que para la frecuencia absoluta, se presenta el siguiente gráfico:

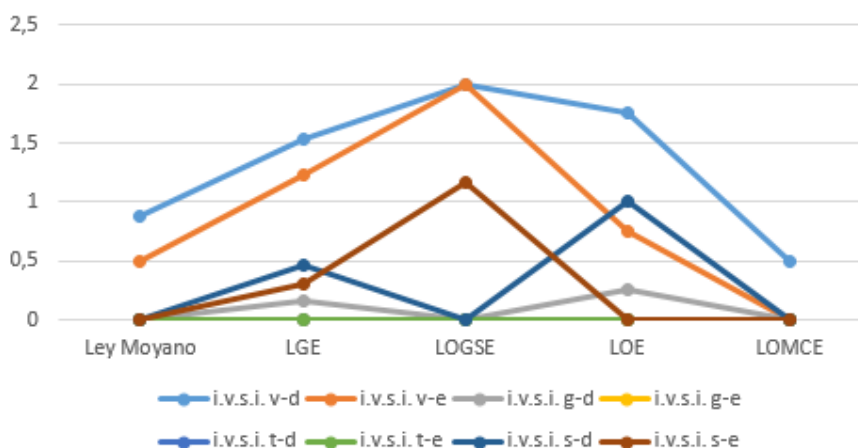


Figura 5.30 . Evolución por ley educativa. Número de fenómenos i.v.s.i. por libro.

Observando la Tabla 5.26 y la Figura 5.30 puede afirmarse lo siguiente:

- El sistema de representación verbal y formato definición es el dominante para el fenómeno i.v.s.i.
- El sistema de representación gráfico, en el formato definición, solo se presenta en la LGE y en la LOE.
- El sistema de representación simbólico fue identificado en la LGE, LOGSE y LOE; así, en la LGE en ambos formatos, en la LOGSE en formato ejemplo, y en la LOE en formato definición.

- El auge de este fenómeno se evidencia en la LOGSE, coincidiendo con el auge del sistema de representación verbal en ambos formatos.
- En la última ley educativa, LOMCE, solo se ha encontrado este fenómeno en el sistema de representación verbal y formato definición, pero resulta casi inexistente.

5.4.6. Comparación de los fenómenos por periodo legislativo

Siguiendo el procedimiento que ya se estableció para el apartado 5.4.3, y atendiendo a la comparación de los fenómenos anteriormente realizada, 5.3.5, se analiza la evolución histórica, por periodos legislativos, y comparación de cuatro de los códigos fenomenológicos: v-d, v-e, g-e y t-e. Para estos dos últimos se han tenido en cuenta el enfoque intuitivo, por la ausencia de fragmentos identificados para el enfoque formal.

Tabla 5.27. Comparación sistema de representación verbal y formato definición.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-d	0,63	0,62	0,5	0,5	0,25
d-i.i. v-d	0,25	0,31	0,17	0,25	0,25
i.v.s.i. v-d	0,88	1,54	2	1,75	0,5

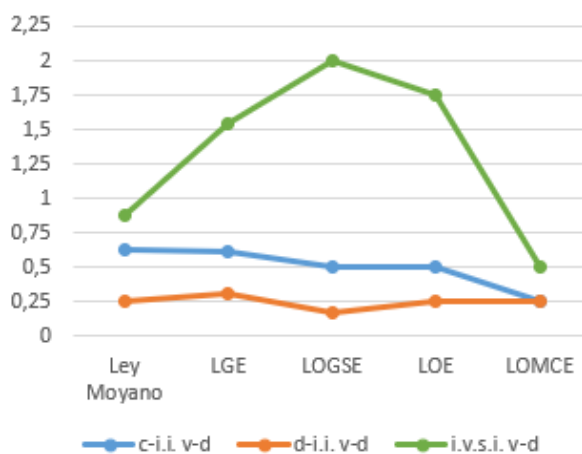


Figura 5.31. Evolución histórica. v-e.

El sistema de representación verbal y formato definición se ha identificado históricamente con mayor frecuencia para el fenómeno i.v.s.i. Éste incrementó su incidencia en los libros de texto desde la Ley Moyano hasta la LOGSE, momento en el que alcanzó su punto álgido. Desde entonces, su presencia ha ido disminuyendo, teniendo actualmente, LOMCE, un impacto menor del que tenía 80 años atrás. Los fenómenos intuitivos se han

mantenido más o menos estables durante las 5 leyes educativas estudiadas, siendo la presencia de c-i.i. mayor que para d-i.i., excepto en la LOMCE, donde se identifica exactamente la misma.

Tabla 5.28. Comparación sistema de representación verbal y formato ejemplo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-e	0,38	0,85	0,67	0,75	1
d-i.i. v-e	0	0,31	0,33	0,25	0
i.v.s.i. v-e	0,5	1,23	2	0,75	0

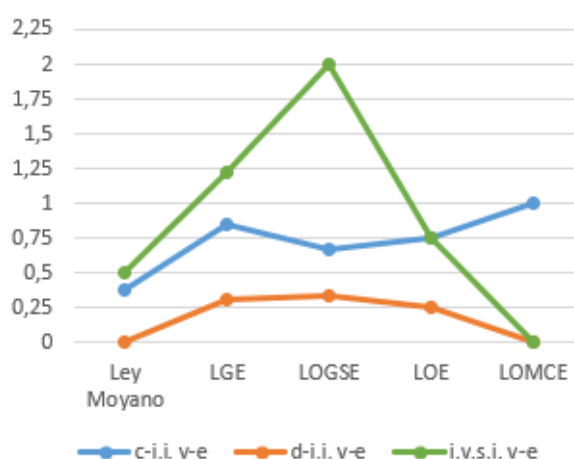


Figura 5.32. Evolución histórica. v-e.

El fenómeno dominante en el sistema de representación verbal y formato ejemplo ha ido cambiando durante las diferentes leyes educativas. Durante la Ley Moyano, la presencia de i.v.s.i. era ligeramente superior a la de c-i.i., mientras que d-i.i. todavía no era identificado. En la LGE, todos los fenómenos ven incrementada su incidencia en los libros de texto. Mientras que c-i.i. y d-i.i. permanecen más o menos estables en el nuevo cambio educativo, LOGSE, el fenómeno i.v.s.i. casi duplica su existencia, logrando su mayor incidencia. En la LOE, ambos fenómenos, c-i.i. e i.v.s.i. tienen la misma presencia; motivada por la estabilidad de c-i.i. y la reducción a la tercera parte de i.v.s.i. Con la llegada de la LOMCE, desaparecen de los libros de texto los fenómenos d-i.i. e i.v.s.i., obteniendo un fragmento, de media, donde se identifique el fenómeno c-i.i.

Tabla 5.29. Comparación sistema de representación gráfico y formato ejemplo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. g-e	0	0,15	0,67	0,5	0
d-i.i. g-e	0	0,08	0,5	0	0

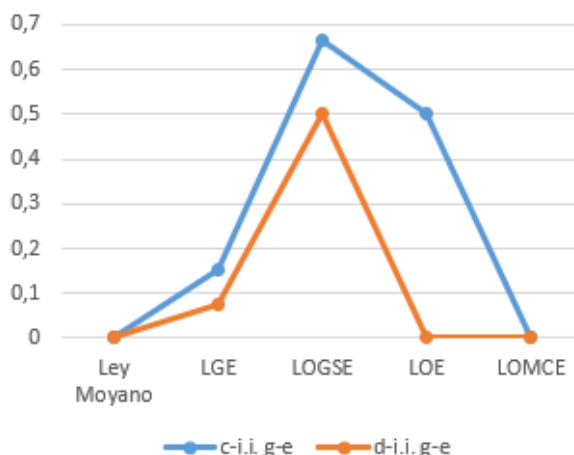


Figura 5.33. Evolución histórica. g-e.

En este caso, como ya sucediese en la comparación por “Décadas”, solo se ha realizado la comparación entre los fenómenos c-i.i. y d-i.i., ya que el fenómeno i.v.s.i. no ha sido identificado en ningún libro de texto. Los fenómenos con enfoque intuitivo no fueron observados hasta la instauración de la LGE, aunque de forma casi testimonial. Como otros sistemas de representación, durante la LOGSE se aprecia una mayor presencia. En la LOE, las observaciones del fenómeno c-i.i. decrecen, mientras que las de d-i.i. desaparecen.

Tabla 5.30. Comparación sistema de representación tabular y formato ejemplo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0,25
d-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0

En la comparación de la representación tabular en el formato ejemplo no se presenta gráfico de evolución, ya que existe una igualdad desde la Ley Moyano hasta la LOMCE, y no podría percibirse la evolución individual de c-i.i. y d-i.i. Esta representación solo ha tenido lugar durante la LOGSE, para c-i.i. y d-i.i., y la LOMCE, para c-i.i.

5.5. Comparación de los fenómenos caracterizados para diferentes límites.

Claros (2010) y Sánchez (2012) en sus tesis doctorales, y posteriormente Claros et al. (2016b) realizaron un análisis de los fenómenos encontrados en libros de texto. En este apartado se pretende comparar los resultados que estos autores obtuvieron en sus estudios con los realizados en el presente trabajo.

La comparación se ha llevado a cabo desde dos puntos de vista: por una parte se tiene en cuenta el enfoque de los fenómenos, intuitivo o formal, y por otra parte se considera la evolución histórica de cada uno de ellos. En esta evolución histórica se ha optado por los periodos legislativos dado que Sánchez (2012) efectuó su análisis considerando solo este criterio a pesar de que Claros (2010) examinase ambos, tanto las décadas como los periodos legislativos.

5.5.1. Comparación de los resultados obtenidos con el estudio de libros de texto para los fenómenos intuitivos.

En el estudio fenomenológico del límite finito de una sucesión y del límite finito de una función en un punto se caracterizó un fenómeno intuitivo para cada uno de ellos. Para realizar la comparación con el límite infinito de una sucesión fue necesario previamente la suma de las frecuencias absolutas de los fenómenos c-i.i. y d-i.i., ambos con un enfoque intuitivo. En dicha comparación se han tenido en cuenta todos los códigos fenomenológicos, es decir, la consideración del sistema de representación y el formato en el que se presenta cada fenómeno. La tabla siguiente indica las frecuencias absolutas asociadas a cada uno de ellos.

Tabla 5.31. Frecuencias absolutas de los fenómenos intuitivos.

Sist. Repr. - Formato	c-i.i.+d-i.i.	a.s.i.	ADI
v-d	28	7	18
v-e	32	26	31
g-d	0	0	2
g-e	12	36	14
t-d	0	0	0
t-e	7	12	22
s-d	0	0	1
s-e	0	0	0
Subtotales	79	81	88

El número de libros de textos considerados para cada uno de los estudios no fue el mismo: N=30 para el límite finito de una sucesión, N=28 para el límite finito de una función en un punto y N=35 para el límite infinito de una sucesión. Por este motivo dividiremos cada una de las frecuencias absolutas entre el número total de libros analizados para cada uno de los límites, obteniendo así el número de fenómenos medio en cada libro. Estos datos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.32. N° medio de fenómenos intuitivos en cada libro de texto.

Sist. Repr. - Formato	c-i.i.+d-i.i.	a.s.i.	ADI
v-d	0,8	0,23	0,64
v-e	0,91	0,87	1,11
g-d	0	0	0,07
g-e	0,34	1,2	0,5
t-d	0	0	0
t-e	0,2	0,4	0,79
s-d	0	0	0,04
s-e	0	0	0
Subtotales	2,25	2,7	3,15

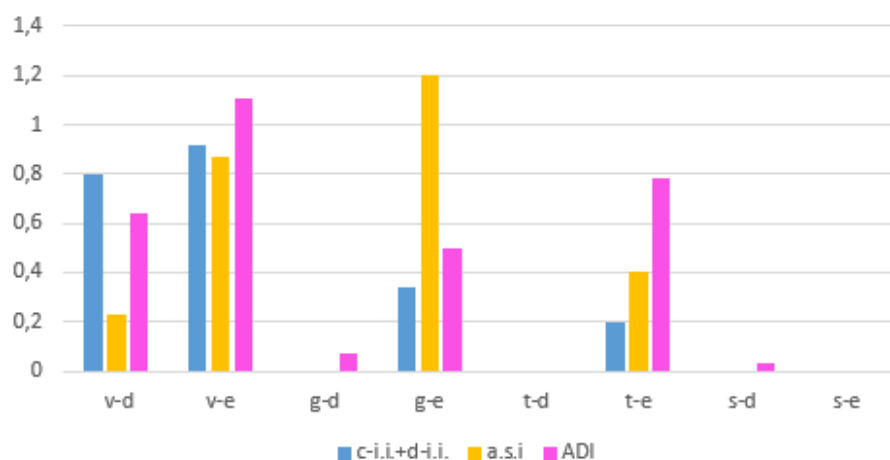


Figura 5.34. Comparación de los fenómenos intuitivos.

En consecuencia, podemos establecer las siguientes relaciones sobre un enfoque intuitivo:

- Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. predominan en el sistema de representación verbal, siendo además esta representación y formato ejemplo (v-e) la mayor incidencia para los fenómenos del límite infinito de una sucesión.
- El fenómeno a.s.i. predomina en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo (g-e), respecto a los fenómenos ADI y la suma de c-i.i. y d-i.i., siendo además la representación y formato que mayor ocurrencia tiene.

- El fenómeno ADI predomina en los sistemas de representación verbal y formato ejemplo (v-e), y tabular y formato ejemplo (t-e), siendo el primero de ellos cuando más ocurrencia tiene en su propio fenómeno. Hay que destacar que el fenómeno ADI es el único identificado en los sistemas de representación gráfico y simbólico, y formato definición (g-d y s-d).
- No se ha identificado ninguno de los fenómenos en el sistema de representación tabular y formato definición (t-d), ni tampoco en el sistema de representación simbólico y formato ejemplo (s-e).
- Los fenómenos c-i.i. y d-i.i., y el fenómeno a.s.i., pese a ser ambos fenómenos del límite de una sucesión, infinito y finito respectivamente, tienen una gran diferencia entre sus frecuencias absolutas para el sistema de representación verbal y formato definición (v-d), y sistema de representación gráfico y formato ejemplo (g-e). En el primer caso, la incidencia del límite infinito de una sucesión es casi cuatro veces superior a la del límite finito de una sucesión; mientras que, en el segundo, el límite finito es casi cuatro veces superior al límite infinito.

Además, se ha considerado importante establecer la comparación de la evolución histórica de aquellos sistemas de representación y formato que tuviesen la identificación de los tres fenómenos, estos son: v-d, v-e, g-e y t-e.

Como ya sucediese en las evoluciones históricas del apartado 5.4 se ha tomado el número de fenómenos que tiene de media cada libro de texto, ya que se ha considerado significativa la diferencia en la muestra de cada periodo legislativo. En los estudios previos se consideró el intervalo entre el año 1933 y el 2005, por lo que la comparación de las evoluciones históricas se tomará para los periodos legislativos siguientes: Ley Moyano, LGE y LOGSE.

Tabla 5.33. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-d).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i.+d-i.i.	0,88	0,92	0,67	0,75	0,5
a.s.i.	0,1	0,08	0,71	-	-
ADI	0,3	0,73	1	-	-

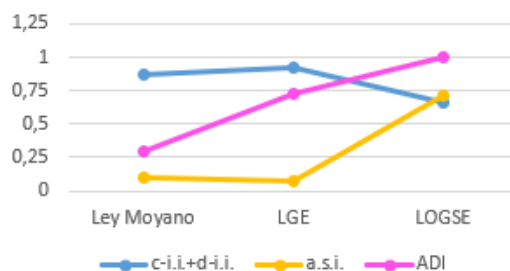


Figura 5.35. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-d).

Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. son los predominantes en la Ley Moyano para el sistema de representación verbal y formato definición. Éstos sufrieron un leve crecimiento en la LGE y se redujeron casi la tercera parte en la LOGSE. El fenómeno a.s.i. se mantuvo con el primer cambio de ley e incrementó su presencia considerablemente en la LOGSE, superando incluso a la incidencia de los fenómenos intuitivos del límite infinito de una sucesión. El fenómeno ADI cuadruplicó su presencia desde la Ley Moyano hasta la LOGSE, siendo su ocurrencia superior a los fenómenos de los dos límites anteriores.

Tabla 5.34. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-e).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i.+d-i.i.	0,38	1,15	1	1	1
a.s.i.	0,1	1,23	1,29	-	-
ADI	0,3	1,27	2	-	-

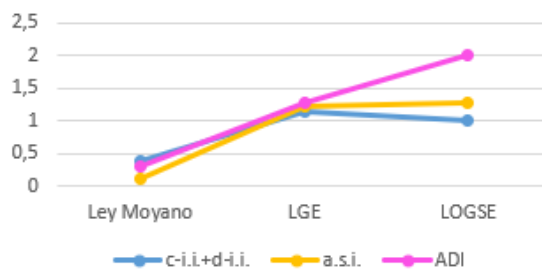


Figura 5.36. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (v-e).

Los fenómenos intuitivos organizados por una definición del límite finito e infinito de una sucesión, a.s.i. y c-i.i.+d-i.i. han sufrido similares variaciones, incrementándose en la LGE y manteniendo más o menos su ocurrencia en la LOGSE. El fenómeno ADI, como ya sucediese con el formato definición, ha incrementado con cada cambio legislativo su incidencia en los libros de texto.

Tabla 5.35. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (g-e).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i.+d-i.i.	0	0,23	1,17	0,5	0
a.s.i.	0	1,77	1,86	-	-
ADI	0	0,64	1	-	-

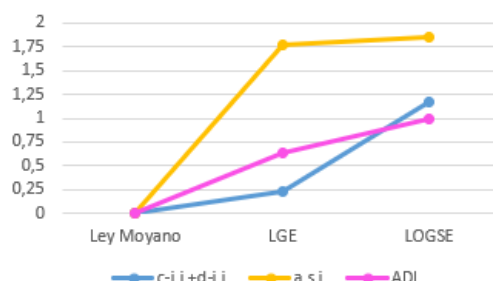


Figura 5.37. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (g-e).

El caso del sistema de representación gráfico y formato ejemplo es el que presenta una evolución más dispar con los cambios legislativos. Ninguno de los límites se identificó en los libros de texto de la Ley Moyano; en la LGE, la incidencia del fenómeno a.s.i. era casi 8 veces superior a c-i.i.+d-i.i. y más del doble que ADI; y en la LOGSE todos ellos experimentan un incremento, aunque son los fenómenos intuitivos correspondientes al límite infinito de una sucesión en los que este crecimiento es más acentuado.

Tabla 5.36. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (t-e).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i.+d-i.i.	0	0	1	0	0,25
a.s.i.	0	0,08	1,57	-	-
ADI	0,1	0,64	2	-	-

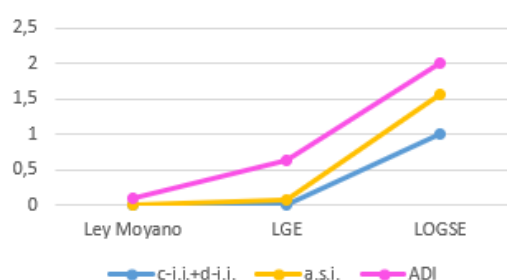


Figura 5.38. Evolución histórica de los fenómenos intuitivos (t-e).

Los tres límites presentan un crecimiento motivado por los cambios legislativos, mayor con la entrada en vigor de la LOGSE. En el caso de los fenómenos c-i.i.+d-i.i. y a.s.i. no se identifican hasta la llegada de esta ley, ya que el valor correspondiente a a.s.i. en la

LGE se considera casi anecdótico. ADI se ve incrementado en más de 20 veces desde la Ley Moyano hasta la LOGSE.

5.5.2. Comparación de los resultados obtenidos con el estudio de libros de texto para los fenómenos formales.

En la comparación de los fenómenos formales no se ha presentado la problemática de los fenómenos intuitivos. En este caso existe una correspondencia biunívoca entre ellos, todos siguen el proceso denominado de ida y vuelta.

Para esta comparación de nuevo, se ha tenido en cuenta todos los códigos fenomenológicos, considerando el sistema de representación y el formato de las frecuencias absolutas.

Tabla 5.37. Frecuencias absolutas de los fenómenos formales.

Sist. Repr. - Formato	i.v.s.i.	i.v.s.	IVF
v-d	48	25	21
v-e	35	13	12
g-d	3	7	12
g-e	0	7	8
t-d	0	0	0
t-e	0	1	0
s-d	10	17	17
s-e	11	37	15
Subtotales	107	107	85

Como puede observarse, existe una igualdad entre el número de fenómenos i.v.s.i. e i.v.s. identificados. Pese a ello, realizamos una comparación más precisa realizando la división de las frecuencias absolutas entre el número total de libros analizados para cada uno de los límites, como en el caso de los fenómenos de enfoque intuitivo, obteniendo así el número de fenómenos medio en cada libro. Estos datos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.38. N° medio de fenómenos formales en cada libro de texto.

Sist. Repr. - Formato	i.v.s.i.	i.v.s.	IVF
v-d	1,37	0,83	0,75
v-e	1	0,43	0,43
g-d	0,09	0,23	0,43
g-e	0	0,23	0,29
t-d	0	0	0
t-e	0	0,03	0
s-d	0,29	0,57	0,61
s-e	0,31	1,23	0,54
Subtotales	3,06	3,55	3,05

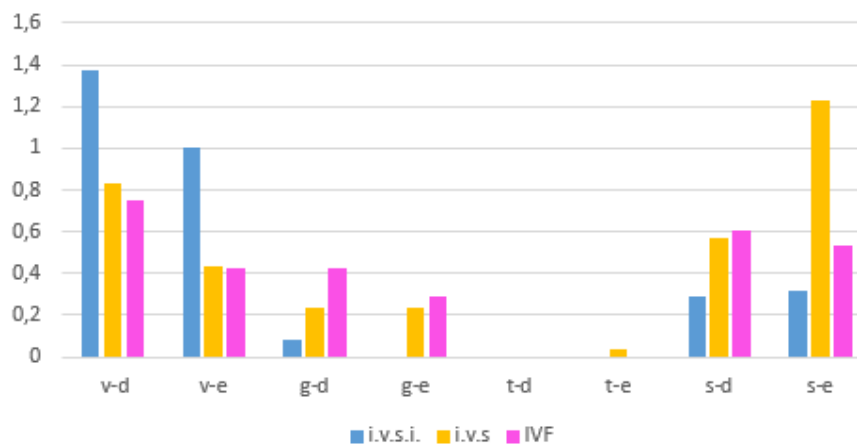


Figura 5.39. Comparación de los fenómenos formales.

En consecuencia, podemos establecer las siguientes relaciones sobre un enfoque formal:

- El fenómeno i.v.s.i. predomina en el sistema de representación verbal, en ambos formatos (v-d y v-e), siendo además la representación con mayor frecuencia para este fenómeno.
- El fenómeno i.v.s. predomina en el sistema de representación simbólico y formato ejemplo (s-e), siendo además la representación s-e la que tiene mayor ocurrencia para el propio fenómeno.
- Respecto al sistema de representación gráfico el fenómeno IVF es el que tiene mayor frecuencia tanto en ejemplo como en definición. Hay que señalar que en este sistema de representación el fenómeno i.v.s.i. en el formato ejemplo no aparece.

- No se ha identificado ninguno de los fenómenos en el sistema de representación tabular y formato definición (t-d), y solo el fenómeno IVF ha podido serlo para el formato ejemplo, casi de manera testimonial.

De nuevo se ha considerado importante establecer la comparación de la evolución histórica de aquellos sistemas de representación y formato que tuviesen la identificación de los tres fenómenos, estos son: v-d, v-e, g-d, s-d y s-e. Dado que, de nuevo, el número de libros en cada uno de los periodos legislativos no ha sido el mismo, se ha dividido su frecuencia absoluta entre el número de libros de texto obteniendo así el número medio de fenómenos en cada manual.

Tabla 5.39. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-d).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i.	0,88	1,54	2	1,75	0,5
i.v.s.	0,7	1,08	0,57	-	-
IVF	0,9	0,82	0,43	-	-

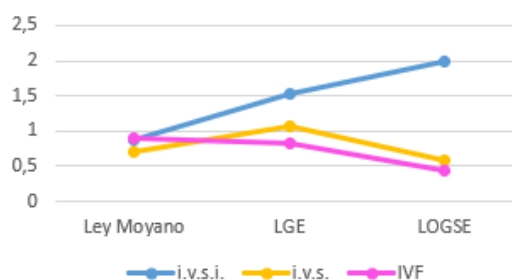


Figura 5.40. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-d).

El fenómeno i.v.s.i. tiene un crecimiento casi lineal en el sistema de representación verbal y formato definición, duplicando su ocurrencia desde la Ley Moyano hasta la LOGSE. Por su parte, i.v.s. aunque ve incrementada su incidencia en la LGE, ésta disminuye en la LOGSE. Mientras, IVF disminuye en cada periodo legislativo, reduciéndose a la mitad su presencia en los libros de texto.

Tabla 5.40. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-e).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i.	0,5	1,23	2	0,75	0
i.v.s.	0,5	0,46	0,29	-	-
IVF	0,5	0,55	0,14	-	-

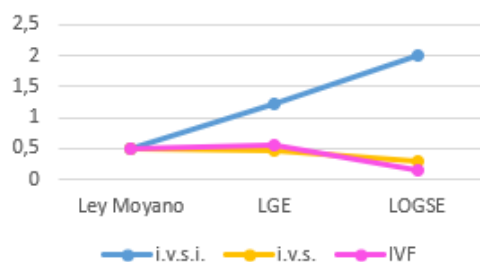


Figura 5.41. Evolución histórica de los fenómenos formales (v-e).

De manera análoga ocurre para el sistema de representación verbal y formato ejemplo, en el que el fenómeno i.v.s.i. tiene un crecimiento casi lineal, aunque en este caso cuadruplicando su ocurrencia desde la Ley Moyano hasta la LOGSE. Por su parte, i.v.s. y IVF, aunque mantienen su incidencia en la LGE, ésta disminuye en la LOGSE.

Tabla 5.41. Evolución histórica de los fenómenos formales (g-d).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i.	0	0,15	0	0,25	0
i.v.s.	0,2	0,38	0	-	-
IVF	0,6	0,45	0,14	-	-

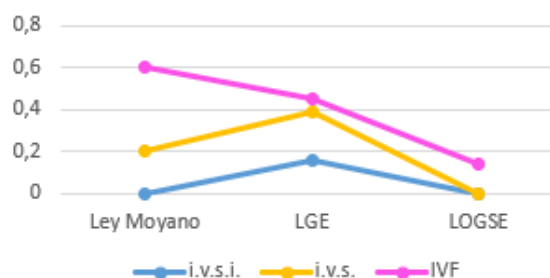


Figura 5.42. Evolución histórica de los fenómenos formales (g-d).

El comportamiento de los fenómenos i.v.s.i. e i.v.s. es similar, creciente en el cambio a la LGE y desapareciendo con la entrada en vigor de la LOGSE. Por su parte, el fenómeno IVF ve disminuida su presencia en los libros de texto a la cuarta parte después de los dos cambios legislativos.

Tabla 5.42. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-d).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i.	0	0,46	0	1	0
i.v.s.	0,5	0,92	0	-	-
IVF	0,4	1	0,29	-	-

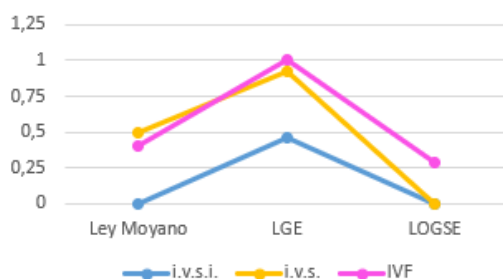


Figura 5.43. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-d).

Para el sistema de representación simbólico y formato definición, los tres fenómenos incrementan su ocurrencia con la LGE y la disminuyen en la LOGSE, llegando incluso a desaparecer los fenómenos i.v.s.i e i.v.s., tal y como ocurriese para el g-e.

Tabla 5.43. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-e).

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i.	0	0,31	1,17	0	0
i.v.s.	0,6	2,23	0,29	-	-
IVF	0,3	1	0,14	-	-

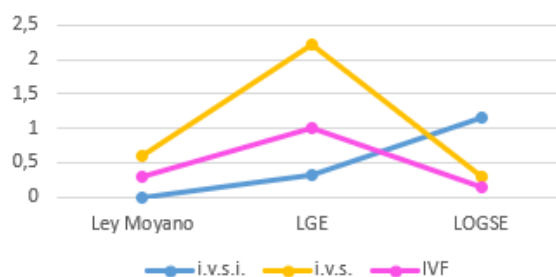


Figura 5.44. Evolución histórica de los fenómenos formales (s-e).

Los fenómenos i.v.s. e IVF sufren un comportamiento similar que para el formato definición, mientras que el fenómeno i.v.s.i. incrementa su frecuencia absoluta con la entrada en vigor de cada nueva ley.

5.5.3. Otras comparaciones. Perspectivas futuras.

En las comparaciones realizadas con los fenómenos intuitivos del límite infinito de una sucesión, límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto nos hemos encontrado con una limitación: la ausencia de un análisis a partir del año 2005 para estos dos últimos. Esto no nos ha permitido obtener la relación existente para la LOE y la LOMCE. Queda pendiente, por tanto, la continuación de estos análisis con libros de texto editados a partir del año 2005 que completen el ya realizado.

Además, dado que existen más fenómenos para otros límites todavía no estudiados, y que ya han comenzado a conjeturarse en el *Capítulo 4*, se genera la necesidad de nuevas comparaciones para el límite infinito de una función en el infinito, límite finito de una función en el infinito y límite infinito de una función en un punto.

5.6. Conclusiones

Como ha podido apreciarse durante los sucesivos apartados de este capítulo, ha quedado latente que a partir de un estudio empírico de libros de texto es posible identificar los fenómenos caracterizados en el *Capítulo 4* en algunos de los sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular y simbólico, y formatos: definición y ejemplo, señalados.

Además, no solo se han identificado, sino que ha sido posible establecer una relación entre ellos y diferentes periodos temporales, considerando las décadas y las leyes educativas españolas.

El fenómeno c-i.i. ha sido identificado en el sistema de representación verbal, gráfico y tabular. Para el primero, se han encontrado definiciones y ejemplos involucrados en su proceso de enseñanza, mientras que para los segundos solo ha sido posible en el formato ejemplo. 44 de los 56 fragmentos encontrados, se presentan en el sistema de representación verbal, un 78.57%, teniendo el formato ejemplo una frecuencia mayor.

De forma análoga ocurre para el fenómeno d-i.i., para el que no se identificó ningún fragmento en el sistema de representación simbólico, y tampoco definiciones en los sistemas de representación gráfico y tabular. Sus apariciones son menores que para el fenómeno c-i.i., 23 fragmentos. De éstos, 16 corresponden al sistema de representación verbal, un 69.57%, siendo el formato definición el que tiene una frecuencia ligeramente superior, 9 fragmentos corresponden a definiciones y 7 a ejemplos.

El fenómeno i.v.s.i predomina en el sistema de representación verbal, 83 de los 107 fragmentos, lo que constituye un 77.57%, y su frecuencia es mayor en el formato definición. No aparece en el sistema de representación tabular. Respecto al sistema de representación gráfico aparece con poca frecuencia, en 3 ocasiones, y asociado al formato definición, en contraposición con los fenómenos intuitivos. En el sistema de representación simbólico aparece tanto en ejemplo, 11 fragmentos, como en definición, 10 fragmentos, y con una frecuencia notable.

Considerando la evolución temporal por décadas y el número medio de fenómenos por libro puede afirmarse:

- El sistema de representación verbal es el dominante para el fenómeno c-i.i. durante los 80 años estudiados; la representación gráfica comenzó a observarse a partir del año 1980, pero desapareció en 2009; el sistema de representación tabular

se inició en 1990. Además, el número medio de fragmentos en los que se identifica este fenómeno fue mayor en los periodos 1980-1989 y 2000-2009, con 2 y 2.125 fenómenos respectivamente.

- En el fenómeno d-i.i. se identifica siempre una dominancia del sistema de representación verbal, mientras que los sistemas de representación gráfico y tabular solo tienen incidencia en el periodo 1990-2009.
- Para el fenómeno i.v.s.i. predomina el sistema de representación verbal en los 80 años analizados. Algunos sistemas de representación han sido identificados solo en algunas décadas, el gráfico en 1990-2009 y el simbólico en 1970-2009. El auge de este fenómeno se evidenció en 1990-1999, mientras que en la última década su presencia ha disminuido tanto que resulta ser casi inexistente situándose en una situación similar a la del periodo 1936-1949.

Reflexionando sobre los cambios legislativos en España y el número medio de fenómenos por libro concluimos lo siguiente:

- El sistema de representación dominante para el fenómeno c-i.i. es el verbal durante las 5 leyes educativas estudiadas. El sistema de representación gráfico está presente en la LGE, la LOGSE y la LOE, pero no en la Ley Moyano y la LOMCE. De forma similar ocurre con la representación tabular, quien tiene lugar durante la LOGSE y la LOMCE. Este fenómeno tuvo una mayor incidencia en los libros de texto durante la LOGSE.
- Para el fenómeno d-i.i. debe establecerse una diferenciación entre leyes educativas si quiere exponerse su dominancia: el sistema de representación verbal se produce en mayor medida durante la Ley Moyano, la LGE, la LOE y la LOMCE, mientras que durante la LOGSE existe una igualdad entre las frecuencias de este fenómeno en los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular. Para finalizar señalamos que, aunque su enfoque también sea intuitivo, este fenómeno tiene una menor frecuencia que el c-i.i.
- El fenómeno i.v.s.i. tiene como principal sistema de representación el verbal, el cual se presenta en las 5 leyes educativas españolas. El sistema de representación gráfico solo se presenta en la LGE y la LOE. De forma similar ocurre con el sistema de representación simbólico, identificado en la LGE, LOGSE y LOE. El auge de este fenómeno se evidencia en la LOGSE, coincidiendo con el auge de

los fenómenos de enfoque intuitivo. En la última ley educativa, LOMCE, su identificación ha resultado ser casi inexistente.

En la comparación con los fenómenos de enfoque intuitivo de los estudios de Claros (2010) y Sánchez (2012) podemos deducir que los fenómenos c-i.i. y d-i.i. predominan en el sistema de representación verbal y formato definición frente a los fenómenos a.s.i. y ADI; a.s.i. prevalece en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo; y ADI destaca en los sistemas de representación verbal y formato ejemplo.

En el ámbito formal, i.v.s.i. prevalece en el sistema de representación verbal; i.v.s. lo hace para el sistema de representación simbólico y formato ejemplo, e IVF es el dominante en el sistema de representación gráfico en ambos formatos y en el sistema de representación simbólico y formato definición. Además, ninguno de los fenómenos fue reconocido para el sistema de representación tabular y formato definición, solo i.v.s. pudo observarse en dicho sistema de representación y en formato ejemplo de forma casi testimonial, 1 fragmento.

**Capítulo 6. Fenomenología del límite infinito de una
sucesión en profesorado de Educación Secundaria en
formación**

6. Fenomenología del límite infinito de una sucesión en profesorado de Educación Secundaria en formación

En la delimitación del problema de investigación, descrito en el *Capítulo 1*, ya se estableció como objetivo la identificación de los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión en las respuestas obtenidas por el alumnado del Máster de Formación del Profesorado, y por ello la puesta en marcha de un protocolo, con el que poder analizar los comentarios realizados por este alumnado.

Se ha considerado importante mostrar qué tipo de fragmentos utilizarían en su futura labor docente los estudiantes del Máster universitario en Formación del profesorado en Ed. Secundaria, Bachillerato, FP e Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, así como la identificación que realizan sobre los fenómenos caracterizados en el *Capítulo 4*. Para ello, se formaron grupos de 3-4 personas, donde el alumnado debía debatir acerca de la adecuación o no de determinados fragmentos en su futura labor docente.

La estructura que se ha utilizado se divide en cuatro apartados: método: materiales, pruebas piloto, fases del protocolo de actuación y tratamiento de la información; características de la muestra; análisis, y conclusiones de los debates. A continuación, se describe el contenido de cada uno de ellos.

El apartado 6.1., método, está dividido en cuatro subapartados. En el primero de ellos se presenta el material final utilizado con el alumnado, indicando los fragmentos que conforman parte del cuestionario con una breve descripción de su enfoque, su sistema de representación y formato. En el segundo se realiza una descripción minuciosa del diseño de protocolo de actuación, con cada una de las modificaciones realizadas en cada una de las pruebas piloto. En el tercero se describen las fases de las que consta el protocolo de actuación. Por último, en el cuarto se encuentra la categorización llevada a cabo para facilitar un posterior análisis.

La descripción de la muestra se encuentra en el apartado 6.2., donde se indica la codificación utilizada para cada estudiante, la titulación de acceso al máster, año de universidad y año en que se expidió dicho título, universidad de realización del Máster de Formación del Profesorado y si el estudiante cuenta con algún tipo de experiencia docente.

El apartado 6.3. está compuesto por cuatro subapartados: informes realizados, análisis de los perfiles fenomenológicos, comparación de estos perfiles con el de los docentes en activo y comparación con los libros de texto. En el primero de los subapartados se detalla la estructura que se ha tenido en cuenta para presentar los informes grupales e individuales, acompañados de un ejemplo. En el segundo se analizan los perfiles fenomenológicos de cada uno de los futuros docentes, y la utilización o no de cada uno de los fragmentos presentados en el cuestionario. En el tercero se realiza la comparación de estos resultados con los arrojados en la tesis doctoral de Sánchez (2012) para docentes en activo. En el cuarto se comparan estos resultados con los libros de texto, analizados en el *Capítulo 5*.

Finalmente, en el apartado 6.4. se presentan las conclusiones obtenidas de este capítulo.

6.1. Método: materiales, pruebas piloto, fases del protocolo de actuación y tratamiento de la información.

En este estudio se han establecido grupos de debate entre el alumnado del Máster universitario en Formación del profesorado en Ed. Secundaria, Bachillerato, FP e Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, para tratar de identificar distintos tipos de perfiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite infinito de una sucesión en su futura práctica docente.

Partimos de la premisa que el itinerario formativo de los estudiantes que acceden a esta especialidad es variado: licenciados o graduados en Matemáticas, Físicas, diferentes Ingenierías, Arquitectura, ..., y que, por tanto, su conocimiento matemático es muy diverso. Los resultados entre el alumnado que tiene formación matemática y el que no lo tiene arroja diferencias. Algunas de ellas serán analizadas en el apartado 6.3., mientras que otras quedarán como perspectivas futuras.

Como se ha descrito en la introducción, en este apartado pueden encontrarse las descripciones del material utilizado, de las tres pruebas piloto llevadas a cabo, de las fases establecidas por el equipo investigador de las que constó el protocolo, y la categorización y descripción de las categorías que se utilizarán.

6.1.1. Material utilizado con el alumnado

Como ya sucediese en Sánchez (2012), se decidió disponer de un material común que permitiese analizar al alumnado individualmente de forma sistemática y comparar los resultados con otros estudios más globales.

Este material estuvo compuesto por diferentes fragmentos de los libros de textos analizados en el *Capítulo 5*, junto a otros elaborados por el equipo investigador, con los que poder identificar los tres fenómenos caracterizados: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., teniendo en cuenta los diferentes sistemas de representación. Una descripción más minuciosa de este material se encuentra en el apartado 6.2.

Al alumnado se le proporcionó un documento inicial en el que recoger sus datos (ver Figura 6.1), así como una presentación de la investigación que estaba siendo llevada a cabo y el establecimiento de unas pautas y sugerencias que facilitasen el hilo conductor de su discurso.

Nombre y apellidos:

Titulación de acceso al Máster:

Expedida por la Universidad de:

Año en el que obtuvo la titulación:

Experiencia docente previa: Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo indique donde, nivel académico y años de experiencia:

Está interesado/a en participar en una entrevista explicativa de sus respuestas: Sí ☐ No ☐

Figura 6.1. Datos proporcionados por el alumnado participante.

Finalizada la lectura del documento inicial y la cumplimentación de los datos, se entregó al alumnado el primer cuestionario, compuesto por 11 fragmentos y una tabla final en la que poder realizar una ordenación de los mismos para una posible secuencia didáctica. El objetivo de esta tabla final era poder establecer una comparativa con el estudio de Claros et al. (2016b). En él se establecían dos guiones de secuencias didácticas para el límite finito de una sucesión, dependiendo de que se tuviese un candidato a límite o de que se observen las diferencias entre los términos de la sucesión. El análisis de estas secuencias didácticas para el límite infinito de una sucesión, y la posterior comparación con el estudio anteriormente presentado, no se realizará finalmente en el presente estudio, quedando así como perspectiva futura.

En estos 11 fragmentos, extraídos de libros de texto de diferentes etapas educativas y elaborados por el propio equipo investigador, se identifican los tres fenómenos caracterizados y los diferentes sistemas de representación. Todos ellos fueron transcritos utilizando su disposición original, con el objetivo de evitar que el alumnado pudiese guiarse por la antigüedad o la nitidez de cada uno de ellos.

En la siguiente tabla pueden comprobarse el fenómeno y el sistema de representación de cada fragmento:

Tabla 6.1. Fragmentos, fenómenos y sistemas de representación empleados en el cuestionario.

	i.v.s.i.	c-i.i.	d-i.i.
Gráfico	Fragmento E	Fragmento D	Fragmento J
Tabular	Fragmento H	Fragmento K	Fragmento C
Verbal	Fragmento F Fragmento G	Fragmento B	Fragmento I
Simbólico	Fragmento A	-	-

En el *Anexo A3.2.* se encuentran los once fragmentos, junto a la información del libro en el que aparecen.

Como puede observarse en la Tabla 6.1., no se presentó ningún fragmento en el sistema de representación simbólico para los fenómenos c-i.i. y d-i.i., ambos de un enfoque intuitivo. El motivo de esta ausencia es debido a que en la muestra de libros de texto tomada en el *Capítulo 5*, así como en los estudios de Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros et al. (2016b), no se encontró ningún ejemplo o definición en el sistema de representación simbólico y un enfoque intuitivo. Esto mismo ocurrió con el sistema de representación tabular y un enfoque formal, pero en este caso el equipo investigador decidió elaborar un ejemplo propio.

Para evitar que el cuestionario tuviese una extensión excesiva no se ha tenido en cuenta la aparición de cada uno de los formatos, definición y ejemplo, para cada uno de los sistemas de representación, salvo para el sistema de representación verbal y fenómeno i.v.s.i. De esta forma quedaron equilibrado el número de fragmentos formales, 5, y el número de fragmentos intuitivos, 6.

En el caso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo se optó por presentar ejemplos en todos los casos. Para el sistema de representación verbal el motivo fue tener una frecuencia absoluta mayor que para las definiciones, mientras que para los sistemas de representación tabular y gráfico no se encontró ninguna definición en los libros de texto consultados.

En el caso de los fragmentos que tienen un enfoque formal se decidió tomar una definición y un ejemplo en el sistema de representación verbal, ya que su presencia en los libros de textos es muy representativa en ambos casos. Además, esta definición fue la seleccionada por el grupo de expertos que participaron en el cuestionario presentado al comienzo del *Capítulo 4*, y por tanto la que ha sido utilizada para la caracterización de los fenómenos del límite infinito de una sucesión. En el sistema de representación simbólico se presentó una definición, ya que no existe una diferencia significativa entre el número de ejemplos y de definiciones presentadas en este sistema de representación en los libros de texto de Secundaria y Bachillerato, pero es la predominante en cursos universitarios. Para el sistema de representación gráfico, no se encontró ningún ejemplo y solo 3 definiciones en los libros de texto. Dado que éstas formaban parte de fragmentos que estaban compuestos por otros fenómenos, se decidió tomar el ejemplo que nos sirvió para

presentar el fenómeno i.v.s.i. en el sistema de representación gráfico en el Capítulo 3, en lugar de los encontrados en los libros de texto. En el caso del sistema de representación tabular, no encontramos ningún fragmento en los 35 libros de texto analizados, pero se pretendió observar los comentarios del alumnado ante un ejemplo que no hubiesen visto nunca, y estudiar si podían comprenderlo e incluirlo en su futura labor docente.

Las letras atribuidas a cada uno de los fragmentos y que van a servir para su identificación han sido otorgadas de forma completamente aleatoria, evitando seguir un patrón previamente establecido.

- Fragmento A. Incluye una definición donde se identifica el fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito* en el sistema de representación simbólico. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento B. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *crecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación verbal. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento C. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *decrecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación tabular. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento D. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *crecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación gráfico. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento E. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito* en el sistema de representación gráfico. Este fragmento es de elaboración propia, pese a que se hayan encontrado algunos ejemplos o definiciones en los libros de texto analizados. Hemos querido mostrar, de forma explícita, el fenómeno en este fragmento.
- Fragmento F. Incluye una definición donde se identifica el fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito* en el sistema de representación verbal. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora. Además, esta definición fue la seleccionada por los expertos, a partir de un cuestionario, para este estudio fenomenológico.
- Fragmento G. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito* en el sistema de representación verbal. Este

fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.

- Fragmento H. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito*. en el sistema de representación tabular. Este fragmento es de elaboración propia, puesto que no se ha encontrado ningún ejemplo o definición en los libros de texto analizados.
- Fragmento I. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *decrecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación verbal. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento J. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *decrecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación gráfico. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.
- Fragmento K. Incluye un ejemplo donde se identifica el fenómeno *crecimiento intuitivo ilimitado* en el sistema de representación tabular. Este fragmento ha sido encontrado en un libro de texto y posteriormente transcrito por la investigadora.

Cada uno de estos fragmentos es aceptado o rechazado por los y las estudiantes, mediante el correspondiente debate, para su futura incursión en el aula. Los comentarios emitidos y las justificaciones pertinentes quedan registrados en formato de audio.

Finalizado el cuestionario por parte de todos los grupos se realiza una incursión por parte del equipo investigador, que será explicada en el apartado 6.1.3, y se procede al desarrollo de un segundo cuestionario. En él se presentan los mismos fragmentos que en el cuestionario anterior, estableciendo el mismo debate de adecuación o no para su incursión en el aula, pero con una primera información adicional a cumplimentar. Los futuros docentes deben identificar los fenómenos que se encuentran en cada uno de los fragmentos. Además, se suprime la tabla en la que presentar la posible secuencia didáctica.

6.1.2. Pruebas piloto

La disposición de los estudiantes estuvo sujeta a la realización de tres pruebas piloto.

6.1.2.1 Primera prueba piloto

La primera de ellas fue realizada durante la estancia de investigación predoctoral desarrollada en la Universidad de Zaragoza. En ella se consideró adecuado saber el conocimiento que tenía el alumnado del Máster de Formación del Profesorado acerca del límite infinito de una sucesión, sus posibles formas de resolución y cómo abordarían este límite en su futura labor docente. Por ello, se les planteó una actividad previa a la realización del cuestionario que se describe a continuación. Esta prueba fue realizada, de forma individual, por 12 estudiantes con estudios de: Matemáticas (9), Ingeniería Industrial (2) e Ingeniería de Telecomunicaciones (1).

Con ella quería determinarse qué alumnado tenía el conocimiento suficiente para llevar a cabo el análisis del cuestionario y quienes, por su desconocimiento, debían ser eliminados de la muestra. La tarea planteada fue la siguiente:

Estudie el límite de la sucesión a_n definida por $a_n = n^2 - 15$. Justifique su respuesta. Después, indique la explicación que daría en el aula a sus alumnos/as.

Figura 6.2. Tarea prueba en la primera prueba piloto.

Pese a que todos ellos contaban con formación matemática en sus titulaciones, fueron detectados varios errores, entre los que se encuentran: representación gráfica de una función en lugar de una sucesión, escritura del límite cuando $n \rightarrow -\infty$, o indecisión sobre dónde realizar el límite porque no se especificaba, entre otros.

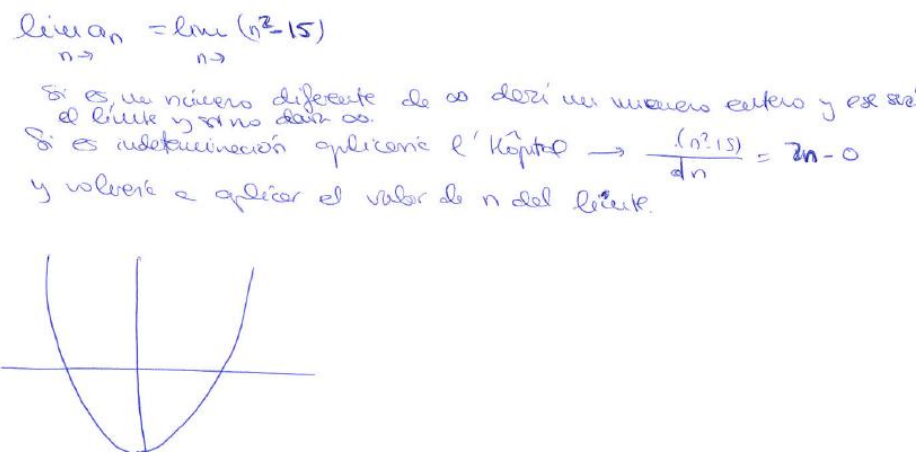


Figura 6.3. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) titulado en Ingeniería de Telecomunicaciones.

Para calcular un límite, primero hay que ver
 para qué valor de n (en qué punto).
 Por ejemplo si, en este caso, el límite es:
 - cuando n tiende a 0 $\Rightarrow -15$
 - cuando n tiende a $\infty \Rightarrow \infty$.

Figura 6.4. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) titulado en Ingeniería Industrial.

Si $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Como } n \text{ está elevado} \\ \text{a un exponente} \\ \text{par, } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ es } +\infty \end{array} \right.$
 $\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = +\infty$

Figura 6.5. Respuesta de estudiante Máster Formación Profesorado (Matemáticas) licenciado en Matemáticas.

Durante esta prueba, además de los errores surgidos en la tarea previa, se observó que durante la realización del cuestionario de forma individual se perdía información sobre la adecuación o no de los fragmentos por la poca o nula justificación que daban algunos estudiantes, y la imposibilidad de realizar explicación alguna por parte de la investigadora para no influenciar en su apreciación. Además, el segundo cuestionario fue tomado en cuenta como una repetición del anterior y no se le otorgó la importancia adecuada.

Por todos estos motivos se consideró a este cuestionario como primera prueba piloto. A continuación, se tomó la determinación de realizar modificaciones al mismo antes de una segunda administración. Este segundo cuestionario se detalla en el subapartado siguiente.

6.1.2.2 *Segunda prueba piloto*

Conscientes de modificaciones intermedias, pero sin actualizar ninguno de los apartados del cuestionario, replicamos esta misma prueba, denominada segunda prueba piloto, de forma grupal en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) durante el XXII Simposio de la SEIEM, en Gijón. Este grupo estuvo compuesto por profesores con una dilatada experiencia docente e investigadora, y ellos podrían aportarnos sugerencias que mejorasen nuestro protocolo de actuación, y no solamente comprobar los resultados fenomenológicos de nuestra investigación.

El protocolo seguido fue modificado respecto a la primera prueba piloto, realizando el cuestionario de forma grupal y estableciendo un debate sobre la adecuación o no de cada uno de los fragmentos. Esta modificación vino determinada por el formato habitual del grupo de investigación, en el cual se vienen realizando diferentes talleres donde predomina la interacción entre sus miembros. Además, se mantuvo la tarea inicial de conocimiento del límite infinito de una sucesión de la primera prueba piloto.

El principal inconveniente que encontraron fue la realización de una actividad previa, donde puede condicionarse al participante del cuestionario sobre el sistema de presentación y enfoque a ser utilizado en el aula, además de sentirse evaluado y tener una perspectiva equivocada de su rol como docente.

Después de las sugerencias de modificación recibidas por los miembros de GIDAM se decidió suprimir la tarea inicial en futuras administraciones del mismo y mantener los grupos de discusión frente al desarrollo individual.

6.1.2.3 *Tercera prueba piloto*

Con todas las modificaciones realizadas se elaboró una tercera prueba piloto con el grupo de Máster Formación del Profesorado de la Universidad Rey Juan Carlos, donde participaron 6 grupos, formados por 20 estudiantes, quienes se encontraban en su clase habitual y disponían de un dispositivo móvil por grupo para realizar la grabación del debate. El protocolo funcionó correctamente, pero la recogida de datos auditivos no fue satisfactoria por el solapamiento de voces de los distintos grupos, haciendo muy dificultoso su análisis posterior.

Con todas estas pruebas piloto se elaboró el protocolo de actuación e instrumento definitivo, el cual se encuentra en el siguiente apartado.

6.1.3. Fases establecidas

Después de las tres pruebas piloto se estableció el protocolo definitivo, compuesto por cuatro fases: presentación, realización del primer cuestionario, explicación del estudio fenomenológico del límite infinito de una sucesión y realización del segundo cuestionario. Para ello se establecieron grupos de debate de 3-4 personas, elegidos de forma aleatoria. Atendiendo a la tercera prueba piloto se habilitó un espacio adicional, además de la clase habitual, para la óptima recogida de datos.

Estas discusiones grupales sobre diferentes fragmentos donde aparece el límite infinito de una sucesión y en las que identificar su fenomenología fueron realizadas en la Universidad Complutense de Madrid y en la Universidad de Málaga. En ellas participaron 8 grupos formados por 28 estudiantes. Una descripción de la muestra se encuentra en el apartado 6.2.

El protocolo de actuación elaborado después de la realización de tres pruebas piloto facilita la sistematización y la categorización de los comentarios elaborados por el alumnado.

Para un correcto desarrollo, se solicitó un aula de mayores dimensiones a la habitual para evitar el solapamiento de las voces y que los estudiantes pudiesen debatir en un ambiente más adecuado. Además, por parte de las universidades involucradas, Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Málaga, se facilitaron otros lugares donde el alumnado pudiese intercambiar opiniones sin interrupciones de ningún tipo.

Este protocolo constó de 4 fases, que se describen a continuación:

Fase 1: La investigadora entregó al alumnado la carta de presentación, sin modificación desde la primera prueba piloto. En dicha carta se establecieron las pautas de desarrollo de la tarea a realizar: presentación de cada uno de los participantes para identificar sus voces con sus respectivos datos y el nombramiento de cada uno de los fragmentos por su letra identificativa, así como diferentes sugerencias que facilitarían el hilo conductor: cursos o niveles educativos de impartición de los fenómenos, dificultades encontradas en el fragmento o predilección por alguno de los fragmentos. Además, esta fase fue utilizada para resolver las dudas que pudiesen surgir en el alumnado. Cabe destacarse que, dado que todos ellos habían superado las asignaturas de matemáticas correspondientes en Bachillerato y al menos una asignatura de matemáticas en la titulación de acceso al Máster, se presupone que todos ellos conocen el límite infinito de una sucesión.

Fase 2: Como ya sucediese en la tesis doctoral de Sánchez (2012), se denominó a esta fase como “espontánea”. En ella, se le proporcionó al alumnado el primer cuestionario, compuesto por los 11 fragmentos descritos con anterioridad y una tabla en la que incorporar los que considerasen adecuados y en el orden de la impartición de una futura secuencia didáctica. Durante los primeros 5-10 minutos los estudiantes debían realizar un trabajo individual de lectura de cada uno de los fragmentos para su comprensión y su aceptación o no para su posible incursión en el aula en su futura labor docente. Posteriormente tenían que presentarse y comenzar a debatir sobre estos fragmentos. El tiempo estimado para este debate era de 25-30 minutos, aunque finalmente fue de entre 13’16’’ y 38’13’’. Pese a que algunos grupos sobrepasaron el tiempo estimado, en ningún momento se les quiso interrumpir o mencionar el tiempo pensado para la realización de esta tarea que les había sido encomendada.



Figura 6.6. Reflexión individual previa al debate grupal.



Figura 6.7. Debate grupal sobre los fragmentos planteados.

Fase 3: La investigadora realizó, en su incursión en el aula, la presentación de la investigación; para ello se presentó el marco teórico empleado: fenomenología, sistemas de representación, Pensamiento Matemático Avanzado y Teoría APOS. A continuación, se les presentó una definición del límite infinito de una sucesión. Ésta correspondía a la elección realizada por expertos matemáticos respondiendo a una corrección matemática

y no a una adaptación didáctica. Finalmente se presentó al alumnado la caracterización de los tres fenómenos organizados por dicha definición: c-i.i. y d-i.i. (enfoque intuitivo) e i.v.s.i. (enfoque formal).

Fase 4: En esta fase, denominada “inducida”, se les entregó el segundo cuestionario al alumnado. Dicho cuestionario estaba compuesto por los mismos fragmentos que el primero, y además de la adecuación o no de cada uno de ellos para su impartición en el aula en su futura labor docente, se les encomendó la identificación de los fenómenos en cada uno de los fragmentos. El tiempo estimado para este segundo debate fue de 10-15 minutos, aunque finalmente fue entre 3’44’’ y 19’41’’. De nuevo, no se interrumpió a ninguno de los grupos, pese a que alguno de ellos sobrepasase el tiempo estimado.

Para todos los debates la investigadora proporcionó una grabadora a cada uno de los grupos, facilitadas por las universidades participantes, y además encargó que fuese grabado el audio por parte de los grupos a través de un dispositivo móvil. Cada uno de los audios ha sido transcrito y se encuentran en el *Anexo A3.3*.

6.1.4. Categorización y dimensiones de las respuestas

A continuación se presentan las categorías asignadas a los comentarios del alumnado a cada uno de los fragmentos y las dimensiones utilizadas para un posterior análisis.

6.1.4.1 Categorización de las respuestas

Siguiendo el instrumento elaborado por Sánchez (2012) en su tesis doctoral, se han establecido para este estudio cuatro categorías para las respuestas dadas por el alumnado: C1, para comentarios considerados genéricos; C2, comentarios en los que se remite a niveles educativos o alumnado concreto; C3, comentarios que indican una dificultad específica, y C3*, comentarios en los que se identifica alguno de los fenómenos caracterizados. Además, para cada una de estas categorías, ha de tenerse en cuenta el fenómeno que se encuentra en cada uno de los fragmentos. La categorización para cada uno de ellos es la siguiente:

Fenómeno c-i.i.: C1C, C2C, C3C y C3*C

Fenómeno d-i.i.: C1D, C2D, C3D y C3*D

Fenómeno i.v.s.i.: C1I, C2I, C3I y C3*I

Además, y aunque no se han caracterizado más fenómenos, algunos estudiantes no han establecido la diferenciación entre más y menos infinito, por lo que han tenido que considerarse nuevas categorías, que denominamos emergentes, que contuviesen a esos comentarios. Las categorías establecidas para éstos son: C1CD, C2CD, C3CD y C3*CD, donde CD indica que se está considerando tanto el *crecimiento intuitivo ilimitado* como el *decrecimiento intuitivo ilimitado* al mismo tiempo.

Al mismo tiempo que se establece una categoría por el tipo de comentario, se codifica el sistema de representación y el formato. Éstos acompañarán a la categoría para un análisis posterior. Esta codificación es la misma que la establecida en el *Capítulo 4* para el análisis de libros de texto. Considerando los sistemas de representación: verbal, V; tabular, T; gráfico, G; y simbólico, S, y los formatos: definición, D, y ejemplo, E. Entre el sistema de representación y el formato se encontrará un guion “-”. En ocasiones, el alumnado considera varios fragmentos de un mismo enfoque sin tener en cuenta el sistema de representación involucrado en ellos. Para esos casos se establece el código “SR”.

6.1.4.2 Dimensiones de las respuestas

Las dimensiones consideradas en las respuestas del alumnado son: utilización, fase en la que ocurre y sistema de representación. Éstas ya fueron las consideradas en el instrumento utilizado por Sánchez (2012) para el análisis de las entrevistas de su estudio.

Uno de los aspectos más importantes en este capítulo es la utilización o no de los estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de diferentes fragmentos presentados en el cuestionario. Por ello, en la carta se especificaba que uno de los focos del debate debía ser la aceptación o rechazo de cada uno de estos fragmentos para su futuro uso en el aula. Así, los indicadores que vamos a tener en cuenta son: utiliza, U, y no utiliza, NU.

Por otra parte, dado que existen dos fases en las que el estudiante participa, espontánea e inducida, y que la información de la que dispone acerca del límite infinito de una sucesión es distinta, se establecerán diferencias entre los comentarios que surjan en ambas fases.

Otro de los aspectos a tener en cuenta en el análisis es la influencia de los diferentes sistemas de representación en los comentarios del alumnado. Además de aparecer acompañando a la categoría para aportar una mayor información, será considerado como dimensión propia a analizar.

6.2. Características de la muestra

La muestra estuvo formada por 28 estudiantes organizados en 8 grupos. Todos ellos pertenecientes al Máster universitario en Formación del profesorado en Ed. Secundaria, Bachillerato, FP e Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) y Universidad de Málaga (UMA). Cabe señalar que uno de los estudiantes tuvo que ser eliminado de la muestra, ya que no realizó ninguna aportación al grupo por sus limitaciones comunicativas en español. A continuación, se presentan los 27 alumnos analizados.

De estos 27 alumnos, 11 de ellos realizaron el Máster de Formación del Profesorado en la UCM y 16 en la UMA.

Los debates grupales tuvieron lugar los días 16 de noviembre de 2018, para los estudiantes de la UCM, y el 27 de noviembre de 2018, en el caso de los estudiantes de la UMA.

Pese a ser estudiantes de Máster en Formación del Profesorado de la especialidad de Matemáticas, 14 de ellos realizaron esta Licenciatura o Grado, mientras que los 13 restantes lo hicieron en Grado en Física (1), Ingeniería Agrónoma (1), Ingeniería de Telecomunicaciones (4), Ingeniería Mecánica (1), Ingeniería de Camino(1), Canales y Puertos (2), Ingeniería Química (1), Ingeniería de Organización Industrial (1), Ingeniería Civil (1) e Ingeniería de Montes (1), lo que supone que el 52% cursó estudios matemáticos, frente al 48% que realizó otros estudios científicos.

A continuación, se muestra la Tabla 6.2, donde se encuentra el código asignado a cada alumno, atendiendo al grupo al que pertenecen, un identificativo individual y un asterisco si tienen formación en Matemáticas, la titulación de acceso al Máster de la Universidad por la que fue expedido dicha titulación, año de finalización de los estudios, Universidad de realización del Máster y si tienen alguna experiencia docente de cualquier tipo.

Tabla 6.2. Muestra tomada para los debates grupales.

Código	Titulación acceso Máster	Universidad	Año titulación	Universidad Máster	Experiencia docente
A.01*	Grado en Matemáticas	UNEX	2015	UCM	No
A.02	Ingeniería Agrónoma	UPM	2016	UCM	Sí
A.03	Ingeniería de Telecomunicaciones	UPM	2018	UCM	Sí
A.04	Grado Física	UNIUPO (Italia)	2006	UCM	No
B.05*	Grado en Matemáticas	ULL	2017	UCM	No
B.06*	Grado en Matemáticas y Estadística	UCM	2018	UCM	Sí
B.07	Ingeniería Mecánica	UCO	2018	UCM	No
B.08	Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos	UPM	2018	UCM	Sí
C.09*	Grado en Matemáticas	UCM	2018	UCM	Sí
C.10*	Grado en Matemáticas	UCM	2017	UCM	Sí
C.11*	Grado en Matemáticas	UCM	2012	UCM	No
D.12	Ingeniería de Telecomunicaciones	UMA	2007	UMA	No
D.13*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
D.14*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
E.15*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
E.16	Ingeniería Química	UMA	2017	UMA	No
E.17	Ingeniería Telecomunicaciones	UMA	2014	UMA	No
F.18	Ingeniería de Organización Industrial	UMA	2016	UMA	No
F.19*	Grado en Matemáticas	ULL	2017	UMA	No
F.20*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
F.21*	Licenciatura Matemáticas	UMA	2012	UMA	Si
G.22*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
G.23*	Grado en Matemáticas	UMA	2018	UMA	No
G.24	Ingeniería Civil	UGR	2018	UMA	No
H.25	Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos	UGR	2010	UMA	No
H.26	Ingeniería Telecomunicaciones	UMA	2018	UMA	No
H.27	Ingeniería de Montes	UCO	2006	UMA	No

6.3. Análisis

En este apartado se presenta el análisis realizado a cada uno de los debates surgidos tras la puesta en marcha del protocolo realizado. Para ello, se han tenido en cuenta diferentes aspectos: tratamiento de la información, que será descrita a partir de informes grupales e individuales, así como de las relaciones existentes entre ambos; el análisis fenomenológico, considerando tanto los perfiles fenomenológicos del futuro profesorado como de cada fragmento; la comparación de estos resultados con los del profesorado en activo; y la comparación con los resultados obtenidos en los libros de texto, tanto para los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo como para el que tiene un enfoque formal.

6.3.1. Informes grupales e individuales

Con la creación de un informe grupal y de sus respectivos informes individuales se pretende extraer la información recabada en cada uno de los debates, y dar comienzo a su análisis. El informe grupal está compuesto por: descripción grupal, unidades de información, interpretación grupal del debate, tablas de distribución grupal, desarrollo e interpretación de los resultados, y síntesis de la información. Mientras, el informe individual está compuesto por: interpretación individual del debate, tablas de distribución individual, desarrollo e interpretación de los resultados, y síntesis de la información. Todos los criterios considerados están descritos a continuación en los siguientes subapartados.

6.3.1.1 Estructura de los informes grupales

Los criterios considerados han sido tomados del estudio de Sánchez (2012), por haberse utilizado el mismo instrumento de análisis que la autora utilizó para el estudio de las respuestas del profesorado en activo a través de una entrevista.

Criterio 1: Se describe la composición del grupo, el lugar y hora de la sesión, su duración, las condiciones ambientales y la dificultad de la transcripción. Además, se indica la codificación del grupo y de cada uno de sus componentes.

Criterio 2: Se detallan las unidades de información de las dos grabaciones realizadas. Cada una de ellas está dividida en: presentación, fase espontánea y fase inducida. A las unidades de información se les otorga un número de forma correlativa y la temporalización en la que tienen lugar. Éstas han sido agrupadas cuando en el debate se dialoga sobre una misma idea o fragmento.

Criterio 3: La interpretación por parte del equipo investigador de cada uno de los comentarios surgidos en el debate, tanto en la fase espontánea como inducida. Con este tercer criterio se realiza la categorización a los comentarios de los estudiantes, el sistema de representación utilizado o su ausencia, y su utilización o no en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente, acompañada de la unidad de información y quién ha realizado dicho comentario o comentarios. En ocasiones, en la categorización no aparece de forma explícita el nombre del fragmento (A, B, C, ...) del que se está hablando; esto se debe a que uno de los componentes del grupo menciona dicho fragmento, pero no participa de ninguna otra forma en el debate, siendo continuado por otro alumno; o bien, se describe el fragmento y no se nombra su notación.

Criterio 4: Se recoge en una tabla la distribución de cada una de las categorías para cada uno de los fenómenos: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. Además, se ha tenido que añadir una nueva clasificación para las personas que establecen de forma conjunta el límite más y menos infinito; a este “fenómeno” lo denominaremos informalmente: intuitivo. Para cada uno de ellos se atenderá a su utilización o no utilización para la fase espontánea y para la fase inducida.

Criterio 5: Se realiza el desarrollo y la interpretación de los resultados recopilados en la tabla de distribución del Criterio 4, considerando los fenómenos caracterizados, los sistemas de representación, la categorización otorgada, los fragmentos y la utilización o no de cada uno de ellos.

En algunos comentarios de la fase inducida, el alumnado no ha verbalizado si considera adecuado o no su uso en el aula de alguno de los fragmentos. En estos casos, se ha considerado que no modifica su uso porque si no lo expresaría de forma explícita, y por tanto se considera el uso o no uso que hubiese verbalizado en la fase espontánea.

Criterio 6: Se presenta la síntesis de la información del alumnado de forma individual y de los grupos que conforman. Para ello se utiliza la componente visual y la componente numérico-vectorial. Estas componentes han sido realizadas siguiendo el estudio de Sánchez (2012), y en el caso de la componente numérico-vectorial, utilizando las modificaciones de Macías et al. (2017) que evitan la casuística de denominador 0.

En la componente visual se muestra si el alumno utiliza o no cada uno de los fenómenos (c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.), incorporando “el fenómeno” intuitivos, cuando no se establece diferenciación entre el límite más y menos infinito; los sistemas de representación (verbal,

V; gráfico, G, tabular, T; y simbólico, S), incluyendo SR cuando el alumno no considera el sistema de representación del fragmento; la categorización establecida (C1, C2, C3 y C3*), y si estos comentarios han sido realizados en la fase espontánea o en la inducida.

Tabla 6.3. Componente visual.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					
		C2I					
		C1I					

Tabla 6.4. Signos utilizados en la componente visual (Sánchez, 2012, p. 319).

Sig.	Descripción
✓	El alumnado afirma la utilización del fragmento y lo hace en la fase espontánea.
☑	El alumnado afirma la utilización del fragmento y lo hace en la fase inducida.
✗	El alumnado afirma la no utilización del fragmento y lo hace en la fase espontánea.
⊗	El alumnado afirma la no utilización del fragmento y lo hace en la fase inducida.
Hueco en blanco cuando no se realiza ningún comentario al fragmento presentado.	
	Las celdas griseadas corresponden a situaciones en las que no se ha entregado al alumnado ningún fragmento que pueda ser comentado.

En la componente numérico-vectorial ha tenido que realizarse un trabajo previo a la utilización directa del instrumento de Macías et al. (2017). En el estudio fenomenológico del límite finito de una función en un punto se caracterizaron dos fenómenos, uno observado desde un enfoque intuitivo (ADI) y otro desde un enfoque formal (IVF). En el caso de este estudio fenomenológico, límite finito de una sucesión, se han observados tres fenómenos, dos desde un enfoque intuitivo (c-i.i. y d-i.i.) y uno desde un enfoque formal (i.v.s.i.). Además, se han contabilizado aquellos comentarios en los que se observaba el enfoque intuitivo, pero no el más y menos infinito, denominados “intuitivos”. En esta tarea previa se han sumado todos los comentarios asociados a los fenómenos de un enfoque intuitivo, y que denominaremos $c-i.i.+d-i.i.+intuitivos$, construyendo así dos únicos vectores, en lugar de los cuatro que correspondería al actual estudio y que dificultarían cálculos posteriores.

Tabla 6.5. Vectores de la componente numérico-vectorial (Macías et al., 2017).

Vectores	Primera componente	Segunda componente
Vector		
c-i.i.	2·“Número de comentarios de uso en la fase espontánea”+ “Número	2·“Número de comentarios de no uso en la fase espontánea”+ “Número de
+d-i.i.	de comentarios de uso la fase	comentarios de no uso en la fase
+intuitivos	inducida”.	inducida”.
Vector		
i.v.s.i.	2·“Número de comentarios de uso en la fase espontánea”+ “Número	2·“Número de comentarios de no uso en la fase espontánea”+ “Número de
	de comentarios de uso la fase	comentarios de no uso en la fase
	inducida”.	inducida”.

Como puede observarse en la tabla anterior, en cada una de las componentes de ambos vectores se le otorga el doble de peso a los comentarios surgidos en la fase espontánea que los manifestados en la fase inducida.

Dado que el número de comentarios es siempre un valor positivo, y esto va a ocurrir en las dos componentes de cada uno de los vectores, éste estará situado en el primer cuadrante del plano.

El informe individual tiene la misma estructura que el grupal, en el que se consideran los criterios del 3 al 6, dado que los dos primeros no aportarían una información adicional.

A continuación, se presenta un ejemplo de informe grupal, A, elegido al azar, y un ejemplo de informe individual, A.03, elegido al azar entre los componentes del grupo A.

6.3.1.2 Ejemplo de informe. Grupo A

En el ejemplo se encuentra una descripción del grupo, las unidades de información, la interpretación del debate, distribuciones de los comentarios, desarrollo e interpretación de estas distribuciones, y la síntesis de la información.

Descripción. Grupo A

El grupo A está formado por 4 personas, todos ellos alumnos del MFP de la Universidad Complutense de Madrid. La sesión se produjo el 16 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 18.00. El primer debate tuvo una duración de 38 minutos y 13 segundos, mientras que el segundo duró 8 minutos y 46 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue cómoda por la claridad en el tono de voz mostrado por todos los componentes y el no solapamiento entre ellos durante el debate.

Unidades de información. Grupo A

Separados en tres fases: presentación, espontánea e inducida, encontramos los intervalos temporales de cada una de las ideas surgidas en el grupo A.

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,40]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo

Fase II: Espontánea

U-2: [00,41-04,57]. Se establece una conversación acerca de la adecuación de un fragmento formal en el sistema de representación simbólico. Todos los integrantes del grupo muestran la existencia de dificultades en el propio lenguaje utilizado y el nivel de abstracción. Además, señalan su adecuación o no para niveles universitarios, pero no para ESO, ni Bachillerato.

U-3: [04,58-08,59]. Se realizan comentarios genéricos acerca de la adecuación de los diferentes fragmentos intuitivo, en diferentes sistemas de representación.

U-4: [09,00-13,25]. El grupo debate acerca del problema que surge para sucesiones con límite menos infinito, donde se tiene siempre que la variable independiente tiende a más infinito. Algunos miembros del grupo argumentan sobre la necesidad de no tener que encontrarse con que n tienda a más infinito porque siempre ocurre, mientras que otros lo consideran necesario por encontrarse con un límite. En esta unidad de información surge el primer “roce” entre miembros del grupo.

U-5: [13,26-16,58]. El grupo realiza comentarios acerca de los fragmentos que tienen un sistema de representación gráfica, donde profundizan en la contracción

U-6: [16,59-19,05]. Algunos de los miembros del grupo no comprenden el fragmento E, que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula. Uno de los miembros del grupo, intentando explicar a sus compañeros este fragmento, describe el fenómeno i.v.s.i.

U-7: [19,06-20,13]. Se retoma la conversación sobre la utilización de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo. Se produce el segundo “roce” entre miembros del grupo.

U-8: [20,14-25,08]. El grupo realiza comentarios sobre los fragmentos que tienen un enfoque formal, mostrando su rechazo para su impartición en el aula.

U-9: [25,09-38,13]. De forma grupal, y posteriormente individual, establecen el orden de cada uno de los fragmentos si éstos tuviesen que encontrarse en una secuencia didáctica en su futura labor docente.

Fase III: Inducida

U-10: [00,00-01,30]. Los miembros del grupo de forma consensuada identifican cada uno de los fenómenos en los fragmentos correspondientes, utilizando únicamente el nombre, pero no la razón que les ha llevado a ello.

U-11: [01,31-08,46]. El grupo identifica cada uno de los fenómenos en la parte correspondiente cada fragmento, especificando además la razón que les ha llevado a esa decisión. En todo momento adoptan el rol de alumno identificando cada uno de los fenómenos, pero no del profesor acerca de su utilización en el aula.

Interpretación. Grupo A

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla 6.6. Fase espontánea. Grupo A.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-2	A0.2: Yo no lo entiendo. Lo sé leer. Porque lo sé leer, no es que diga, hay un símbolo que no entiendo, saberlo leer lo sé leer, pero si me lo pones así solo, tal cual, me cuesta un rato, ¿sabes? Y aun así, me cuesta un rato. El M lo veo confuso, las n no tanto y las a_n no tanto porque sé que forma parte de la terminología de sucesiones, pero el M lo veo bastante confuso.	C3I. s-d (A) La alumna muestra dificultad en que cualquier número que fijemos puede ser superado por un término de la sucesión.	NU
U-2	A.01: Es un lenguaje que a priori no se entienden institutos, universidad se empieza a dar. Yo a mí me ponen esto así en 4º de la ESO e incluso en Bachillerato, tal cual, y no sé leerlo, a no ser que el profesor te explique paso a paso qué narices significa.	C2I. s-d (A) El alumno realiza dos comentarios en el que establece una hipótesis acerca del curso en el que impartiría este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d), para la enseñanza-aprendizaje del límite infinito de una sucesión.	NU
U-2	A.01: El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno... En realidad, es la misma definición en todos. A.02: Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor? A.04: Porque es mucho más sintético. A.02: Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no? A.03: Presentaría muchas dificultades. De comprensión. A.04: Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta. A.02: No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.	C1I. s-d (A) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-2	<p>A.04: Estamos hablando de distintos niveles de educación, pero nosotros lo hacíamos</p> <p>A.03: Es para universidad está claro. Yo creo que esto nivel de Bachillerato orientado o bien universidad.</p> <p>A.01: Yo creo que esta definición tal cual sería una definición complementaria a una explicación previa.</p> <p>Y a un nivel, ya no te digo de Bachillerato, sino quizás universidad, y sobre todo si quieres enseñar, digamos dar la herramienta del lenguaje matemático para expresar ideas, en este caso expresar límites. Hay otras muchas definiciones que yo las veo mucho mejores, más fáciles, mucho más sencillas de comprender y de asimilar tanto para Bachillerato como para la ESO, de manera previa.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos entablan una conversación en la que establecen una hipótesis acerca del curso en el que impartirían este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d)</p>	U
U-3	<p>A.03: Yo éste la verdad me ha gustado, quizás el que más de todos. Para introducir lo que es el concepto de límite infinito.</p> <p>A.04: Sí, yo también.</p> <p>A.03: De cara a la ESO.</p> <p>A.04: Sí, sí, para empezar.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.</p>	U
U-3	<p>A.02: A mí me gusta más con la tabla.</p> <p>A.03: Sería, o bien usar la tabla y luego poner el caso del ejemplo típico de los números o bien al contrario, pero sí, en cuanto a dificultad los dos son los más idóneos para empezar a trabajar el concepto de límite infinito.</p> <p>A.01: Me supone un poco de dificultad el cambio de la sucesión.</p> <p>Por ver la idea de que el número se va haciendo cada vez más grande en lugar de darte un número que lo mismo coincide en centenares, millares, vas viendo que pum, pum, pum.</p> <p>A.03: Lo único que estás haciendo es trabajar con números, o sea, no te molestas en ya identificar lo que es término general de la sucesión.</p>	<p>C1CD. t-e (C y K)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-4	<p>A.03: Te tienes que fijar en lo que es la sucesión porque para empezar tienes el n por un lado que se pueden equivocar, porque el n va tendiendo a más infinito en el caso del C y sin embargo la sucesión tiende a menos infinito, entonces eso ya puede llevar ya un poco...</p> <p>Y sobre todo lo que yo he visto es que a mi incluso me ha llevado un poco... me ha costado un poco entenderlo porque te pone por un lado el n tendiendo a más infinito y luego el a_n que tiende a menos infinito, cuando en realidad tú lo que estás viendo es la sucesión.</p> <p>El límite de la sucesión, el n evidentemente siempre tiende a más infinito. Yo lo que estoy diciendo es, simplemente, que puede llevar a un equívoco poner que n tiende a más infinito, tendría que poner solamente que a_n tiende a más infinito o a menos infinito, porque ya evidentemente se ve por la tabla que n va creciendo, los términos van sucesivos.</p> <p>Es que no estás calculando el límite de n, estás calculando el límite de la sucesión. a mi me ha llevado a equívoco el fragmento C, porque he visto por un lado tiende a más infinito y me he tenido que fijar bien porque digo ¿tiende a más infinito? Si debería tender a menos infinito, y entonces me he dado cuenta que abajo es cuando a_n pone que tiende a menos infinito. Entonces si tú a un chico le pones esta tabla se puede hacer un lío. Sobre todo, que ponga tiende a más infinito y luego tiende a menos infinito.</p>	<p>C3D. t-e (C)</p> <p>El alumno argumenta acerca de las dificultades existentes entre el valor más y menos infinito al que tiende la variable dependiente, mientras que para la variable independiente solo es posible más infinito.</p>	NU
U-4	<p>A.04: Para mí estas dos representaciones me parecen más o menos equivalentes, pero aquí el fragmento K puedes trabajar con n^2, y yo haría más una distinción en el nivel o lo que entienden los alumnos. Tú puedes utilizar estas dos definiciones con alumnos que entienden de forma distinta.</p> <p>Son más o menos equivalentes dependiendo de cómo la persona aprende.</p>	<p>C2C. v-e y t-e (B y K)</p> <p>La alumna especifica la existencia de distintas formas de aprendizaje de los alumnos, señalando la adecuación de los fragmentos al tipo de alumno y su nivel educativo.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-5	<p>A.01: No de los que más me gustan, pero sí me gusta y sí creo que tendría que ir acompañado de una serie de explicaciones como por ejemplo la contracción de la tabla, de que un eje es el n, el subíndice de la sucesión, otro es el término de la sucesión o el orden que ocupa ese término, o sea, yo creo que le faltan cosas que podrían mejorar</p> <p>A.03: Es que una definición yo la usaría como auxiliar, como una especie de introducción, pero de ahí a usar ya directamente esto para definir el límite, o sea, lo usaría como una especie de introducción antes de meterte ya con algo más concreto, como algo auxiliar.</p>	<p>C3CD. g-e (D y J)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad en la contracción existente en los ejes. Ésta se da en dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	U
U-6	<p>A.01: Pero en esencia lo que quiere decir es que existe un término a partir del cual, perdón, un término para el cual tu puedes encontrar un índice tal que el término de la sucesión que le corresponde a ese índice va a superarlo, y a partir de ahí van a superarlo todos, porque va siendo creciente, en el caso de este que es una sucesión que tiende a más infinito, que es positiva. Entonces ese concepto sí es cierto que es bastante lioso.</p> <p>Tú dame el término que quieras que yo te voy a encontrar, perdón el número que quieras, que yo te voy a encontrar un término de mi sucesión que lo supera.</p>	<p>C3*I. g-e (E)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	NU
U-7	<p>A.01: El fragmento B y el fragmento C yo creo que son explicaciones del límite bastante básicas o iniciales.</p> <p>El B o el C, en la ESO se puede explicar, con la tablita o con las sucesiones</p>	<p>C2CD. v-e y t-e (B y C)</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación verbal y tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-7	A.01: Y la introducción tanto en el fragmento A que dijimos que era un lenguaje muy matemático, bastante complejo, o el fragmento E añaden un toque a la definición que es mucho menos intuitivo, que cuesta más comprender, por lo tanto, yo lo situaría en niveles bastante superiores, yo diría incluso Bachillerato.	C2I. SR (A y E) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y gráfico, sin especificar estos sistemas de representación.	U
U-8	A.01: ¿Alguien sabe aquí qué es un cuerpo ordenado? Es que son conceptos, que se dan en álgebra de universidad. Un cuerpo ordenado es una estructura algebraica que tiene una serie de propiedades. A.03: Incluso en 2º de Bachillerato, tú dices esta definición y flipan en colores. Yo creo que ésta es más sencilla solo que te introduce términos que no sabes lo que son; pues claro, tú te estás hablando de algo sencillo, y te dicen de repente sea K un cuerpo ordenado, y ahí ya te quedas como, qué “ $\$ \% \&$ ” es K .	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	NU
U-8	A.03: La F, y la A irían casi a la par, nivel de universidad; más ésta que la A, o sea más el fragmento F que el fragmento A. Sí. Fragmento F lo veo más de universidad. Ya lo puedes trabajar incluso en Bachillerato tecnológico que sea más orientado hacia universidad, pero el F, vamos, no; porque es muy, demasiado complicada.	C2I. SR (A y F) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal, sin especificar estos sistemas de representación.	NU
U-8	A.03: Pero aquí lo explica mejor, porque explica lo del listón, y eso para mí es muy importante porque cuando lo he leído, con esa palabra ya, te sitúas. Para un término por muy grande que sea, siempre va a haber un término de la sucesión para cualquier número que escojas que lo va a superar, es decir, el listón lo rebasa. Porque una forma de introducir los límites infinitos es ver eso, que no hay posibilidad de establecer un tope.	C3*I. v-e (G) El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, aceptando la impartición de este fragmento en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-8	<p>A.02: A mí estas explicaciones no me gustan, éstas, esta redacción, que está muy repetida además porque me parece que luego es confusa con los límites de las funciones; o sea, no me gusta ni la representación gráfica de las sucesiones porque me parece que es confuso con las funciones, que es lo único que representan.</p> <p>Me parece que causa confusión, que puede causar confusión a no ser que ellos tengan clarísimo, clarísimo, clarísimo en todo momento lo que es una sucesión y lo que es una función.</p> <p>Toda esta redacción me parece que sobra y es mazo confusa.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>La alumna realiza diversos comentarios genéricos sobre un fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e) rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>A.01: Y el K es el C en negativo, y no sé vosotros, pero yo para mí estos tres que están emparejados. Primero explicaría el positivo y luego el negativo.</p> <p>A.03: Pero a la par, porque hay gente que explica solamente más infinito, y luego lo mismo con menos infinito, pero yo explicaría a la par.</p>	<p>C1CD. SR (B, C, D, I, J y K)</p> <p>Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de la impartición en el aula de diferentes fragmentos con un enfoque intuitivo, especificando el orden del más infinito y el menos infinito, pero sin señalar su sistema de representación.</p>	U
U-9	<p>A.01: El H, yo he dejado de leerlo directamente, sí, sí, ha habido un momento que ya, he perdido el interés, o sea no, me ha parecido demasiado rebuscado.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>A.04: Tú harías, cómo se dice, el límite que va a menos infinito, el límite que va a más y menos infinito en la sucesión, a más infinito en la sucesión a menos infinito al mismo tiempo...</p> <p>Yo lo dividiría, pero yo creo que depende, creo que depende de la clase, de cómo van.</p>	<p>C2CD. SR (B, C, D, I, J y K)</p> <p>La alumna hipotetiza con el tipo de clase en la que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, especificando además el orden del más infinito y el menos infinito, pero sin señalar su sistema de representación.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-9	A.04: Yo empezaría con el fragmento K y el B, o al revés dependiendo de la clase.	C2C. SR (B y K) La alumna hipotetiza con el tipo de clase en la que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación, pero sin especificarlos.	U
U-9	A.04: Utilizaría el G para explicar el lenguaje matemático, eso sí, también, un nivel más bajo, en Bachiller porque al final es algo que se puede desde mi experiencia personal, ya se puede trabajar a edades más tempranas, pero eso depende del nivel de la clase, del nivel de todo, y al final ya en la universidad el F, J y A y ya está.	C2I. SR (G, F, J y A) La alumna hipotetiza con el nivel educativo en el que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y se encuentran en diferentes sistemas de representación, pero sin señalarlos.	U
U-9	A.01: Después las gráficas, modificando algunas cosas como hemos dicho el tema de la contracción y de utilizar una gráfica donde hay la misma distancia entre 10 y 100 que entre 100 y 1000, pues me parece un poco liso, pero sí creo que una visualización de la definición del límite podría ayudar a la comprensión de los chicos.	C1CD. g-e (D y J) El alumno realiza un comentario genérico aceptando la utilización de estos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación gráfico.	U
U-9	A.01: Este nivel intermedio introduciendo lo que es el listón pues me gustaría para un nivel de Bachillerato el fragmento G, que creo que introduce bastante bien el tema este del listón.	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza con el nivel educativo en el que llevaría a cabo la impartición de un fragmento que tienen un enfoque formal y se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-9	A.01: Después, el A, también para que sirva a la hora explicar el lenguaje matemático o cómo se podría representar eso en lenguaje formal, vale, que no tiene porqué ser la explicación de la definición del límite, sino apoyarse para decir mira esto se puede representar así.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de un fragmento en el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d).	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-9	A.01: Después, a un nivel de universidad, a un ya nivel más avanzado, pues sí, tanto la definición A matemática como la definición del fragmento F, que ya utiliza pues estructuras algebraicas como el cuerpo ordenado, que ya necesitarían pues de la explicación previa de grupos, anillos, cuerpos.	C3I. v-d (F) El alumno señala una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	U
U-9	A.02: Creo que utilizaría previamente el B y el I, que son más simples porque como que solo presentan el concepto y ya está.	C1CD. v-e (B e I) La alumna realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación verbal.	U
U-9	A.02: El C y el K me parece que son los más claros, me parece que la tabla es el mejor formato para ver estas cosas.	C1CD. t-e (C y K) La alumna realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación tabular.	U
U-9	A.02: Si 4º de la ESO es el primer curso que lo da pues sí que lo utilizaría igual más delante de 4º de la ESO porque sí que es más lisa que las otras definiciones, pero vamos, porque tiene más chicha teórica por así decirlo, pero en verdad yo creo que también se entiende.	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza con el nivel educativo para la impartición de un fragmento en el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (v-e).	U
U-9	A.02: Bueno el D y el J simplemente porque no me convence cómo cual es la gran ventaja de representar gráficamente una sucesión; me parece que es liso con respecto a las diferencias entre sucesiones y funciones, y no le veo la ventaja.	C3CD. g-e (D y J) La alumna señala la dificultad existente entre la noción de sucesión y función.	NU
U-9	A.02: Y la F no la usaría porque también la definición que da que es prácticamente, por lo del cuerpo ordenado, sí porque utiliza lo del cuerpo ordenado, que yo es la primera vez en mi vida que lo oigo.	C3I. v-d (F) El alumno señala una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	NU

Tabla 6.7. Fase inducida. Grupo A.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	A.01: La ida y vuelta entre un H , a partir del cual localizas un término, perdón un subíndice, el orden de un término que existe otro subíndice inmediatamente superior a ese, tal que su término en la sucesión es superior a tu H inicial, a ese listón, es decir, dicho de manera general que cualquier elemento que me des te voy a poder encontrar un índice a partir del cual todos los elementos de la sucesión son superiores a ese término o a ese ..., el listón o ese elemento inicial. La ida y vuelta está en el término M , en ese M que para cualquier M se le puede encontrar un índice, tal que, vuelta para atrás, pues existe un término de la sucesión, existe un n mayor que es n_0 , perdón, que el término de la sucesión es superior a ese M .	C3*I. s-d (A) El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	NU
U-11	A.04: La ida, yo lo identifico en que para cada M mayor que 0 y en la vuelta, entonces a_n es mayor que M .	C3*I. s-d (A) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	U
U-11	A.01: Sus términos se hacen tan grandes como se quiera ... bueno ahí, se podría entender casi como ida y vuelta. A.03: No, porque no se especifica el valor del número que tienes que superar. A.01: Pero eso de que sus términos se hacen tan grandes como se quiera. Creo que es crecimiento, en eso estoy de acuerdo, simplemente que los términos se hagan tan grandes como se quiera lo que está diciendo detrás, es que, dame un número que yo te voy a dar uno superior a ese, que es la idea del otro, pero vale, sí.	C3*C. v-e (B) Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno c-i.i. Además, aparece la misma problemática que en el equipo investigador con la expresión “tan grandes como se quiera”, en la que se llegó al consenso de identificarlo como un enfoque intuitivo.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	A.01: Conforme el n va tendiendo a infinito se va haciendo más grande por el término de la sucesión va a tender a menos infinito.	C3*D. t-e (C) El alumno identifica el fenómeno d-i.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	U
U-11	A.01: La propia gráfica te va diciendo que el término va creciendo cada vez más, conforme el n , el <i>Eje X</i> va tendiendo a infinito, números cada vez más grandes.	C3*C. g-e (D) El alumno identifica el fenómeno c-i.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	U
U-11	A.01: Cogemos un H , en este caso creo que aquí es el 9 en la gráfica, del 9 te vas al término n -ésimo, en ese caso el tercer término, avanzamos al siguiente que es el cuarto, y efectivamente sus términos sucesivos que es 16... A.03: La fecha de vuelta apunta al 16. A.01: Y hemos vuelto, así que, en la propia gráfica, y ya en la definición del cuadrado de lo que es. A.03: Se apoya con la gráfica.	C3*I. g-e (E) Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	NU
U-11	A.03: La ida sería si fijamos un valor muy alto, y pone un ejemplo; entonces esa sería la ida, y entonces la vuelta sería para cualquier valor de n mayor que tal, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado.	C3*I. v-d (F) El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	A.01: Partiendo del dado $H = 9$, existe un número natural $v = 3$, tal que, a partir de ahí ya sería la vuelta. A partir de ahí cogemos el v . A.03: Con $n = 4$. A.01: Cogemos un índice superior que dé inmediatamente sería el 4, y la vuelta sería justamente eso: el $a_n = 16$, que es superior al listón, ese 9 que hemos dicho.	C3*I. t-e (H) Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	NU
U-11	A.01: Se van haciendo los términos negativos tan grande como se quiera. Va tendiendo a infinito conforme los términos de la sucesión, a menos infinito, perdón, conforme los términos de la sucesión van haciéndose cada vez más grandes	C3*D. v-e (I) El alumno identifica el fenómeno d-i.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	U
U-11	A.03: Los valores de la tabla son cada vez mayores.	C3*C. t-e (K) El alumno identifica el fenómeno c-i.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.	U

Tablas de distribución. Grupo A

A continuación, se muestran las distribuciones de los comentarios para los fragmentos en los que se identifican los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., y la denominación “fenómeno” intuitivos cuando el alumnado no establece diferencia entre el más y el menos infinito en el enfoque intuitivo.

En la columna y fila de subtotales de cada una de las distribuciones se suman los comentarios de cada categoría o fase atendiendo al siguiente orden: (C1, C2, C3, C3*).

Tabla 6.8. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1,2		3*		(1, 1, 0, 1)
Tabular	2		3*		(0, 1, 0, 1)
Gráfico			3*		(0, 0, 0, 1)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(1, 3, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 3)	(0, 0, 0, 0)	(1, 3, 0, 3)

Tabla 6.9. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal			3*		(0, 0, 0, 1)
Tabular		3	3*		(0, 0, 1, 1)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 2)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 2)

Tabla 6.10. Distribución de los comentarios. Grupo A. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 1				(1, 1, 0, 0)
Tabular	1, 2, 1				(2, 1, 0, 0)
Gráfico	3, 1	3			(1, 0, 2, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1, 2				(1, 1, 0, 0)
Subtotales	(5, 3, 1, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(5, 3, 2, 0)

Tabla 6.11. Distribución de los comentarios. Grupo A. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3*, 2, 3, 2	3, 3		3*	(0, 2, 3, 2)
Tabular		1, 1		3*	(2, 0, 0, 1)
Gráfico		3*		3*	(0, 0, 0, 2)
Simbólico	2, 1	3, 2, 1	3*	3*	(2, 2, 1, 2)
No indica	2, 2	2			(0, 3, 0, 0)
Subtotales	(1, 5, 1, 1)	(3, 2, 3, 1)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 4)	(4, 7, 4, 7)

Desarrollo e interpretación. Grupo A

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (22), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (7), d-i.i. (3) e intuitivos (10).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.
 - El alumnado rechaza el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal, y cuando los acepten lo hacen para un tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Se producen de forma casi testimonial para c-i.i. (1) y ninguno para d-i.i., es la categoría predominante para el “fenómeno” intuitivos (5) y en mayor frecuencia, aunque no predominante, para i.v.s.i. (4).
 - C2: Es la categoría predominante para c-i.i. (3), no se encuentra para d-i.i., con una representación significativa para intuitivos (3) y predominante para i.v.s.i. (7).
 - C3: No hay ningún comentario para c-i.i., solo uno para d-i.i. y dos para intuitivos, mientras que existe una frecuencia mayor para i.v.s.i. (4).
 - C3*: Se encuentra para cada uno de los fenómenos intuitivos, c-i.i. (3) y d-i.i. (2), y es la categoría predominante para el fenómeno i.v.s.i. (7), de forma que es casi es doble para un enfoque formal, que para un enfoque intuitivo.
- Sistema de representación.
 - V: Este sistema de representación recoge el mayor número de comentarios para los fenómenos c-i.i. (3), d-i.i. (1) e i.v.s.i. (7).
 - T: Se realizan comentarios para todos los enfoques, sin apreciar diferencia significativa entre todos ellos.
 - G: No se identifican comentarios para el fenómeno d-i.i.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (7) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información. Grupo A

En la síntesis de la información se establecen dos componentes: la visual y la numérico-vectorial.

Componente visual

Tabla 6.12. Componente visual. Grupo A.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	Sin SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		
		C3C					
		C2C	✓		✓		✓
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		
		C3D			×		
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD		✓×			
		C2CD	✓		✓		✓
		C1CD	✓	✓	✓✓		✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓ <input checked="" type="checkbox"/> ⊗	×⊗	⊗	⊗	
		C3I	✓××			×	
		C2I	✓✓			✓×	✓✓×
		C1I			××	✓×	

Componente numérico-vectorial

Tabla 6.13. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo A.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	3	0

Tabla 6.14. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo A.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	2	0

Tabla 6.15. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo A.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
9	1	0	0

Tabla 6.16. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo A.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
13	2	5	0

Tabla 6.17. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo A.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
8	9	1	4

Considerando las indicaciones de la Tabla 6.5 para la obtención de la componente numérico-vectorial tenemos:

$$v = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot uso\ esp + uso\ ind, 2 \cdot no\ uso\ esp + no\ uso\ ind)$$

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 13 + 5, 2 \cdot 2 + 0) = (31, 4)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 8 + 1, 2 \cdot 9 + 4) = (17, 22)$$

6.3.1.3 Ejemplo de informe. Estudiante A.03.

En el ejemplo se encuentra una interpretación del debate de forma individual, distribuciones de los comentarios de cada estudiante, desarrollo e interpretación de estas distribuciones, y la síntesis de la información.

Interpretación individual. Estudiante A.03

Como ya sucediese en la interpretación grupal, en la interpretación individual se consideran dos fases: espontánea e inducida.

Tabla 6.18. Fase espontánea. Estudiante A.03.

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U/NU
U-2	A.01:	El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno... En realidad, es la misma definición en todos.	C1I. s-d (A)	Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU
	A.02:	Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor?			
	A.04:	Porque es mucho más sintético.			
	A.02:	Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no?			
	A.03:	Presentaría muchas dificultades. De comprensión.			
	A.04:	Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta.			
	A.02:	No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.			

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-2	<p>A.04: Estamos hablando de distintos niveles de educación, pero nosotros lo hacíamos.</p> <p>A.03: Es para universidad está claro. Yo creo que este nivel de Bachillerato orientado o bien universidad.</p> <p>A.01: Yo creo que esta definición tal cual sería una definición complementaria a una explicación previa.</p> <p>Y a un nivel, ya no te digo de Bachillerato, sino quizás universidad, y sobre todo si quieres enseñar, digamos dar la herramienta del lenguaje matemático para expresar ideas, en este caso expresar límites. Hay otras muchas definiciones que yo las veo mucho mejores, más fáciles, mucho más sencillas de comprender y de asimilar tanto para Bachillerato como para la ESO, de manera previa.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos entablan una conversación en la que establecen una hipótesis acerca del curso en el que impartirían este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d).</p>	U
U-3	<p>A.03: Yo éste la verdad me ha gustado, quizás el que más de todos. Para introducir lo que es el concepto de límite infinito.</p> <p>A.04: Sí, yo también.</p> <p>A.03: De cara a la ESO.</p> <p>A.04: Sí, sí, para empezar.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-3	<p>A.02: A mí me gusta más con la tabla.</p> <p>A.03: Sería, o bien usar la tabla y luego poner el caso del ejemplo típico de los números, o bien al contrario, pero sí, en cuanto a dificultad los dos son los más idóneos para empezar a trabajar el concepto de límite infinito.</p> <p>A.01: Me supone un poco de dificultad el cambio de la sucesión. por ver la idea de que el número se va haciendo cada vez más grande en lugar de darte un número que lo mismo coincide en centenas, millares, vas viendo que pum, pum, pum.</p> <p>A.03: Lo único que estás haciendo es trabajar con números, o sea, no te molestas en ya identificar lo que es término general de la sucesión.</p>	<p>CICD. t-e (C y K)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-4	<p>A.03: Te tienes que fijar en lo que es la sucesión porque para empezar tienes el n por un lado que se pueden equivocar, porque el n va tendiendo a más infinito en el caso del C y sin embargo la sucesión tiende a menos infinito, entonces eso ya puede llevar ya un poco...</p> <p>Y sobre todo lo que yo he visto es que a mi incluso me ha llevado un poco... me ha costado un poco entenderlo porque te pone por un lado el n tendiendo a más infinito y luego el a_n que tiende a menos infinito, cuando en realidad tú lo que estás viendo es la sucesión.</p> <p>El límite de la sucesión, el n evidentemente siempre tiende a más infinito. Yo lo que estoy diciendo es, simplemente, que puede llevar a un equívoco poner que n tiende a más infinito, tendría que poner solamente que a_n tiende a más infinito o a menos infinito, porque ya evidentemente se ve por la tabla que n va creciendo, los términos van sucesivos.</p> <p>Es que no estás calculando el límite de n, estás calculando el límite de la sucesión.</p> <p>A mi me ha llevado a equívoco el fragmento C, porque he visto por un lado tiende a más infinito y me he tenido que fijar bien porque digo ¿tiende a más infinito? Si debería tender a menos infinito, y entonces me he dado cuenta que abajo es cuando a_n pone que tiende a menos infinito. Entonces si tú a un chico le pones esta tabla se puede hacer un lío. Sobre todo que ponga tiende a más infinito y luego tiende a menos infinito.</p>	<p>C3D. t-e (C)</p> <p>El alumno argumenta acerca de las dificultades existentes entre el valor más y menos infinito al que tiende la variable dependiente, mientras que para la variable independiente solo es posible más infinito.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-5	<p>A.01: No de los que más me gustan, pero sí me gusta y sí creo que tendría que ir acompañado de una serie de explicaciones como por ejemplo la contracción de la tabla, de que un eje es el n, el subíndice de la sucesión, otro es el término de la sucesión o el orden que ocupa ese término, o sea, yo creo que le faltan cosas que podrían mejorar.</p> <p>A.03: Es que una definición yo la usaría como auxiliar, como una especie de introducción, pero de ahí a usar ya directamente esto para definir el límite, o sea, lo usaría como una especie de introducción antes de meterte ya con algo más concreto, como algo auxiliar.</p>	<p>C3CD. g-e (D y J)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad en la contracción existente en los ejes. Ésta se da en dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	U
U-8	<p>A.01: ¿Alguien sabe aquí qué es un cuerpo ordenado?</p> <p>Es que son conceptos, que se dan en álgebra de universidad. Un cuerpo ordenado es una estructura algebraica que tiene una serie de propiedades.</p> <p>A.03: Incluso en 2º de Bachillerato, tú dices esta definición y flipan en colores.</p> <p>Yo creo que ésta es más sencilla solo que te introduce términos que no sabes lo que son; pues claro, tú te estás hablando de algo sencillo, y te dicen de repente sea K un cuerpo ordenado, y ahí ya te quedas como, qué “\$%&” es K.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.</p>	NU
U-8	<p>A.03: La F, y la A irían casi a la par, nivel de universidad; más ésta que la A, o sea más el fragmento F que el fragmento A.</p> <p>Sí. Fragmento F lo veo más de universidad.</p> <p>Ya lo puedes trabajar incluso en Bachillerato tecnológico que sea más orientado hacia universidad, pero el F, vamos, no; porque es muy, demasiado complicada.</p>	<p>C2I. SR (A y F)</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal, sin especificar estos sistemas de representación.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-8	A.03: Pero aquí lo explica mejor, porque explica lo del listón, y eso para mí es muy importante porque cuando lo he leído, con esa palabra ya, te sitúas. Para un término por muy grande que sea, siempre va a haber un término de la sucesión para cualquier número que escojas que lo va a superar, es decir, el listón lo rebasa. Porque una forma de introducir los límites infinitos es ver eso, que no hay posibilidad de establecer un tope.	C3*I. v-e (G) El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, aceptando la impartición de este fragmento en el aula.	U
U-9	A.01: Y el K es el C en negativo, y no sé vosotros, pero yo para mí estos tres que están emparejados. Primero explicaría el positivo y luego el negativo. A.03: Pero a la par, porque hay gente que explica solamente más infinito, y luego lo mismo con menos infinito, pero yo explicaría a la par.	C1CD. SR (B, C, D, I, J y K) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de la impartición en el aula de diferentes fragmentos con un enfoque intuitivo, especificando el orden del más infinito y el menos infinito, pero sin señalar su sistema de representación.	U

Tabla 6.19. Fase inducida. Estudiante A.03.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	A.01: Sus términos se hacen tan grandes como se quiera ... bueno ahí, se podría entender casi como ida y vuelta. A.03: No, porque no se especifica el valor del número que tienes que superar. A.01: Pero eso de que sus términos se hacen tan grandes como se quiera. Creo que es crecimiento, en eso estoy de acuerdo, simplemente que los términos se hagan tan grandes como se quiera lo que está diciendo detrás, es que, dame un número que yo te voy a dar uno superior a ese, que es la idea del otro, pero vale, sí.	C3*C. v-e (B) Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno c-i.i. Además, aparece la misma problemática que en el equipo investigador con la expresión “tan grandes como se quiera”, en la que se llegó al consenso de identificarlo como un enfoque intuitivo.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	<p>A.01: Cogemos un H, en este caso creo que aquí es el 9 en la gráfica, del 9 te vas al término n-ésimo, en ese caso el tercer término, avanzamos al siguiente que es el cuarto, y efectivamente sus términos sucesivos que es 16...</p> <p>A.03: La fecha de vuelta apunta al 16.</p> <p>A.01: Y hemos vuelto, así que en la propia gráfica, y ya en la definición del cuadrado de lo que es.</p> <p>A.03: Se apoya con la gráfica.</p>	<p>C3*I. g-e (E)</p> <p>Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.</p>	NU
U-11	<p>A.03: La ida sería si fijamos un valor muy alto, y pone un ejemplo; entonces esa sería la ida, y entonces la vuelta sería para cualquier valor de n mayor que tal, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado.</p>	<p>C3*I. v-d (F)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.</p>	NU
U-11	<p>A.01: Partiendo del dado $H = 9$, existe un número natural $v = 3$, tal que, a partir de ahí ya sería la vuelta. A partir de ahí cogemos el v.</p> <p>A.03: Con $n = 4$.</p> <p>A.01: Cogemos un índice superior que dé inmediatamente sería el 4, y la vuelta sería justamente eso: el $a_n = 16$, que es superior al listón, ese 9 que hemos dicho.</p>	<p>C3*I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.</p>	NU
U-11	<p>A.03: Los valores de la tabla son cada vez mayores.</p>	<p>C3*C. t-e (K)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno c-i.i., sin especificar ningún cambio en su utilización respecto a la fase espontánea.</p>	U

Tablas de distribución individual. Estudiante A.03.

En las tablas siguientes encontramos las distribuciones de los comentarios para cada uno de los fenómenos: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. y para el “fenómeno” intuitivos.

Tabla 6.20. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1		3*		(1, 0, 0, 1)
Tabular			3*		(0, 0, 0, 1)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 2)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 2)

Tabla 6.21. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular		3			(0, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)

Tabla 6.22. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	3				(0, 0, 1, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 1, 0)

Tabla 6.23. Distribución de los comentarios. Estudiante A.03. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3*	3		3*	(0, 0, 1, 2)
Tabular				3*	(0, 0, 0, 1)
Gráfico				3*	(0, 0, 0, 1)
Simbólico	2	1			(1, 1, 0, 0)
No indica		2			(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 1)	(1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 3)	(1, 2, 1, 4)

Desarrollo e interpretación individual. Estudiante A.03

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (10), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (3), d-i.i. (1) e intuitivos (3).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de c-i.i., pero rechaza d-i.i. por dificultades específicas.
 - El alumno rechaza el uso de i.v.s.i., y cuando los acepta es para un tipo de alumnado o identificando el propio fenómeno.
- Categorías
 - C1: El alumno realiza un único comentario para c-i.i., ninguno para d-i.i. y uno para i.v.s.i.
 - C2: Solamente realiza comentarios en el que especifica el tipo de alumnado o nivel para el fenómeno i.v.s.i.
 - C3: Realiza un único comentario para d-i.i., intuitivos e i.v.s.i., mientras que no se detectan dificultades específicas para c-i.i.
 - C3*: Identifica el doble de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (4) que para c-i.i. (2).
- Sistema de representación.
 - V: Sólo se producen comentarios para este sistema de representación para c-i.i. (2) y d-i.i. (3).
 - T: Se producen el triple de comentarios para un enfoque intuitivo (3) que para un enfoque formal (1).
 - G: Sólo se producen comentarios para intuitivos (1).

- S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información individual. Estudiante A.03

En la síntesis individual de la información, como se ya sucediese en la grupal, se establecen dos componentes: la visual y la numérico-vectorial.

Componente visual

Tabla 6.24. Componente visual del estudiante A.03.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	Sin SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C	☑		☑		
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D			×		
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD		✓			
		C2CD					
		C1CD			✓		✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓(⊗)	(⊗)	(⊗)		
		C3I	×				
		C2I				✓	×
		C1I				×	

Componente numérico-vectorial

Tabla 6.25. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	2	0

Tabla 6.26. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla 6.27. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla 6.28. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	1	2	0

Tabla 6.29. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	3	0	3

Considerando las indicaciones de la Tabla 6.5 para la obtención de la componente numérico-vectorial tenemos:

$$v = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot uso\ esp + uso\ ind, 2 \cdot no\ uso\ esp + no\ uso\ ind)$$

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 4 + 2, 2 \cdot 1 + 0) = (10, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 3 + 3) = (4, 9)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

6.3.1.4 Relaciones existentes entre un grupo y sus individuos

Observando la estructura descrita y los ejemplos presentados puede observarse lo siguiente:

- La estructura de los informes grupales e individuales es idéntica, a excepción de los dos primeros criterios, que solo han sido tomados en cuenta para el informe grupal para no presentar información repetida.
- Las dimensiones asignadas en la interpretación de los grupos y las individuales constan de los mismos criterios: utilización, fase y sistema de representación.

- Las categorías establecidas en ambos casos son las mismas, C1, C2, C3 y C3* para cada uno de los fenómenos caracterizados.
- La interpretación de los comentarios de cada uno de los estudiantes está contenida en la interpretación de los comentarios del grupo al que pertenecen.

Además, ha de tenerse en cuenta que algunas de las categorías establecidas en la interpretación grupal pueden pertenecer a uno o más estudiantes, tantos como participen en ella. Esta consideración resultará relevante en la comparación del perfil fenomenológico del grupo y el perfil fenomenológico del profesorado en formación.

6.3.2. Análisis fenomenológico de los debates

En este apartado encontramos los perfiles fenomenológicos del profesorado en formación obtenido a partir del análisis de los debates y la posterior elaboración de su informe, y el análisis de cada uno de los fragmentos que formaron parte del cuestionario, observando su aceptación o rechazo por parte de los estudiantes.

6.3.2.1 Perfiles fenomenológicos del futuro profesorado

En este apartado utilizaremos la componente numérico-vectorial de cada uno de los grupos y los estudiantes que participaron en los debates. Para ello tomamos los dos vectores, los correspondientes al enfoque intuitivo y al enfoque formal, y sus dos respectivas componentes, relativas a la aceptación o rechazo de los fragmentos de cada uno de los enfoques.

Para establecer el perfil fenomenológico se ha tenido en cuenta los estudios de Sánchez (2012) y la modificación correspondiente de Macías et al. (2017). Este vendrá determinado por un vector de tres componentes.

La primera componente podrá tomar los siguientes valores: N+, N- y 0.

- N+ se obtendrá cuando el argumento del vector asociado a los fenómenos intuitivos sea menor o igual que 45° , es decir, $\text{Arg } v_{\text{Enf.Intuit.}} \leq 45^\circ$. Se acepta el uso de los fenómenos intuitivos.
- N- se obtendrá cuando el argumento del vector asociado a los fenómenos intuitivos sea mayor estricto que 45° , es decir, $\text{Arg } v_{\text{Enf.Intuit.}} > 45^\circ$. Se rechaza el uso de los fenómenos intuitivos.
- Otorgaremos el valor 0 cuando durante el discurso de los estudiantes o del grupo no se obtenga ninguna categoría de los fenómenos intuitivos. Este valor

no había sido considerado en los estudios anteriores por el formato entrevista que tuvo lugar.

La segunda componente podrá tomar los siguientes valores: D+, D- y 0.

- D+ se obtendrá cuando el argumento del vector asociado al fenómeno formal sea menor o igual que 45° , es decir, $Arg v_{Enf.Form.} \leq 45^\circ$. Se acepta el uso del fenómeno formal.
- D- se obtendrá cuando el argumento del vector asociado al fenómeno formal sea mayor estricto que 45° , es decir, $Arg v_{Enf.Form.} > 45^\circ$. Se rechaza el uso del fenómeno formal.
- Otorgaremos el valor 0 cuando durante el discurso de los estudiantes o del grupo no se obtenga ninguna categoría del fenómeno formal. Este valor no había sido considerado en los estudios anteriores por el formato entrevista que tuvo lugar.

La tercera componente podrá tomar los siguientes valores: M y m.

- La M se obtendrá, en el denominado tipo A, donde el módulo de la diferencia de los comentarios de uso y no uso de los fenómenos intuitivos sea mayor que el módulo de la diferencia de los comentarios de uso y no uso del fenómeno formal, es decir:

$$|Enf.Int.util - Enf.Int.no util| > |Enf.Form.util - Enf.Form.no util|$$

En este caso prevalecen los fenómenos intuitivos frente al formal.

- La m se obtendrá, en el denominado tipo B, donde el módulo de la diferencia de los comentarios de uso y no uso de los fenómenos intuitivos sea menor o igual que el módulo de la diferencia de los comentarios de uso y no uso del fenómeno formal, es decir:

$$|Enf.Int.util - Enf.Int.no util| \leq |Enf.Form.util - Enf.Form.no util|$$

En este caso prevalece el fenómeno formal frente a los intuitivos.

En esta ocasión no se contempla el caso 0, ya que esto implicaría que no se hubiesen producido comentarios ni para el enfoque intuitivo, ni para el enfoque formal. Los estudiantes participantes en los debates que no hayan realizado comentarios que posteriormente hayan sido categorizados quedaron excluidos de la muestra, como quedó explicado en el apartado 6.2.

Tabla 6.30. Perfiles fenomenológicos posibles de Tipo A.

	N+	N-	0
D+	(N+, D+, M)	(N-, D+, M)	(0, D+, M)
D-	(N+, D-, M)	(N-, D-, M)	(0, D-, M)
0	(N+, 0, M)	(N-, 0, M)	No considerado

Tabla 6.31. Perfiles fenomenológicos posibles de Tipo B.

	N+	N-	0
D+	(N+, D+, m)	(N-, D+, m)	(0, D+, m)
D-	(N+, D-, m)	(N-, D-, m)	(0, D-, m)
0	(N+, 0, m)	(N-, 0, m)	No considerado

En consecuencia, existen 16 tipos de perfiles diferentes, de los que los (N-, D+, M) y (N-, D+, m) son considerados como poco probables, tanto para los perfiles grupales como individuales. Esta razón viene motivada porque habitualmente el alumnado y el profesorado que considera adecuado el uso de fragmentos formales no rechaza los fragmentos intuitivos para su impartición en el aula.

También se ha considerado poco probable que alguna de sus componentes sea 0 en el perfil grupal.

A continuación, se presentan los perfiles fenomenológicos de cada uno de los grupos, Tabla 6.32, junto con el porcentaje que representa cada uno respecto del total, $N = 8$; primero considerando el tipo, M o m, y posteriormente la suma de ambos.

Tabla 6.32. Perfiles fenomenológicos de cada grupo.

Perfil	Grupo	Porcentaje (grupos) con Tipo	Porcentaje (grupos) Sin tipo
(N+, D+, M)	G	22,22 %	22,22 %
	H		
(N+, D+, m)	Sin ejemplo	0	
(N+, D-, M)	A	44,45 %	77,78 %
	B		
	E		
	F		
(N+, D-, m)	C	33,33 %	
	D		
	F		
(N-, D-, M)	Sin ejemplo	0	0
(N-, D-, m)	Sin ejemplo	0	
(N-, D+, M)	Sin ejemplo	0	0
(N-, D+, m)	Sin ejemplo	0	
(0, D+, M)	Sin ejemplo	0	0
(0, D+, m)	Sin ejemplo	0	
(0, D-, M)	Sin ejemplo	0	0
(0, D-, m)	Sin ejemplo	0	
(N+, 0, M)	Sin ejemplo	0	0
(N+, 0, m)	Sin ejemplo	0	
(N-, 0, M)	Sin ejemplo	0	0
(N-, 0, m)	Sin ejemplo	0	

De la misma forma se presentan los perfiles fenomenológicos del alumnado individualmente, Tabla 6.33, junto con el porcentaje que representa cada uno respecto del total, $N = 27$; primero considerando el tipo, M o m, y posteriormente la suma de ambos.

Tabla 6.33. Perfiles fenomenológicos de cada estudiante.

Perfil	Estudiante	Porcentaje (estudiante) con Tipo	Porcentaje (estudiante) Sin tipo
(N+, D+, M)	A.04	14,81 %	14,81 %
	B.05*		
	G.23*		
	G.24		
(N+, D+, m)	Sin ejemplo	0	
(N+, D-, M)	A.01*	40,74 %	66,67 %
	A.03		
	B.06*		
	B.07		
	C.09*		
	D.12		
	E.15*		
	E.17		
	F.20*		
	H.25		
N+, D-, m)	H.26	25,93 %	
	A.02		
	C.10*		
	E.16		
	F.18		
	F.19*		
	F.21*		
(N-, D-, M)	H.27	0	
	Sin ejemplo		
(N-, D-, m)	C.11*	11,11 %	11,11 %
	D.13		
	D.14		
(N-, D+, M)	Sin ejemplo	0	0
(N-, D+, m)	Sin ejemplo	0	
(0, D+, M)	Sin ejemplo	0	
(0, D+, m)	B.08	7,41 %	7,41 %
	G.22*		
(0, D-, M)	Sin ejemplo	0	0
(0, D-, m)	Sin ejemplo	0	
(N+, 0, M)	Sin ejemplo	0	0
(N+, 0, m)	Sin ejemplo	0	
(N-, 0, M)	Sin ejemplo	0	0
(N-, 0, m)	Sin ejemplo	0	

Nota: Los códigos identificativos del alumnado están acompañados por un asterisco si éstos tienen formación en Matemáticas.

Después de la presentación de los perfiles fenomenológicos grupales e individuales quiere destacarse que:

- El perfil de los grupos A, B, C, E, F y G es el mismo que el perfil individual de al menos uno de sus miembros titulados en Matemáticas. En el resto de los grupos, D y H, donde no hay coincidencia de perfil grupal e individual no hay ningún estudiante de esta titulación.
- En el grupo D, donde los estudios de acceso de todos sus miembros al Máster fueron distintas Ingenierías, el perfil del grupo no coincide con el de ninguno de sus miembros. Si obviamos el tipo, tendríamos la coincidencia de uno de sus componentes.
- En el grupo H, donde los estudios de acceso de todos sus miembros al Máster fueron distintas Ingenierías, parece mostrarse una incoherencia. El grupo acepta la utilización del fenómeno formal, D+, mientras que todos sus miembros la rechazan, D-. Esto ha sido debido a que algunos comentarios de rechazo correspondientes a una misma categoría estaban compuestos por varias personas; en el análisis grupal estos comentarios eran contabilizados una vez, mientras que en el análisis individual era contabilizado para cada uno de los estudiantes.

6.3.2.2 *Análisis de cada fragmento.*

En este apartado se recogen los comentarios que han sido categorizados como C1, C2, C3 o C3* para cada uno de los fragmentos. En ocasiones, algún comentario contenía referencias a varios sistemas de representación de forma explícita, por lo que éstos se han considerado para todos los fragmentos que hiciese mención. En otras, los comentarios reflejaban el uso de un determinado enfoque o idea, pero no se explicitaba el sistema de representación, por ese motivo aparece como fragmento “SR”, atendiendo a un fenómeno, pero no a un fragmento concreto del cuestionario. En cada uno de los fragmentos se identificaba uno de los tres fenómenos caracterizados, tal y como se muestra en las siguientes tablas:

Tabla 6.34. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno c-i.i. por fragmento y dimensiones.

Fragm.	Código del fenómeno	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal	%
B	c-i.i. (v-e)	17	2	0	0	19	34,55
D	c-i.i. (t-e)	6	1	5	0	11	21,82
K	c-i.i. (g-e)	14	1	0	0	15	27,27
SR	c-i.i.	8	1	0	0	9	16,36
Subtotal		45	4	5	0	55	
%		81,82	9,09	9,09	0		

Como podemos observar, buena parte de los comentarios de los fragmentos se han realizado en la fase espontánea, 90.91% (81.82% uso y 9.09% no uso). Además, el profesorado en formación acepta su uso para su futura práctica docente en un 90.91% (81.82% fase espontánea y 9.09% fase inducida).

Tabla 6.35. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno d-i.i. por fragmento y dimensiones.

Fragm.	Código del fenómeno	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal	%
C	d-i.i. (g-e)	10	2	2	0	14	38,89
I	d-i.i. (v-e)	4	1	2	0	7	19,44
J	d-i.i. (t-e)	6	0	1	1	8	22,22
SR	d-i.i.	6	1	0	0	7	19,44
Subtotal		26	4	5	1	36	
%		72,22	11,11	13,89	2,78		

El número de comentarios asociados al fenómeno d-i.i. es inferior a su correspondiente para el límite más infinito, c-i.i. De nuevo, buena parte de los comentarios suceden en la fase espontánea, 86.11% (72.22% uso y 13.89% no uso), aunque ligeramente inferior al caso anterior. El profesorado en formación también acepta su uso para su futura práctica docente en un gran número de los comentarios, 83.33% (72.22% fase espontánea y 11.11% fase inducida).

Tabla 6.36. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno i.v.s.i. por fragmento y dimensiones.

Fragm.	Código del fenómeno	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal	%
A	i.v.s.i. (s-d)	14	2	9	5	30	24,79
E	i.v.s.i. (g-e)	2	0	6	5	13	10,74
F	i.v.s.i. (v-d)	2	1	15	7	25	20,66
G	i.v.s.i. (v-e)	11	3	4	1	19	15,70
H	i.v.s.i. (t-e)	2	1	9	3	15	12,40
Sin SR	i.v.s.i.	4	2	13	0	19	15,70
Subtotal		35	9	56	21	121	
%		28,93	7,44	46,28	17,36		

Como ya sucediese en los fenómenos de enfoque intuitivo, de nuevo el mayor número de comentarios se produce en la fase espontánea, 75.21% (28.93% uso y 46.28% no uso). Sin embargo, en este caso, el profesorado en formación rechaza su uso con un 63.64% (46.28% fase espontánea y 17.36% fase inducida). Es importante destacar que el alumnado del MFP no rechaza de la misma forma todos los fragmentos, de hecho, acepta el uso de los fragmentos A, en un 53.33% de sus comentarios $\left(\frac{14+2}{30} \cdot 100\right)$, y G, en un 73.68% de los mismos $\left(\frac{11+3}{19} \cdot 100\right)$. El resto son rechazados con los siguientes porcentajes: E, 84.62%; F, 88%; y H, 80% $\left(\frac{6+5}{13} \cdot 100, \frac{15+7}{25} \cdot 100\right)$ y $\frac{9+3}{15} \cdot 100$ respectivamente).

Llamativo es el caso del fragmento F, el cual fue considerado por los expertos matemáticos como el más correcto matemáticamente, y utilizado en este estudio para la caracterización de los fenómenos organizados por una definición de límite infinito. En el caso del profesorado en formación es el que más comentarios, en porcentaje, tiene de su no uso en el aula en su futura práctica docente.

Los otros dos fragmentos que han sido rechazados, con un alto porcentaje, por el alumnado han sido los dos fragmentos creados para este estudio, y que por tanto las alumnas y los alumnos observaban por primera vez.

6.3.2.3 *Análisis de cada categoría.*

A continuación, se muestran las distribuciones para cada una de las categorías y dimensiones, uso y fase. Ha de señalarse que el número total de comentarios no coincide con las tablas anteriores en las que se encontraban las frecuencias absolutas de cada fragmento. Esto es debido a que las categorías emergentes C1CD, C2CD, C3CD y C3*CD han tenido que contabilizarse dos veces, una para el fenómeno con límite más infinito y otra el límite menos infinito.

Tabla 6.37. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno c-i.i. por categorías y dimensiones.

Categorías	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal categoría
C1C	17	0	2	0	19
C2C	4	0	0	0	4
C3C	2	0	2	0	4
C3*C	1	3	0	0	4
Subtotal fase	24	3	4	0	31

Los comentarios acerca del fenómeno c-i.i. están distribuidos de forma muy irregular, ya que buena parte de ellos son comentarios genéricos, C1C. Hay que señalar que se produce 1 comentario C3*C en la fase espontánea, es decir, uno de los alumnos identifica y describe el fenómeno c-i.i. La mayor parte de los comentarios, 27/31, son para aceptar su uso, de los que 24 se producen en la fase espontánea. Solo 4 de los comentarios son para rechazar su uso en una futura práctica docente; la mitad de ellos se expresan de forma genérica y la otra mitad para señalar dificultades. Además, en la fase inducida no se produce ningún comentario donde se rechace el uso de este fenómeno.

Tabla 6.38. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno d-i.i. por categorías y dimensiones.

Categorías	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal categoría
C1D	4	0	0	0	4
C2D	2	0	0	0	2
C3D	0	0	3	0	3
C3*D	0	3	1	0	4
Subtotal fase	6	3	4	0	13

Los comentarios acerca del fenómeno d-i.i. están distribuidos de forma uniforme entre las cuatro categorías. Hay que señalar que buena parte de ellos son comentarios de aceptación, 9/13, de los fragmentos y, pese a ser equivalentes a los fragmentos de límite más infinito, se producen menos de la mitad de los comentarios que para el fenómeno c-i.i. En el rechazo de su uso no se produce ningún comentario genérico, sino que el alumnado expresa las dificultades, e incluso la descripción del fenómeno, subyacentes. De nuevo, no se produce ningún rechazo en la fase inducida.

Tabla 6.39. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al “fenómeno” intuitivos por categorías y dimensiones.

Categorías	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal categoría
C1CD	14	0	0	0	14
C2CD	6	1	0	0	7
C3CD	2	0	1	0	3
C3*CD	0	0	0	0	0
Subtotal fase	22	1	1	0	24

En estas categorías, denominadas anteriormente emergentes, los estudiantes no establecen diferencia entre límite más y menos infinito, por ello resulta coherente que buena parte de los comentarios sean genéricos. Al no diferenciar el signo del infinito tampoco existe ninguna descripción del fenómeno, correspondiente a la categoría C3*. La simplificación en el tratamiento de estos límites lleva a su aceptación en buena parte de los comentarios, 23/24. De nuevo, como ya ocurriese en los casos anteriores, no se produce ningún rechazo en la fase inducida.

Tabla 6.40. Frecuencias absolutas de los comentarios asociados al fenómeno i.v.s.i. por categorías y dimensiones.

Categorías	Fase espontánea /uso	Fase inducida /uso	Fase espontánea /no uso	Fase inducida /no uso	Subtotal categoría
C1I	12	0	24	6	42
C2I	13	4	15	5	37
C3I	7	1	15	2	25
C3*I	3	4	2	8	18
Subtotal fase	35	9	56	21	121

Los comentarios acerca del fenómeno i.v.s.i., como ya sucediese para los del fenómeno c-i.i., están distribuidos de forma irregular entre las cuatro categorías. Estos fragmentos tienen una frecuencia absoluta de comentarios mayor que los fragmentos que tenían un enfoque intuitivo. Esto fue debido al establecimiento de un mayor debate, dando lugar a la descripción de dificultades y especificación de tipo de alumnado al que debían ir dirigidos. En este caso, más de la mitad de los comentarios surgidos fueron para rechazar este fenómeno, 77/121. Pese al enfoque formal y al conocimiento exhaustivo que debe tenerse de la definición de límite, hay que destacar los 5 comentarios en la fase espontánea, 3 de uso y 2 de no uso, que se producen en la categoría C3*I, donde el profesorado en formación identifica y describe el fenómeno i.v.s.i.

6.3.3. Comparación de los resultados con el profesorado en activo

En este apartado se pretende establecer la comparativa entre el profesorado en activo y el profesorado en formación. Para ello, tomaremos los datos de la tesis doctoral de Sánchez (2012) en el caso del profesorado en activo, y del presente estudio para el caso del profesorado en formación. Se establecerán dos comparativas, según el perfil fenomenológico y según la categorización de los comentarios realizados.

6.3.3.1 Perfiles fenomenológicos

En la comparativa de los perfiles fenomenológicos se ha decidido tomar los porcentajes en detrimento de la frecuencia absoluta, ya que el tamaño de la muestra de ambos estudios es significativamente diferente, $N_{PA}=9$ en el estudio del profesorado en activo y $N_{PF}=27$ en el estudio del profesorado en formación. Además, para su representación se han tomado aquellos que han sido identificados en alguno de los dos estudios.

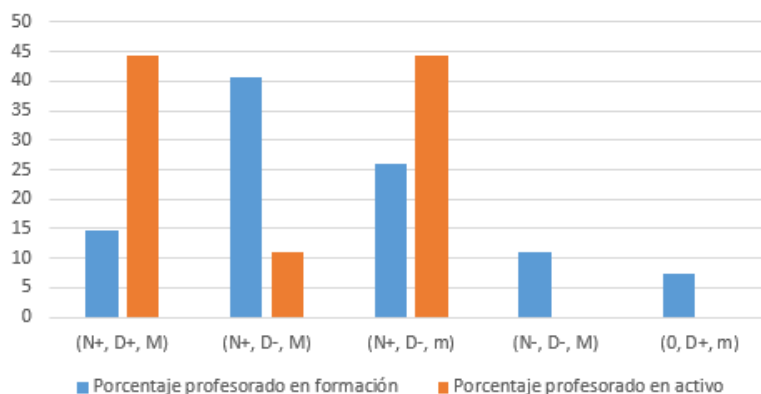


Figura 6.8. Comparación perfiles fenomenológicos.

Como puede observarse en la figura anterior, mientras que el profesorado en activo acepta el fenómeno intuitivo en todos los casos, el 11.11% del profesorado en formación lo rechaza. Este caso se consideraba remotamente posible en el estudio de Sánchez (2012). La observación de este rechazo, N-, puede haberse dado por varios motivos: la falta de experiencia del profesorado en formación; la titulación de acceso al Máster, 2 de las 3 personas que rechazan su uso no tenían titulación en Matemáticas y la persona que sí la tenía, había finalizado sus estudios 6 años atrás sin ningún contacto posterior con la materia, o bien la propia naturaleza del límite infinito de una sucesión.

El perfil predominante del profesorado en activo es (N+, D+, M), donde se acepta el fenómeno intuitivo, se acepta el fenómeno formal y donde es más relevante la aceptación del fenómeno intuitivo. Para el profesorado en formación, el perfil predominante es (N+, D-, M), donde se aceptan los fenómenos intuitivos, se rechaza el fenómeno formal y donde es más relevante el uso de los intuitivos que los rechazos del formal.

Ninguno de los dos tipos de profesorado tiene un perfil en el que se acepten los fenómenos intuitivos y los formales, pero donde se considere que es más relevante el uso de los formales frente a los intuitivos.

6.3.3.2 Categorización de los comentarios

De igual forma, se han tenido en cuenta los porcentajes para la comparación de la categorización de los comentarios atendiendo a las dimensiones fase y uso. Esto ha venido motivado por la diferencia existente entre el número de comentarios realizados por el profesorado en formación y el profesorado en activo; 68 y 62 comentarios para los fragmentos de enfoque intuitivo, y 121 y 76 para los fragmentos de enfoque formal.

En este caso, para la comparación de los resultados con los del estudio de Sánchez (2012) para los profesores en activo, ha tenido que sumarse los comentarios de los fenómenos de enfoque intuitivo para cada una de las categorías, es decir, $c-i.i.+d-i.i.+intuitivos$, por la existencia del desdoblamiento de fenómenos intuitivos del límite infinito de una sucesión respecto del fenómeno intuitivo del límite finito de una función en un punto.

A continuación, se presentan dichas comparaciones utilizando un diagrama de barras.

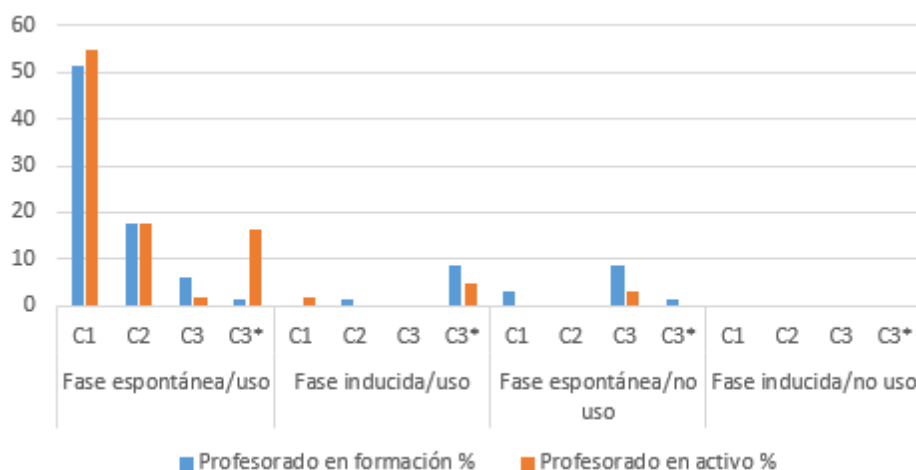


Figura 6.9. Comparación categorías fenómeno intuitivos.

Como puede observarse en la Figura 6.9 existe una relación entre los comentarios realizados por el profesorado en formación y el profesorado en activo.

En ambos casos buena parte de los comentarios se realizan en la fase espontánea para aceptar el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo. Además, el mayor número son comentarios genéricos, C1, con 52.47% y 54.84% respectivamente. Relevante es el porcentaje de ambos en los comentarios que tienen en cuenta el tipo de alumnado o el nivel formativo, cuando en el caso de los alumnos en formación todavía no se ha producido ninguna incursión en el aula, 17.65% y 17.74% respectivamente. Además, ningún tipo de profesorado realiza comentarios de rechazo de los fragmentos en la fase inducida.

Por otro lado, la diferencia más significativa la encontramos en la categoría C3* de la fase espontánea y el uso de los fragmentos presentados. El profesorado en formación solamente lo identifica en un 1.47% correspondiente a un solo comentario, mientras que el profesorado en activo, motivado por su experiencia en el aula, lo identifica en un 16.13%.

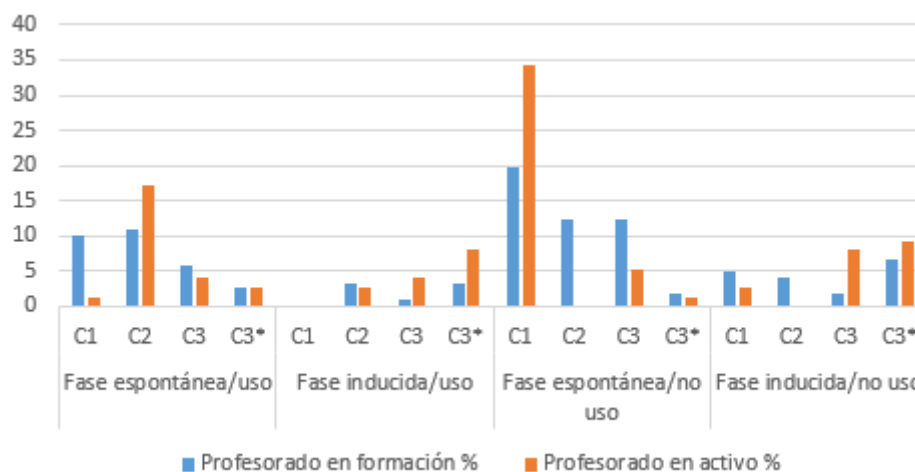


Figura 6.10. Comparación categorías fenómenos formales.

Mientras que en la comparación de las categorías de los fenómenos intuitivos se percibía una similitud entre los comentarios del profesorado en formación y el profesorado en activo, en la comparación de las categorías de los fenómenos formales no sucede. Las diferencias son más representativas en la fase espontánea, donde se producen un mayor número de comentarios en ambos tipos de profesorado.

En el uso de estos fragmentos, el profesorado en formación realiza un mayor porcentaje de comentarios genéricos, 9.92%, mientras que el profesorado en activo los realiza identificando el tipo de alumnado o nivel educativo con el que llevar a cabo a práctica en el aula, 17.11%.

En el rechazo de estos fragmentos, el profesorado en formación realiza todo tipo de comentarios, aunque sin identificar los fenómenos caracterizados, 19.83%, 12.40% y 12.40% para las primeras tres categorías, mientras que el profesorado en activo los realiza de forma genérica de forma dominante, 34.21%.

6.3.4. Comparación de los resultados con los libros de texto

A continuación, se presenta la comparación de los resultados obtenidos con los fragmentos de los libros de texto analizados y los comentarios realizados por parte del alumnado en formación.

En primer lugar, se considera el número total de comentarios realizados por los alumnos, $N_A = 212$, y el número total de fragmentos de los libros analizados, $N_L = 186$. Así, podemos establecer qué porcentaje corresponde a cada uno de los fenómenos en los

comentarios y qué porcentaje corresponde en los libros, para poder establecer una comparación posterior.

Tabla 6.41. N° comentarios realizados por el alumnado y n° fragmentos en los libros de texto.

	Alumnado	Alumnado %	Libros	Libros %
c-i.i.	55	25,94	56	30,11
d-i.i.	36	16,98	23	12,37
i.v.s.i.	121	57,08	107	57,53
Subtotales	212	100	186	100

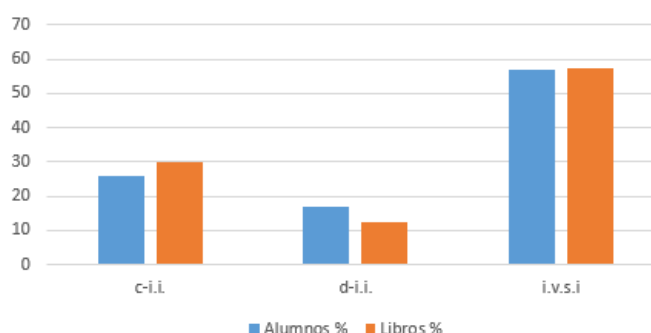


Figura 6.11. Comparación de los fenómenos en los comentarios del alumnado y en los libros de texto.

En la comparación realizada de cada uno de los fenómenos podemos observar que el número de comentarios de los alumnos sigue la misma tendencia que su presencia en los libros de texto. Más de la mitad de los comentarios y más de la mitad de los fragmentos, 57.08% y 57.53% respectivamente, corresponden al fenómeno i.v.s.i. Menor es la frecuencia de c-i.i., la cual se reduce a menos de la mitad en los comentarios del alumnado, 25.94%, y ligeramente superior en los libros de texto, 30.11%. Para el fenómeno d-i.i., se produce una menor incidencia en ambos, pese a ser equivalente al fenómeno c-i.i., dando lugar al 16.94% y 12.37% en alumnos y libros respectivamente.

Por otro lado, el libro de texto se ha considerado como un instrumento que utilice el profesorado en las aulas. Por ello, en la siguiente comparación se considerarán exclusivamente los comentarios de aceptación que realizó el alumnado, $N_A = 124$ y el número total de fragmentos de los libros analizados, $N_L = 186$, procediendo como en el caso anterior.

Tabla 6.42. N° comentarios en el que existe aceptación por alumnado y n° fragmentos en libros de texto.

	Alumnado	Alumnado %	Libros	Libros %
c-i.i.	50	40,32	56	30,11
d-i.i.	30	24,19	23	12,37
i.v.s.i.	44	35,48	107	57,53
Subtotales	124	100	186	100

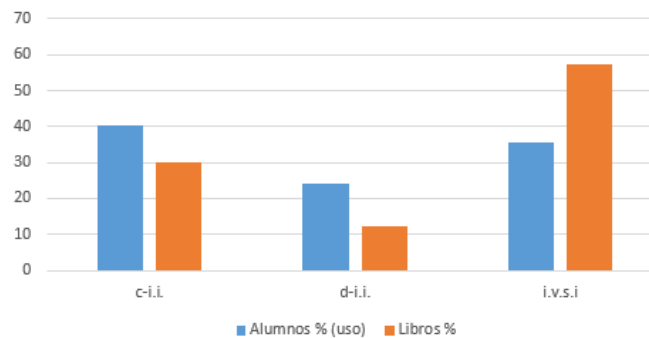


Figura 6.12. Comparación de los fenómenos en los comentarios del alumnado aceptando su uso y en los libros de texto.

En esta comparación puede observarse que los comentarios de aceptación que realiza el alumnado no siguen la misma tendencia que la que tiene en libros de texto. Mientras que, como habíamos visto en la comparación anterior, en libros de texto aparece en un 57.53% de los casos, el alumnado solo acepta su uso en un 35.48%. Este porcentaje de uso del fenómeno i.v.s.i., en comentarios del alumnado, es inferior al del fenómeno c-i.i., que llega al 40.32%. Éste es 10 puntos superior a la presencia de este fenómeno en los libros de texto, 30.11%. En cuanto al fenómeno d-i.i., la aceptación del alumnado duplica en porcentaje a su presencia en los libros de texto, 24.19% y 12.37% respectivamente.

6.3.4.1 Fenómenos c-i.i. y d-i.i.

Dada la gran importancia otorgada a los sistemas de representación y formatos durante el presente estudio, se establece una comparación más minuciosa que la anterior.

Para el fenómeno c-i.i. y d-i.i. han podido establecerse las comparaciones de los siguientes sistemas de representación y formatos: v-e, t-e y g-e, presentes en el cuestionario.

La forma de proceder para su comparación es idéntica a la de realizada en el apartado 6.3.4, se toma el número total de comentarios realizados por el alumnado, $N_A=212$, y posteriormente el número de comentarios de aceptación realizados por éstos, $N_A=124$, mientras que para los libros de texto se toma en todo momento $N_L=186$.

Tabla 6.43. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. c-i.i.

Código del fenómeno	Alumnado %	Libros %
c-i.i. (v-e)	8,96	13,44
c-i.i. (t-e)	5,66	2,15
c-i.i. (g-e)	7,08	4,30

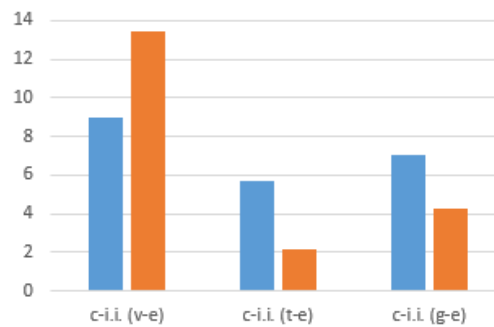


Figura 6.13. Comparación porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto para el fenómeno c-i.i.

En los libros de texto predomina el sistema de representación verbal de forma muy notoria para el fenómeno c-i.i., 13.44%, llegando a triplicar al sistema de representación gráfico, 4.30%, y sextuplicar al sistema de representación tabular, 2.15%. Sin embargo, en los comentarios del alumnado no existe esta dominancia tan diferenciada, aunque sigue prevaleciendo el sistema de representación verbal, 8.96%; respecto del sistema de representación gráfico 7.08%, y el sistema de representación tabular, 5.66%.

Los comentarios de aceptación se ven reducidos de 212 a 124, pero en los fenómenos de enfoque intuitivo esta reducción no se produce de forma proporcional, como ya pudimos ver en los porcentajes del apartado 6.3.4 Para el fenómeno c-i.i., los comentarios se reducen de 55 a 50, de ahí el incremento sobre el total de los porcentajes para los sistemas de representación estudiados.

Tabla 6.44. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. c-i.i.

Código del fenómeno	Alumnado % (solo uso)	Libros %
c-i.i. (v-e)	15,32	13,44
c-i.i. (t-e)	5,65	2,15
c-i.i. (g-e)	12,10	4,30

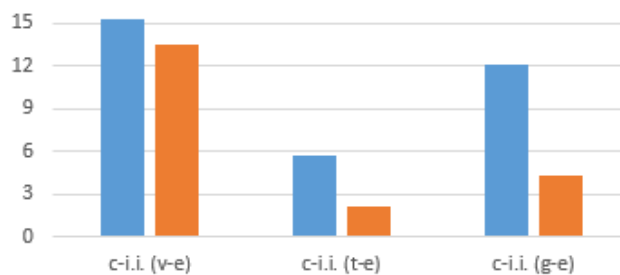


Figura 6.14. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. c-i.i.

Ya observamos en el gráfico anterior que en los libros de texto predomina el sistema de representación verbal de forma muy notoria para el fenómeno c-i.i., 13.44%; ahora considerando solo los comentarios de aceptación, la incidencia en el alumnado es muy similar, 15.32%. Los comentarios de aceptación en el sistema de representación gráfico, 12.10%, triplican a su presencia en los libros de texto, 4.30%. En ambos casos el sistema de representación tabular es el de menos incidencia, 5.65% en los comentarios de aceptación, y 2.15% en los libros de texto.

Tabla 6.45. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. d-i.i.

Código del fenómeno	Alumnado %	Libros %
d-i.i. (v-e)	3,30	3,76
d-i.i. (t-e)	3,77	1,61
d-i.i. (g-e)	6,60	2,15

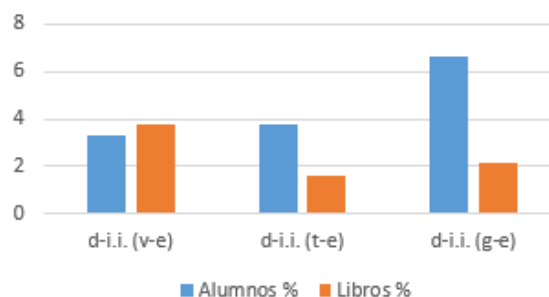


Figura 6.15. Comparación porcentajes comentarios alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. d-i.i.

En los libros de texto predomina el sistema de representación verbal, 3.76%, mientras que en los comentarios del alumnado tiene una mayor frecuencia el sistema de representación gráfico, 6.60%. En los comentarios encontramos prácticamente la misma incidencia en el sistema de representación verbal, 3.30%, que en el tabular, 3.77%, casi la mitad de los existentes en el caso predominante. Sin embargo, en los libros de texto el sistema de

representación tabular tiene una frecuencia tres veces inferior al sistema de representación verbal, 1.61%, y el sistema de representación tiene una presencia en el 2.15% de los casos.

La reducción sufrida en los comentarios de aceptación, de 212 a 124, también impacta en los porcentajes del fenómeno d-i.i., ya que en éste solo se reducen de 36 a 30, motivo por el que se justifica el incremento sobre el total de los porcentajes para los sistemas de representación estudiados.

Tabla 6.46. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. d-i.i.

Código del fenómeno	Alumnado % (solo uso)	Libros %
d-i.i. (v-e)	4,03	3,76
d-i.i. (t-e)	4,84	1,61
d-i.i. (g-e)	9,68	2,15

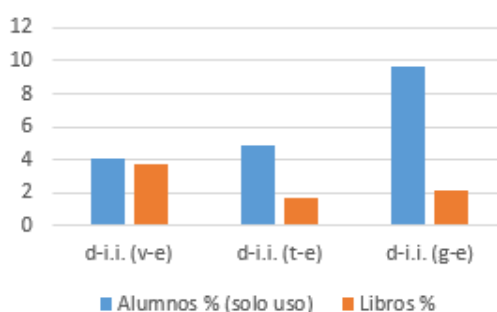


Figura 6.16. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. d-i.i.

De nuevo predomina el sistema de representación verbal en los libros de texto, 3.76%, y el sistema de representación gráfico en los comentarios de aceptación del alumnado, 9.68%. Los comentarios en el sistema de representación verbal y tabular tienen una incidencia menor, 4.03% y 4.84%. Con la eliminación de los comentarios en los que se realizaba el rechazo de algunos fragmentos, puede observarse que el porcentaje de uso del sistema de representación verbal y su incidencia en los libros de texto es muy similar, 4.03% y 3.76% respectivamente. No puede afirmarse lo mismo para el sistema de representación tabular, donde la incidencia en los libros de texto es tres veces inferior a los comentarios realizados por el alumnado, y para el sistema de representación gráfico, donde su incidencia es cuatro veces menor.

6.3.4.2 Fenómeno i.v.s.i.

Del mismo modo se procede para el fenómeno i.v.s.i. para los siguientes sistemas de representación y formatos: s-d, v-d y v-e, presentes en el cuestionario y en los libros de texto. t-e y g-e han tenido que ser suprimidos de esta comparación por no existir ningún fragmento en los libros de texto analizados.

Tabla 6.47. Porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto. i.v.s.i.

Código del fenómeno	Alumnado %	Libros %
i.v.s.i. (s-d)	14,15	5,38
i.v.s.i. (v-d)	11,79	25,81
i.v.s.i. (v-e)	8,96	18,82

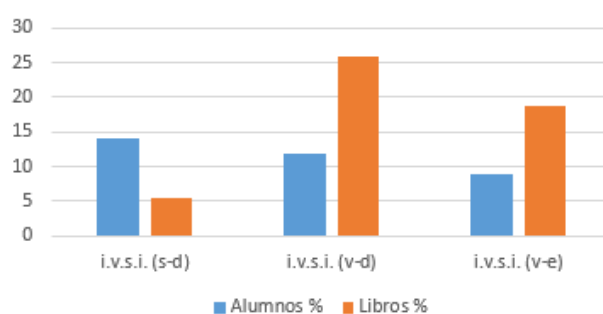


Figura 6.17. Comparación porcentajes comentarios alumnos y fragmentos libros de texto para el fenómeno. i.v.s.i.

En los libros de texto predomina el sistema de representación verbal en formato definición, 25.81%, seguido de esta misma representación en formato ejemplo, 18.82%. La dedicación a estos fragmentos en el debate no guarda relación con su presencia en los libros de texto. De hecho, el porcentaje de comentarios es inferior a la mitad en ambos casos, 11.79% y 8.96% para los formatos definición y ejemplo respectivamente. El mayor número de comentarios surge para el sistema de representación simbólico y formato definición, mientras que para los libros de texto es el que representa un porcentaje menor.

Para el fenómeno i.v.s.i. la reducción sufrida en los comentarios de aceptación, de 212 a 124, impacta de diferente forma a los fenómenos de enfoque intuitivo, ya que la mayor parte de los comentarios de rechazo surgen para este fenómeno. El número de comentarios de éste se reduce de 121 a 44.

Esta disminución de los comentarios se puede observar en cada uno de los sistemas de representación y formato, haciéndose latente sobre todo en v-d.

Tabla 6.48. Porcentajes comentarios aceptación alumnos y fragmentos libros de texto. i.v.s.i.

Código del fenómeno	Alumnado % (solo uso)	Libros %
i.v.s.i. (s-d)	12,90	5,38
i.v.s.i. (v-d)	2,42	25,81
i.v.s.i. (v-e)	11,29	18,82

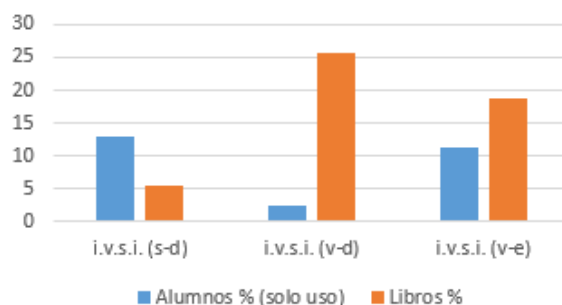


Figura 6.18. Comparación porcentajes comentarios aceptación alumnado y fragmentos libros de texto para el fenómeno. i.v.s.i.

En esta comparación la diferencia más significativa la encontramos en el sistema de representación verbal y formato definición. Mientras en los libros de texto es el que mayor representación tiene, 25.81%, los comentarios de aceptación por parte del alumnado se reducen solo al 2.42% sobre el total de comentarios que serían utilizados en el aula. Esta diferencia es menos abultada en el formato ejemplo, donde los comentarios de aceptación se incrementan hasta el 11.29%. El porcentaje para el sistema de representación simbólico casi permanece invariable a cuando se consideraban comentarios de aceptación y de rechazo, 12.90%, frente al 14,15% anterior.

6.4. Conclusiones de los debates

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en este capítulo, dando lugar a las siguientes conclusiones:

1. Ha sido posible la elaboración de un protocolo de actuación con el que poder identificar el perfil fenomenológico del profesorado en formación.

Para la elaboración de este protocolo ha sido necesaria la selección de 11 fragmentos en los que estuviese involucrada la noción de límite infinito de una sucesión, la puesta en marcha de tres pruebas piloto y el establecimiento de dos fases, espontánea e inducida, donde entre una y otra se llevase a cabo una incursión por parte de la investigadora.

2. Se han realizado informes grupales e individuales que han permitido el análisis de 8 grupos y 27 alumnos participantes.

Los informes están compuestos por una descripción del grupo; las unidades de información que lo componen, todas ellas compuestas por tres fases: presentación, espontánea e inducida; la interpretación grupal e individual del debate, atendiendo a las categorías y las tres dimensiones: utilización, fase y sistema de representación; las tablas de distribución grupal, para los enfoques intuitivo y formal; el desarrollo e interpretación de los resultados; y la síntesis de la información, a partir de la componente visual y la componente numérico-vectorial.

3. El alumnado en formación acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.

Todos los grupos participantes aceptan el uso de estos fragmentos, y además no existe ningún alumno que rechace su utilización en el aula: 25 de ellos lo aceptan y 2 no realizan ningún tipo de comentario.

4. El alumnado en formación rechaza el fenómeno i.v.s.i.

La mayor parte de los grupos y de los alumnos, 77.78% en ambos casos, rechazan la utilización de los fragmentos que contienen el fenómeno de enfoque formal.

5. El fragmento seleccionado por los expertos como definición matemáticamente correcta es rechazada por los profesores en formación como didácticamente adecuada.

Este fragmento es rechazado por el 78% del profesorado en formación. Queda como perspectiva futura lo siguiente: estudiar si este rechazo se debe a la diferencia entre matemáticamente correcto y didácticamente adecuado, o si la falta de experiencia docente es determinante para este rechazo.

6. Se han identificado algunos de los perfiles fenomenológicos calificados como posibles.

El perfil predominante es (N+, D-, M), donde se aceptan los fenómenos intuitivos, se rechaza el fenómeno formal y es más relevante el uso de los intuitivos que el rechazo del formal. Además, se identifican los perfiles individuales (N+, D+, M), el alumnado acepta el uso de los fenómenos intuitivos y formales, pero antepone la aceptación de los intuitivos; (N+, D-, m), acepta los fenómenos intuitivos y rechaza el formal, anteponiendo el rechazo de éste; (N-, D-, m), rechaza los fenómenos intuitivos y el formal, anteponiendo el rechazo de éste, y (0, D+, m), el alumnado no se pronuncia sobre los fenómenos intuitivos y acepta el formal, por ese motivo en la tercera componente se observa que antepone esta aceptación. Los perfiles grupales se reducen a (N+, D+, M), aceptan el uso de los fenómenos intuitivos y el formal, pero anteponen la aceptación de los fenómenos intuitivos; (N+, D-, M), aceptan el uso de los intuitivos y rechazan el formal, anteponiendo el rechazo de éste, y (N+, D-, m), aceptan el uso de los intuitivos y rechazan el formal, anteponiendo la aceptación de los primeros.

7. Se ha observado una relación entre las categorías identificadas para el profesorado en formación y en activo, en lo referente a los fenómenos intuitivos.

Para ambos, el mayor número de comentarios se categorizan como C1, comentarios genéricos, con 52.24% y 54.84% respectivamente. Además, los comentarios categorizados como C2 tienen un porcentaje similar, 17.91% y 17.74% respectivamente. También puede observarse que ningún tipo de profesorado realiza comentarios de rechazo de los fragmentos en la fase inducida.

8. No existe una relación entre los comentarios realizados por el profesorado en formación y en activo para el fenómeno formal.

El profesorado en formación realiza un mayor porcentaje de comentarios genéricos, 9.92%, mientras que el profesorado en activo los realiza identificando el tipo de alumnado, 17.11%. El alumnado del MFP realiza todo tipo de comentarios, aunque sin identificar los fenómenos caracterizados, 19.83%, 12.40% y 12.40% para las primeras tres categorías, mientras que el profesorado en activo realiza, de forma predominante, comentarios genéricos, 34.21%.

9. No existe una relación entre los comentarios realizados por el profesorado en formación y los fragmentos que aparecen en los libros de texto.

El porcentaje de los comentarios surgidos en los debates no guarda relación con el porcentaje de fragmentos en los libros para cada uno de los libros de texto. Si en lugar de considerar todos los comentarios se consideran únicamente los de uso tampoco guarda relación unos con otros. Esta diferencia se hace más latentes en el fenómeno i.v.s.i., donde el sistema de representación y formato más utilizado en los libros de texto es el que menor número de comentarios de aceptación tiene por parte del profesorado en formación. Al contrario ocurre con los fenómenos c-i.i. y d-i.i., que recogen un mayor porcentaje de aceptación que su incidencia en los libros de texto.

Capítulo 7. Conclusiones y perspectivas futuras

7. Conclusiones y perspectivas futuras

En esta investigación se pretendía, como meta principal, describir y caracterizar fenómenos que estuviesen organizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión. Éstos tenían que poder ser expresados en diferentes sistemas de representación y formatos. Para ello, llevamos a cabo una revisión bibliográfica, *Capítulo 2*, y un marco teórico, *Capítulo 3*. Posteriormente, en el *Capítulo 4*, desarrollamos el estudio teórico que da lugar a dicha caracterización. Se definieron tres fenómenos, dos desde un enfoque intuitivo: *crecimiento intuitivo ilimitado*, c-i.i., y *decrecimiento intuitivo ilimitado*, d-i.i., y uno desde un enfoque formal: *ida y vuelta en sucesiones de límite infinito o retroalimentación*, i.v.s.i.

En la búsqueda de evidencias que demostrasen su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje se analizaron libros de texto de diferentes leyes educativas, *Capítulo 5*, y se establecieron debates de discusión con el alumnado del Máster en Formación del Profesorado, *Capítulo 6*, dando lugar al perfil fenomenológico de los estudiantes.

A partir de esta elaboración, presentamos las conclusiones de la presente investigación.

En el primer apartado del capítulo, 7.1, realizamos una revisión de cada uno de los objetivos de la presente tesis doctoral, ya presentados en el *Capítulo 1*, y su grado de consecución. En cada uno de ellos, además de los resultados alcanzados, indicamos el capítulo en el que su estudio tuvo lugar.

En el apartado 7.2, aceptamos o refutamos, total o parcialmente, las hipótesis de investigación; además desarrollamos la exposición que lleva al motivo de cada una de estas reflexiones.

Durante el transcurso de este estudio hemos presentado resultados intermedios en diferentes seminarios y congresos en los que poder obtener una retroalimentación de investigadores con una dilatada experiencia. La referencia y una breve explicación de la difusión realizada se encuentra en el apartado 7.3.

Algunas cuestiones han quedado pendientes después de la finalización de este trabajo, a pesar de haber sido motivo de reflexión durante los últimos 5 años. En el apartado 7.4 sugerimos algunas de las líneas sobre las que creemos que es posible seguir investigando en un futuro cercano.

En el último apartado, 7.5, de la presente tesis doctoral se encuentra la reflexión final, en donde ubicamos las aportaciones principales de la investigación, en la que subrayamos la caracterización de fenómenos organizados por la definición del límite infinito de una sucesión.

7.1. Objetivos

A continuación, presentamos los objetivos que pretendían alcanzarse con esta investigación, así como el logro alcanzado en cada uno de ellos. La siguiente figura señala la relación que existe entre los diferentes capítulos y objetivos señalados.

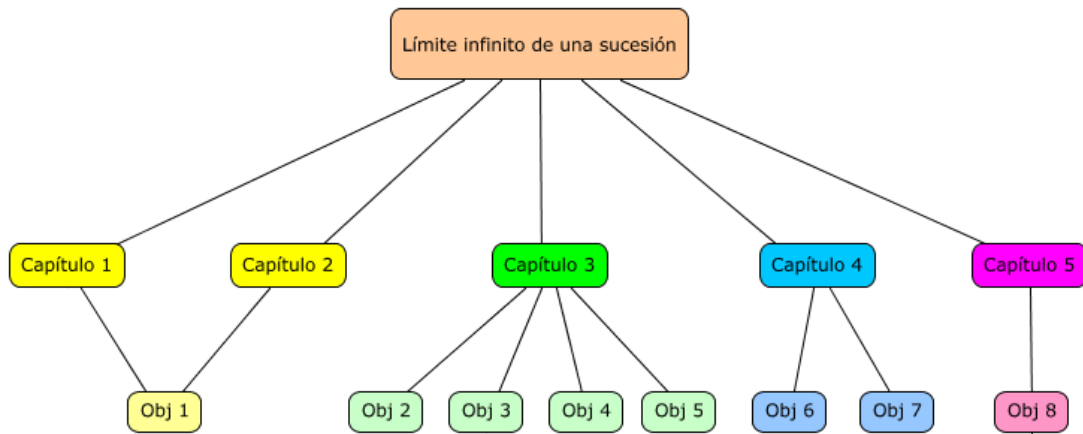


Figura 7.1. Consecución de objetivos en cada capítulo.

- **Objetivo 1:** Revisar el campo de conocimiento actual de la noción de límite infinito de una sucesión, atendiendo a su evolución histórica, dificultades, obstáculos y errores en la utilización de la noción.

Este primer objetivo ha podido lograrse a partir del estudio realizado principalmente en el *Capítulo 2* y continuado en el *Capítulo 3*.

A partir de una revisión bibliográfica hemos podido presentar el desarrollo histórico del límite, desde la antigua Grecia hasta la actualidad. Además, hemos desarrollado la noción de infinito tanto desde una perspectiva filosófica como matemática. En esta segunda revisión hemos recogido diferentes acepciones de la noción, incidiendo en las que tienen un enfoque matemático: infinito potencial e infinito actual.

Tal y como reflejan algunos autores, las preocupaciones docentes se focalizan en algunos errores y obstáculos. En el *Capítulo 2* hemos presentado las definiciones de error y de obstáculo, principalmente de los que atañen a los procesos infinitos, y ha surgido la necesidad de diferenciar los que influyen en la variable independiente y la variable dependiente.

En esta revisión, hemos tenido en cuenta los tres puntos de vista de la enseñanza-aprendizaje del límite: el alumnado, el profesorado y los libros de texto o manuales

universitarios. Además, hemos realizado una revisión bibliográfica de autores que han analizado las nociones de infinito y de límite en las diferentes leyes educativas españolas.

- **Objetivo 2:** Seleccionar al menos una definición de límite infinito de una sucesión cuya calidad de contenido y redacción sea bien aceptada por la comunidad matemática experimentada, y cuya actividad profesional se encuentre estrechamente relacionada con la docencia y/o la investigación matemática.

El cumplimiento de este objetivo lo alcanzamos en el *Capítulo 4*. Después de la realización de dos cuestionarios, compuestos por diferentes definiciones de límite más infinito de una sucesión, logramos seleccionar una definición cuya calidad de contenido y redacción fuese aceptada por la comunidad matemática dedicada a la docencia y a la investigación en didáctica de la matemática. En el primero, Cuestionario 1, quedaron latentes las dificultades del término divergencia, que se encontraba en alguna de las definiciones presentes en el cuestionario. Dada la dificultad existente con este término, descrita en el Objetivo 5, decidimos omitir este término, necesitando la realización de una nueva búsqueda y selección de definiciones que conformasen un segundo cuestionario. Este segundo cuestionario, Cuestionario 2, es el que determinó la elección de la definición utilizada para el estudio fenomenológico:

“Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$.” (Linés, 1983, p.29)

- **Objetivo 3:** Enunciar los elementos matemáticos involucrados en la definición del concepto de límite infinito de una sucesión y establecer distinciones con los encontrados en el límite finito de una sucesión.

Las nociones que consideramos, en el *Capítulo 4*, son las siguientes: dependencia, suficientemente grande, procesos infinitos, acotación, tipos de infinito y divergencia. Esta última la abordaremos de forma más profunda en el cumplimiento del Objetivo 5.

- Hemos expuesto dos dependencias: la primera viene determinada por la propia definición de sucesión, $n \rightarrow a_n$, donde se determina cada uno de los valores de la sucesión y en la que no interviene la noción de límite; mientras que la segunda se observa en la definición seleccionada, $H \rightarrow v$. En ella se relaciona el número real

H con el número natural v . En esta segunda dependencia hay que diferenciar si se está realizando el límite “más infinito” o el límite “menos infinito”. Esta relación no es única por el tipo de cardinal de cada variable.

- La expresión “suficientemente grande”, pese a no aparecer en la definición seleccionada, la hemos observado en distintos libros de texto. La equivalencia que podemos otorgarle es que el número seleccionado es mayor que cualquier otro valor dado que satisface unas determinadas condiciones.
- En el límite infinito de una sucesión diferenciamos dos procesos infinitos: uno para la variable independiente y otro para la variable dependiente. La variable independiente, refleja la posición que tiene cada uno de los términos de la sucesión y el proceso infinito es discreto, tomando únicamente valores naturales, avanzando de forma ilimitada y unilateralmente, de izquierda a derecha, a valores cada vez mayores. La variable dependiente tiene un proceso infinito discreto también, aunque los términos de la sucesión sean números reales. En esta última variable tenemos que diferenciar, de nuevo, sucesiones con límite “más infinito” de las que tienen límite “menos infinito”, para comprender los procesos infinitos involucrados.
- El infinito potencial está asociado a los procesos infinitos y, en consecuencia, tanto para la variable independiente como para la variable dependiente encontramos un infinito de este tipo. Existe un proceso de crecimiento que no tiene fin y siempre podemos pensar en un “siguiente”. Además, no es posible pensar en ningún número mayor para ninguna de las variables. Algunos autores, aceptan su existencia y otros no, obteniendo incluso afirmaciones contradictorias entre sí.
- Para la noción de acotación separamos, de nuevo, los límites “más infinito” y “menos infinito”. En el caso del límite “más infinito” existen dos acotaciones a tratar. La sucesión está acotada inferiormente por un término de la sucesión, y por otra parte puede observarse la acotación inferior de cada uno de los términos de la sucesión por el valor real H a partir de un cierto término de la sucesión. No es posible realizar una cota superior ya que los términos de la sucesión crecen indefinidamente. Para el límite “menos infinito” también existen dos acotaciones a tratar. La sucesión está acotada superiormente por un término de la sucesión, y por otra parte existe una nueva acotación superior para cada uno de los términos de la sucesión por el valor real H a partir de un cierto término de la sucesión. No

es posible encontrar una cota inferior ya que los términos de la sucesión decrecen indefinidamente.

Las diferencias con el límite finito de una sucesión se encuentran en la acotación y dependencia de la variable dependiente, y en los procesos infinitos. En el límite finito de una sucesión la variable dependiente se encuentra acotada y su dependencia es $\varepsilon \rightarrow N$, mientras que en el límite infinito de una sucesión la variable dependiente no se encuentra acotada y su dependencia es $H \rightarrow v$. En cuanto a los procesos infinitos, en el límite finito se produce una aproximación al límite mediante valores inferiores o superiores, mientras que en el límite infinito no existe aproximación en la variable dependiente.

- **Objetivo 4:** Caracterizar y definir fenómenos organizados por una definición de límite infinito de una sucesión.

En el *Capítulo 4*, hemos descrito con detalle tres fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión. Desde un enfoque intuitivo de la definición encontramos los denominados crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.). Además, desde un enfoque formal, hemos definido con detalle el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

En este capítulo no solo realizamos la definición de estos fenómenos, sino que presentamos ejemplos y definiciones de éstos extraídos de libros de texto que permitiesen garantizar su existencia en la enseñanza, ya que el libro de texto es un material muy importante para el profesorado. Por tanto, consideramos dos formatos: definición y ejemplo, y cuatro sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Dada la importancia que tenía esta búsqueda establecimos el *Capítulo 5* para profundizar más en el estudio de libros de texto, analizando la secuencia didáctica de cada libro y realizando la clasificación de los fenómenos que este usa en el estudio del límite infinito (más y menos infinito) de una sucesión.

Además, comparamos los fenómenos descritos y caracterizados en esta investigación con los de una definición del límite finito de una sucesión. Esta comparación se realizó tanto a nivel fenomenológico, como a nivel del conocimiento matemático implícito que debe manejarse para la comprensión de ambas nociones.

- **Objetivo 5:** Describir y analizar las dificultades que pueden encontrarse en el profesorado y en algunos autores de libros de texto y manuales universitarios a partir de la definición de divergencia, presente implícitamente en el límite infinito de sucesiones.

Después de la realización del Cuestionario 1, el Cuestionario 2 y el análisis de las definiciones de límite infinito de una sucesión en libros de texto de secundaria y en manuales universitarios, podemos concluir que no existe uniformidad en el término divergencia, ni para el profesorado en activo ni para los autores de libros de texto. Consecuencia de encontrar varias definiciones distintas, establecemos la nuestra propia basada en: una sucesión es divergente cuando tiene límite más infinito o menos infinito, una sucesión es convergente cuando tiene límite finito, y el resto de las sucesiones serán clasificadas como sucesiones ni convergentes, ni divergentes.

La mayor dificultad encontrada ha sido que autores de libros de texto utilizaban el término divergente con distinto significado, cuando tenían que definir una sucesión con límite infinito. Por este motivo decidimos que, en el Cuestionario 2 de expertos, en el que debían realizar la selección de una definición correcta y aceptada, y en el cuestionario que determinase el perfil fenomenológico del profesorado en formación, no apareciese dicho término.

- **Objetivo 6:** Detectar los tres fenómenos encontrados en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato, analizando tanto la presencia o no del límite infinito de una sucesión, como la fenomenología que tiene lugar durante la presentación de dicha noción.

Este objetivo se alcanza a partir de la realización de un estudio empírico de libros de texto, con el que fue posible identificar los tres fenómenos caracterizados en el *Capítulo 4* en algunos de los sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular y simbólico, y formatos: definición y ejemplo.

Además de identificar estos fenómenos, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.) pudimos establecer una relación entre ellos y diferentes periodos temporales.

El fenómeno c-i.i. fue identificado en el sistema de representación verbal, gráfico y tabular. Para el primero, encontramos definiciones y ejemplos involucrados en su proceso de enseñanza, mientras que para los segundos solo ha sido posible en el formato ejemplo.

El sistema de representación verbal fue el que mayor frecuencia tuvo, un 78.57%, frente al resto de sistemas de representación.

De la misma forma ocurrió para su análogo, el límite menos infinito de una sucesión, el fenómeno d-i.i., para el que no se identificó ningún fragmento en el sistema de representación simbólico, y tampoco ninguna definición en los sistemas de representación gráfico y tabular. El sistema de representación verbal, de nuevo, fue el de mayor frecuencia absoluta, un 69.57%.

Las apariciones para el fenómeno d-i.i., 11.19%, son menores que para el fenómeno c-i.i., 30.79%, disminuyendo en casi un 20%.

El fenómeno i.v.s.i. se identificó en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico. No encontramos ningún fragmento que correspondiese al sistema de representación tabular, y el sistema de representación gráfico solo ha sido identificado en el formato definición. Como ya sucediese con los fenómenos de enfoque intuitivo, el sistema de representación predominante en este fenómeno es el verbal, lo que constituye un 77.57%.

Considerando la evolución temporal por décadas podemos afirmar que:

- El sistema de representación verbal es el dominante para los tres fenómenos caracterizados durante los 80 años estudiados.
- El sistema de representación gráfico comenzó a observarse a partir de 1980 para el fenómeno c-i.i. y a partir de 1990 para los fenómenos d-i.i. e i.v.s.i., desapareciendo tanto en el enfoque intuitivo como en el formal en 2009.
- El sistema de representación tabular comenzó a observarse en la década de los noventa para los fenómenos intuitivos, c-i.i. y d-i.i., y todavía no se ha observado en el fenómeno i.v.s.i. Al igual que sucediese con el sistema de representación gráfico, desapareció en 2009.
- El sistema de representación simbólico solo fue encontrado para el fenómeno i.v.s.i. desde 1970 hasta 2009.

Atendiendo a los cambios legislativos en España podemos concluir lo siguiente:

- El sistema de representación verbal es el dominante para los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. durante las 5 leyes educativas estudiadas.

- El sistema de representación gráfico comienza a usarse en la LGE. En el caso de los fenómenos intuitivos, c-i.i. y d-i.i. continúan usándose en la LOGSE y la LOE, mientras que para el fenómeno i.v.s.i. solo se vuelve a presentar en la LOE.
 - El sistema de representación tabular está presente durante las leyes LOGSE y LOMCE para los fenómenos intuitivos, mientras que el fenómeno i.v.s.i. todavía no ha sido detectado en este sistema de representación.
 - El sistema de representación simbólico fue encontrado para el fenómeno i.v.s.i. desde la LGE. En la última ley educativa, LOMCE, su presencia ha resultado ser casi inexistente.
-
- **Objetivo 7:** Comparar los resultados del análisis de libros de texto con los obtenidos para otro tipo de límites.

Para la consecución de este objetivo consideramos los estudios de Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros et al. (2016b).

Los resultados obtenidos para los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) los comparamos con sus análogos para el límite finito de una sucesión, aproximación simple intuitiva (a.s.i.), y el límite finito de una función en un punto, aproximación doble intuitiva (ADI). Por otra parte, el fenómeno ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.) lo comparamos con los fenómenos ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.) e ida-vuelta en funciones (IVF), sus análogos para los límites anteriormente descritos.

Los fenómenos c-i.i. y d-i.i. tienen una incidencia mayor en el sistema de representación verbal y formato definición frente a los fenómenos a.s.i. y ADI. Por otra parte, a.s.i. predomina en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo, y ADI lo hace en los sistemas de representación verbal y formato ejemplo.

En el enfoque formal, i.v.s.i. prevalece en el sistema de representación verbal en ambos formatos; i.v.s. lo hace para el sistema de representación simbólico y formato ejemplo, e IVF es el dominante en el sistema de representación gráfico en ambos formatos, y en el sistema de representación simbólico y formato definición. Además, ninguno de estos fenómenos fue reconocido para el sistema de representación tabular y formato definición.

- **Objetivo 8:** Identificar los perfiles fenomenológicos del profesorado en formación a partir de un grupo de discusión entre 3-4 personas ante fragmentos relacionados con el límite infinito de una sucesión.

El logro de este objetivo es consecuencia de las conclusiones obtenidas en el *Capítulo 6*.

A continuación mostramos algunos de estos resultados:

- El alumnado en formación acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, es decir, acepta el uso de los fenómenos c-i.i. y d-i.i.
- La mayor parte del alumnado en formación, tanto cuando se considera al grupo de debate como a cada uno de los participantes del mismo, rechaza el fenómeno i.v.s.i., correspondiente a un enfoque formal.
- Con la realización de los debates de discusión se han podido identificar algunos perfiles fenomenológicos.
- El perfil fenomenológico del profesorado en formación guarda una relación con el perfil fenomenológico del profesorado en activo. Esta relación también existe para cada una de las categorías identificadas en los fenómenos intuitivos, pero no en el fenómeno formal.

7.2. Hipótesis

A continuación, describimos las hipótesis establecidas para esta investigación. Para su elaboración consideramos las investigaciones de las que partió este estudio, Claros (2010) y Sánchez (2012), y en las que ya se caracterizaron fenómenos organizados por las definiciones del límite finito de una sucesión y del límite finito de una función en un punto respectivamente, un estudio de libros de texto de diferentes etapas educativas en los que observaron dichos fenómenos y un estudio experimental realizado con el alumnado y el profesorado en activo respectivamente.

Además de la lectura de estas dos tesis doctorales como punto de partida, realizamos una revisión bibliográfica complementaria para poder establecer las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1: Existen diferencias significativas importantes entre la noción de límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión.

El logro de los Objetivos 1, 3 y 4 han permitido poder aceptar la verificación de esta hipótesis. En el *Capítulo 2*, en la revisión bibliográfica, pudimos observar que la mayor parte de los autores y las autoras establecían diferencias entre los distintos límites, ya fueran de sucesiones o funciones, finitos o infinitos. Además, en el *Capítulo 4* atendimos a la comparación matemática y fenomenológica de ambos límites.

En la comparación matemática consideramos la dependencia, la acotación y los procesos infinitos para poder analizar estas diferencias. Mientras tanto en la comparación fenomenológica existe un desdoblamiento para los fenómenos de enfoque intuitivo y una equivalencia entre los fenómenos de enfoque formal. El fenómeno de aproximación simple intuitiva, a.s.i., parece desdoblarse en dos fenómenos, por haber diferenciado el límite $+\infty$ y $-\infty$, obteniendo los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., y decrecimiento intuitivo ilimitado, d-i.i. Por otro lado, señalamos que existe una analogía entre el fenómeno ida-vuelta en sucesiones, i.v.s., y el fenómeno ida-vuelta en sucesiones de límite más y menos infinito, i.v.s.i.

Hipótesis 2: No existe una única definición de límite infinito de una sucesión que sea aceptada y utilizada por el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato.

Después de la realización de dos cuestionarios para poder seleccionar una definición correcta y aceptada por el profesorado en activo admitimos la verificación de esta hipótesis. En el Cuestionario 2, el que determinó la definición con la que se realizaría el estudio fenomenológico, no existió una única respuesta de aceptación por parte del profesorado. De hecho, comprobamos que dos de las definiciones, Linés (1983) y Vizmanos et al. (2011), tenían una buena aceptación por parte del profesorado que conformaba la muestra. La diferencia de puntuación entre ambas definiciones fue muy pequeña, teniendo que recurrir a la incidencia en los libros de texto para poder realizar la selección final.

Hipótesis 3: El término divergencia dificulta la clasificación de los distintos límites de sucesiones.

Aceptamos la verificación de esta hipótesis debido a las dificultades que mostró el profesorado de matemáticas cuando respondió al Cuestionario 1, en el que aparecía dicho término. De hecho, para poder seleccionar la definición aceptada tuvimos que eliminar dicho término en las definiciones que se presentaron.

En el Cuestionario 1, mientras que para algunos profesores y profesoras la definición era redundante, para otros el término divergente era ambiguo o erróneo. Esto llevaba a distorsionar los resultados finales del cuestionario.

Dada la falta de uniformidad, decidimos buscar la definición de dicho término en libros de texto y en manuales universitarios con el fin de añadirla a un nuevo cuestionario, y así eliminar cualquier atisbo de duda en el profesorado. Tampoco los autores de libros de texto y manuales parecían ponerse de acuerdo en la unicidad de la definición de este término. Algunos autores, como Spivak (1991) o Bartle y Sherbert (2000) definían una sucesión divergente cuando no era convergente, otros como Rey Pastor (1969) definían a las sucesiones divergentes a aquellas que tienen límite infinito ($+\infty$ o $-\infty$).

En el Cuestionario 2 decidimos suprimir este término de las definiciones, debiendo realizar una nueva búsqueda. Aunque en algunas respuestas del profesorado aparece el término divergencia para poder explicar algunos razonamientos, se suprimió la dificultad que provocaba éste en la selección de una definición del límite infinito de una sucesión y pudo elegirse una definición de límite infinito de una sucesión para abordar esta investigación.

Hipótesis 4: La definición aceptada y utilizada por el profesorado de límite infinito de una sucesión organiza tres fenómenos: los que tienen un enfoque intuitivo, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), y el que tiene un enfoque formal, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), también denominado retroalimentación.

Para este análisis, realizado en el *Capítulo 4*, consideramos dos enfoques: el intuitivo y el formal. Además, tuvimos en cuenta diferentes formas de representación y formatos en los que aparece la enseñanza de la noción de límite en educación secundaria.

Desde un enfoque intuitivo, las sucesiones crecientes pueden estar acotadas superiormente o ser no acotadas. En el primer caso el límite será finito, mientras que en el segundo caso, para las sucesiones crecientes no acotadas, no tendremos un número real mayor a todos los valores de la sucesión y por tanto tendremos un crecimiento ilimitado. A este fenómeno lo llamamos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y es el que se observa en las sucesiones de límite más infinito. Podemos caracterizar el crecimiento intuitivo ilimitado, c-i.i., como el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que avanzamos en la sucesión. Como consecuencia de este fenómeno se puede intuir que la sucesión es creciente no acotada superiormente, es decir, crece ilimitadamente. Podemos afirmar, por lo tanto, que este fenómeno caracteriza a las sucesiones crecientes no acotadas que tienen límite “más infinito”.

De forma análoga al crecimiento intuitivo ilimitado, observamos que una sucesión decreciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, entendiendo por pequeños aquellos números negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor. Si $n > m$, esperaremos $s(n) < s(m)$. Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es decreciente. Las sucesiones pueden estar acotadas inferiormente o no estar acotadas. En el primer caso, el límite es finito, mientras que en el segundo caso no se tiene un número real menor a todos los valores de la sucesión y por tanto se obtiene un decrecimiento ilimitado. Dado que la sucesión tiene infinitos términos y la sucesión no está acotada inferiormente, decrece de forma ilimitada. A este fenómeno lo llamamos decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.). Este fenómeno se observa en las sucesiones de límite “menos infinito”.

En un enfoque formal de la definición seleccionada (Linés, 1983), para el límite infinito observamos dos procesos:

- El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada elemento H de K , existe un número natural v ”.
- El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$ ”.

La retroalimentación se manifiesta al observar de forma conjunta estos dos procesos. Concretamente, al interpretar y aplicar los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una sucesión. Esto exige la construcción de una función $H \rightarrow n(H)$. Esta función que se ha construido está vinculada unívocamente a la sucesión con la que trabajamos y su particularidad está en que parte del *Eje Y* y va al *Eje X*.

A partir de todo lo expuesto, aseguramos la verificación de la hipótesis presentada.

Hipótesis 5: Otras definiciones del límite infinito de sucesiones organizan estos mismos tres fenómenos: crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

A partir del estudio realizado en el *Capítulo 4* comprobamos la verificación de esta hipótesis. A partir de la definición del límite “más infinito” de una sucesión podemos caracterizar los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) e ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), mientras que para la definición del límite “menos infinito” de una sucesión caracterizamos los fenómenos decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) y, de nuevo, ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

Hay que señalar que algunos libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato y manuales universitarios, en su presentación del límite infinito de una sucesión definen solamente el límite “más infinito” y, en consecuencia, solo podemos caracterizar los fenómenos c-i.i. e i.v.s.i. Sin embargo, en cualquier caso, podemos establecer una definición equivalente para el límite “menos infinito” y así caracterizar el fenómeno d-i.i. e i.v.s.i.

Hipótesis 6: Los fenómenos organizados por la definición del límite infinito de una sucesión pueden ser observados en libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Después del estudio minucioso realizado en el *Capítulo 5*, en el que fue necesario diseñar un instrumento con el que poder analizar cada libro de texto y en el que empleamos 35 manuales editados en un periodo de 80 años, contemplamos cada uno de los fenómenos caracterizados en el *Capítulo 4*. El fenómeno c-i.i. pudo observarse en 56 ocasiones, el fenómeno d-i.i. en 23, mientras que el fenómeno i.v.s.i. tuvo una incidencia mayor que los anteriores, pudiendo percibirse 107 veces.

En virtud de los resultados indicados señalamos la verificación de esta hipótesis.

Hipótesis 7: Los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión pueden presentarse en diferentes sistemas de representación y en diferentes formatos.

Aceptamos la verificación de esta hipótesis, pero parcialmente. A continuación, señalamos aquellos sistemas de representación y formatos en los que ha sido posible encontrar algún fragmento, y posteriormente aquellos en los que no lo ha sido.

Los fenómenos c-i.i. y d-i.i., correspondientes a un enfoque intuitivo, se han encontrado en el sistema de representación verbal y ambos formatos, v-e y v-d, en los sistemas de representación tabular y gráfico y formato ejemplo, t-e y g-e. Sin embargo, no se ha encontrado ningún fragmento donde apareciesen estos fenómenos en el sistema de representación simbólico, en ninguno de los dos formatos, s-e y s-d, y tampoco para los sistemas de representación tabular y gráfico y formato definición, t-d y g-d.

En lo que respecta al fenómeno i.v.s.i., correspondiente a un enfoque formal, se han encontrado fragmentos correspondientes a los sistemas de representación verbal y simbólico en ambos formatos, v-d, v-e, s-d y s-e, además del sistema de representación gráfico y formato definición, g-d. Sin embargo, a pesar de la amplia muestra considerada, no fue posible la identificación de este fenómeno en el sistema de representación tabular en ambos formatos, t-d y t-e, ni en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo, g-e.

Hipótesis 8: Las leyes educativas influyen en el tipo de fenómenos que los autores y las autoras de libros de texto usan para presentar el límite infinito de una sucesión, así como en los sistemas de representación y formatos en los que se presentan dichos fenómenos.

Reflexionando sobre los cambios legislativos sucedidos en España y el número medio de fenómenos por libro, analizado todo esto en el *Capítulo 5*, señalamos que no refutamos esta hipótesis. Las razones que justifican esta afirmación son las siguientes:

- Durante los 5 periodos legislativos acontecidos en España, el sistema de representación con mayor ocurrencia para el fenómeno c-i.i. ha sido el verbal. En los libros de texto correspondientes a la vigencia de la Ley Moyano no se identifican fragmentos en los sistemas de representación gráfico, tabular y simbólico. Durante la LGE y la LOE no se encuentran los sistemas de representación tabular y simbólico. En la LOGSE, se identifican todos los sistemas de representación, salvo el simbólico, que como ya quedó indicado anteriormente, no se ha identificado en los libros de texto españoles. Finalmente, en la LOMCE se identifican los sistemas de representación verbal y tabular.
- De forma casi análoga ocurre para el fenómeno d-i.i. En los libros de texto correspondientes a la Ley Moyano, LOE y LOMCE solo se identifica el sistema de representación verbal. En la LGE, además del sistema de representación verbal también se encuentra el sistema de representación gráfico. En la LOGSE, periodo en el que se produce el auge de este fenómeno, se identifican fragmentos en los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular.
- El sistema de representación verbal se produce en mayor medida durante la Ley Moyano, la LGE, la LOE y la LOMCE, mientras que durante la LOGSE existe una igualdad entre las frecuencias de este fenómeno en los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular. Para finalizar señalamos que, aunque su enfoque también sea intuitivo, este fenómeno tiene una menor frecuencia que el c-i.i.
- El fenómeno i.v.s.i. aparece en la Ley Moyano y la LOMCE en el sistema de representación verbal exclusivamente. En la LGE y la LOE, se identifican fragmentos en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico. En la LOGSE, auge de este fenómeno, se identifica el fenómeno en los sistemas de representación verbal y simbólico.

Hipótesis 9: Los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), relativos a un enfoque intuitivo, aparecen con mayor frecuencia que el fenómeno ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.), relativo a un enfoque formal.

Refutamos esta hipótesis, la frecuencia del fenómeno i.v.s.i. es mayor que la frecuencia de los fenómenos c-i.i. y d-i.i., e incluso mayor que la suma de ambos. Esta hipótesis se aceptaba en los estudios de límite finito de una sucesión (Claros, 2010) y límite finito de una función en un punto (Sánchez, 2012); sin embargo, para el límite infinito de una sucesión, de los 186 fenómenos identificados, 107 corresponden al fenómeno i.v.s.i., 56 al fenómeno c-i.i. y 23 al fenómeno d-i.i.

Si este análisis lo realizamos atendiendo a las décadas, podemos verificar la hipótesis en los periodos 1936-1939 y 2010-2016, y atendiendo a los periodos legislativos podríamos hacerlo para la LOMCE.

Hipótesis 10: El sistema de representación verbal es el que aparece con mayor frecuencia en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Aceptamos la verificación de esta hipótesis tanto si consideramos de forma conjunta a los tres fenómenos como individualmente a cada uno de ellos. Si atendemos al análisis conjunto, son 143, de un total de 186, los fragmentos se reconocen en el sistema de representación verbal. Si contemplamos el análisis para cada uno de los fenómenos, detectamos las siguientes frecuencias para el sistema de representación verbal:

- 44 de los 56 fragmentos del fenómeno c-i.i.
- 16 de los 23 fragmentos del fenómeno d-i.i.
- 83 de los 107 fragmentos del fenómeno i.v.s.i.

Hipótesis 11: Es posible detectar los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.) en los grupos de debate de alumnado del Máster de Formación del Profesorado cuando tienen que decidir qué elementos usar para presentar el límite infinito de una sucesión.

Aceptamos la verificación de esta hipótesis, ya que los tres fenómenos han sido detectados en los debates de discusión realizados por el profesorado en formación. Esta identificación se ha producido tanto en la fase espontánea como en la fase inducida.

- En los fragmentos correspondientes al fenómeno c-i.i., de los 31 comentarios categorizados, 4 corresponden a la identificación del fenómeno: 1 en la fase espontánea y 3 en la fase inducida; en todos los casos aceptando su uso en las aulas.
- De los 13 comentarios categorizados referentes a los fragmentos del fenómeno d-i.i., 4 corresponden a la identificación del fenómeno: 1 de rechazo en la fase espontánea y 3 de aceptación en la fase inducida.
- Los comentarios categorizados para los fragmentos correspondientes al fenómeno i.v.s.i. aparecen con mayor frecuencia que los dos anteriores, en 121 ocasiones. De ellas, 17 corresponden a la identificación del propio fenómeno, 5 en la fase espontánea y 12 en la fase inducida.

Hipótesis 12: La aceptación de las diferentes presentaciones del límite infinito de una sucesión por parte del alumnado del Máster de Formación del Profesorado tiene mayor frecuencia cuando se detectan los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.), que cuando se detecta el fenómeno ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

El análisis realizado durante el *Capítulo 6* permite admitir la verificación de esta hipótesis. Dada que la frecuencia de cada uno de los fenómenos no es comparable entre ellos se indica separadamente qué ocurre con cada uno de ellos a continuación:

- De los 31 comentarios correspondientes al fenómeno c-i.i., 27 de ellos son de aceptación de estos fragmentos para su uso en el aula, un 87%. De éstos, 24 suceden en la fase espontánea.
- De los 13 comentarios del fenómeno d-i.i., 9 de ellos son de aceptación de su uso en el aula, un 69%. De ellos, 6 se producen en la fase espontánea.
- Para el fenómeno i.v.s.i., de los 121 comentarios, 44 lo son para aceptar su uso en el aula, un 36%. De estos 35 ocurren en la fase espontánea.

7.3. Difusión de los resultados

En el transcurso de la presente tesis doctoral hemos participado en diferentes seminarios, que presentamos a continuación, en los que difundimos los primeros avances y resultados intermedios de este estudio, pudiendo recibir en todos estos foros la opinión y sugerencias de expertos en Didáctica de las Matemáticas.

- Marzo de 2016. Comunicación con el título “Fenómenos de sucesiones con límite infinito” presentada en el Seminario de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática, celebrado en la Facultad de Formación del Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. Se describieron tres fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión y los pasos seguidos para la selección de dicha definición.
- Septiembre de 2016. Comunicación titulada “Fenómenos organizados por el límite infinito de sucesiones en libros de texto. Primeros avances” presentada en los grupos de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática, durante la XX SEIEM celebrada en Málaga. Durante esta comunicación presentamos los primeros avances de un estudio sobre fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión en libros de texto españoles de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Expusimos el método sistemático con el que poder analizar posteriormente los resultados, dando lugar a la plantilla de análisis de los libros de texto y arrojando los primeros resultados.
- Enero de 2017. Póster y comunicación, ambos con el título “Los límites y el lenguaje de programación. Fenomenología, Pensamiento Matemático Avanzado y Sistemas de Representación en la Enseñanza Secundaria y Universitaria”, presentados durante el Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española celebrado en Zaragoza. Presentamos las diferentes investigaciones surgidas en el seno de un grupo de investigación que tiene como marco teórico los siguientes tres pilares: Fenomenología, Pensamiento Matemático Avanzado y Sistemas de Representación.
- Junio-Julio de 2017. Realización de una estancia de investigación en el Departamento de Didáctica de la Matemática, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.
- Septiembre de 2017. Comunicación titulada “Marco teórico de la tesis doctoral ‘Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza’”, presentada en el grupo

de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico durante la XXI SEIEM celebrada en Zaragoza. Presentamos, de forma minuciosa, cada uno de los cuatro pilares del marco teórico de la presente tesis doctoral.

- Octubre de 2017. Publicación del artículo “Pensamiento Matemático Avanzado y Scratch: método del Máximo Común Divisor” en la revista Pensamiento Matemático. En este artículo se llevó a cabo una propuesta didáctica, con los alumnos del Máster de Formación del Profesorado. Dicha propuesta consistía en la programación en Scratch del Algoritmo de Euclides para el Máximo Común Divisor. Esta metodología de trabajo mezcló matemáticas y programación, permitiendo trabajar con los alumnos elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado como son la abstracción, la formalización y la generalización, entre otros.
- Diciembre de 2017. Publicación del artículo “Límite infinito de sucesiones y divergencia” en la revista Epsilon. En este documento mostrábamos las dificultades para seleccionar una definición de límite infinito de una sucesión como consecuencia del efecto que el término divergencia ocasiona en dichas definiciones. Las dificultades, mostradas a través de una consulta a expertos, estaban presentes tanto en profesores como en autores de libros de texto. En el artículo aportamos una nueva acepción de sucesión divergente y se preparó el camino para un estudio posterior de la definición seleccionada.
- Marzo de 2018. Comunicación con el título “Comparación entre el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión: requisitos matemáticos y fenomenología”, presentada en el Seminario de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico en la Facultat de Magisteri de la Universitat de Valencia. Presentamos la comparación de los requisitos matemáticos y fenomenológicos entre el límite finito e infinito de una sucesión. En la comparación matemática tomamos las siguientes nociones: dependencia, acotación, aproximación, procesos infinitos y tipos de infinito, y en la fenomenológica, cada uno de los fenómenos organizados por ambos límites.
- Mayo-Julio de 2018. Realización de una estancia de investigación en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
- Junio de 2018. Conferencia bajo el título “Límite infinito de sucesiones: fenómenos que organiza”, dentro del Seminario Didáctica de las Matemáticas organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y el Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones. En ella presentamos

un resumen del trabajo realizado durante los cuatro primeros años de esta tesis doctoral.

- Septiembre de 2018. Taller con el título “Análisis e identificación de fenómenos en el límite infinito de una sucesión”, organizado por el Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático durante la XXII SEIEM celebrada en Gijón. Durante el taller presentamos fenómenos caracterizados por una definición del límite infinito de una sucesión y se propuso a los participantes su posible identificación en diferentes definiciones y ejemplos, así como su aceptación o rechazo para una adecuada presentación de dicho límite en el aula. Este taller formó parte del estudio experimental del *Capítulo 6* como segunda prueba piloto.

7.4. Perspectivas futuras

Desde el comienzo de esta tesis doctoral, en 2014, hemos logrado dar respuesta a los objetivos planeados y hemos verificado algunas de las hipótesis propuestas. Sin embargo, han quedado sin responder algunas de las preguntas pertenecientes a las reflexiones iniciales o intermedias del presente estudio.

1. Hemos caracterizado los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. considerando el enfoque intuitivo y el enfoque formal. ¿Podríamos haber caracterizado otros fenómenos habiendo considerado otros enfoques? Considerando estos enfoques, ¿es posible caracterizar nuevos fenómenos que complementen a los ya existentes? ¿Qué relación podría encontrarse con los ya existentes?
2. Después de la realización de la presente tesis doctoral y los estudios anteriores de Claros (2010) y Sánchez (2012), han quedado caracterizados algunos fenómenos organizados a partir de la definición del límite infinito de una sucesión, límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto. ¿Qué fenómenos pueden caracterizarse para el límite infinito de una función en el infinito, límite infinito de una función en un punto y límite finito de una función en el infinito? Para el primero de ellos hemos dedicado un apartado de este trabajo realizando un esbozo de los posibles fenómenos existentes, mientras que para los otros dos no existen investigaciones en curso que den todavía respuesta.
3. A partir de la caracterización de los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. y con el soporte de la Teoría APOS, se diseña una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del límite infinito de una sucesión, utilizando los diferentes sistemas de representación y formatos. Esta tarea pretendía abordarse en este trabajo, pero ha quedado como una tarea pendiente para ser abordada en próximas investigaciones.
4. Todos los libros de texto considerados han sido editados en España. ¿Qué ocurre con el límite infinito de una sucesión en los libros de texto de otros países? ¿Identificamos de la misma manera los fenómenos caracterizados? ¿La incidencia de cada uno de los sistemas de representación es la misma para otros países? ¿Han influido las leyes educativas en otros países tal y como ha ocurrido en España?
5. Los libros de texto analizados se encontraban en formato físico y aunque se consultaron ejemplares digitales, éstos no contenían identificaciones adicionales del fenómeno. ¿Qué ocurrirá con el límite infinito de una sucesión cuando se instaure en las aulas el soporte digital por completo?

6. El estudio realizado con el futuro profesorado concernía a un análisis fenomenológico con el fin de determinar su perfil fenomenológico, pero no el conocimiento que tenía el futuro profesorado de matemáticas acerca del límite infinito de una sucesión. ¿Tiene el futuro profesorado el conocimiento matemático suficiente del límite infinito de una sucesión? ¿Qué conocimiento matemático del límite infinito de una sucesión tiene el alumnado de Bachillerato?
7. El perfil fenomenológico para el límite infinito de una sucesión se ha realizado con el futuro profesorado de matemáticas. ¿Tiene el profesorado en activo el mismo perfil fenomenológico para este tipo de límite?
8. En la recogida de datos con el profesorado en formación también se encontraba una propuesta didáctica, realizada a partir del orden de los fragmentos mostrados, para la enseñanza del límite infinito de una sucesión. Ésta no la hemos analizado en la presente memoria. ¿Qué propuestas didácticas consideran adecuadas los futuros profesores para llevar a cabo la enseñanza del límite infinito de una sucesión en su futura labor docente? ¿Qué propuestas didácticas consideran adecuadas los profesores en activo de este tipo de límites?

7.5. Reflexión final

Cuando en 2014 dio comienzo esta tesis doctoral ya habían finalizado algunos estudios de determinados límites y su fenomenología, citados con anterioridad durante el trabajo, y cuyos autores han sido responsables de la dirección de esta tesis doctoral.

Hasta entonces se había abordado el límite finito, tanto de una sucesión como de una función en un punto, quedando un arduo camino pendiente de realizar sobre el límite infinito.

Este análisis comenzó con la incertidumbre de la existencia de fenómenos cuando interviene el límite infinito. Para ello llevamos a cabo dos cuestionarios a expertos con los que poder seleccionar una definición del límite estudiado; el primero arrojó más dificultades que resultados con los que poder continuar, y por ese motivo tuvimos que llevar a cabo un segundo cuestionario, con las adaptaciones pertinentes. Con la definición seleccionada en el segundo cuestionario pudimos obtener el aporte principal de esta investigación: la caracterización de los fenómenos organizados a partir de la definición del límite infinito de una sucesión: crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.).

Este análisis ya había sido realizado en las investigaciones previas, dando lugar en cada una de ellas a dos fenómenos: aproximación simple intuitiva (a.s.i.) e ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.), para el límite finito de una sucesión, y aproximación doble intuitiva (ADI) e ida-vuelta en funciones (IVF), para el límite finito de una función en un punto. Estos fenómenos se habían obtenido considerando dos enfoques: intuitivo y formal, existiendo unicidad entre el enfoque y el fenómeno.

La primera gran diferencia de este estudio respecto a los anteriores es el desdoblamiento del fenómeno intuitivo, a.s.i., en c-i.i. y d-i.i., ante la imposibilidad de abordar el “más infinito” y el “menos infinito” de forma conjunta. Para el fenómeno formal, i.v.s.i., existe una equivalencia con los estudiados con anterioridad.

Creemos que con el manejo de los tres fenómenos puedan darse respuestas a algunas de las dificultades actuales de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite infinito de una sucesión, aunque somos conscientes de que su adquisición no es inmediata y pueden surgir nuevos obstáculos.

Estos fenómenos los hemos podido observar en diferentes sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico, y distintos formatos: definición y ejemplo. En algunos casos, para la presentación de algunos sistemas de representación se ha tenido que recurrir a la creación de fragmentos, por no encontrarse en ninguno de los 35 libros de texto analizados. Esta muestra es más amplia si consideramos los libros consultados, pero que no han sido tenidos en cuenta, bien por no encontrarse el límite infinito de una sucesión, o bien por no identificarse ninguno de los fenómenos. En algunos casos, los libros de texto enfatizan algunos procedimientos y no elaboran ningún fragmento, ni definición, ni ejemplo, que profundice en la noción.

Para esta consulta de estos libros de texto, recurrimos a los fondos bibliográficos de la Universidad Complutense de Madrid, lugar donde se ha realizado esta tesis doctoral, y de la Universidad de Zaragoza, donde se realizó una estancia de investigación de dos meses durante el transcurso del presente estudio; también se consultó la biblioteca del IES Pedro Espinosa de Antequera, aprovechando su fondo histórico durante la estancia de investigación en la Universidad de Málaga, además de diversos fondos personales de docentes en activo. Ante la dificultad de encontrar, en los fondos mencionados, manuales anteriores a 1970 tuvo que recurrirse a la Biblioteca Nacional Española, en la que se encuentra al menos un ejemplar de todos los libros de texto editados, pudiendo cumplimentar nuestra muestra.

El motivo de trabajar con libros de texto en este estudio, además de para observar los tres fenómenos caracterizados, es por ser un recurso habitual en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Algunos autores consideran que la presencia de éstos en el aula va unida labor del docente.

En los estudios de partida, los de Claros (2010) y Sánchez (2012), se analizaron las respuestas del alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato, y los del profesorado en activo. En esta ocasión, es el profesorado en formación, es decir, el alumnado de Máster de Formación del Profesorado, el sujeto de análisis. Después de la realización de tres pruebas piloto pudimos crear un protocolo de actuación eficaz con el que examinar a este profesorado. Se conformaron grupos de discusión, 3-4 personas, a los que facilitamos fragmentos en los que apareciese el límite infinito de una sucesión. A partir del análisis de estos debates y de su posterior categorización, pudimos determinar su perfil fenomenológico.

Bibliografía

Bibliografía

- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L., Barbero, F. (2016). *Matemáticas II*. Editorial SM.
- Álvarez, F., García, C., Garrido, L.M., & Vila, A. (1987). *Matemáticas. Factor-2*. Editorial Vicens-vives.
- Anderxon, O.A., Torres, K.Y., Parra, G.V., & Milton, V.C. (2013). Una propuesta de enseñanza para los estudiantes de grado once del IED Paulo Freire sobre la noción de límite. *Revista científica*, 2, 506-509.
- Arce, M., & Conejo, L. (2017). Análisis de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial de límite de una función. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 11(3), 155-179.
- Arce, M., & Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73
- Arnal, M., Claros, J., Sánchez, M. T., & Baeza, M. Á. (2017). Límite infinito de sucesiones y divergencia. *Épsilon*, (97), 7-22.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York, NY: Springer.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 1(1).
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*. Issues in Mathematics Education, vol. 6, pp. 1-32.
- Avellanas L., García J.C., Martínez C. (1996). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Ed. McGraw Hill.
- Azcárate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 1(2), 235-240.

- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Baenas, T., & Martínez de Santiago, C. (2007). *Cálculo de variable natural*. Editorial Club Universitario.
- Baratech-Montes, B., & Zalama-Miguel, C. (1938). *Matemáticas sexto curso de bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis* (Vol. 2). New York: Wiley.
- Belmonte, J.M., Montero, G., Negro, A., Pérez, S., & Sierra, T. (1989). *Matemáticas 2 Bachillerato*. Editorial Alhambra.
- Belmonte, J.L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14.2, 139-171.
- Benedicto, C., & Negro, A. (1987). *Matemáticas. 2º BUP*. Editorial Alhambra.
- Benedicto, C., & Negro, A. (1993). *2º BUP. Matemáticas*. Editorial Alhambra.
- Bescós, E., & Pena, Z. (2001). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales: 2º Bachillerato: humanidades y ciencias sociales*. Oxford University Press España.
- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. In *Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999* (pp. 167-184). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- Blázquez, S., Gatica, S. N., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional. *Contextos educativos*, (11), 7.
- Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(3), 219-236.

- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(2), 189-209.
- Bolio, A. P. (2012). Husserl y la fenomenología trascendental: Perspectivas del sujeto en las ciencias del siglo XX. *REencuentro. Análisis de Problemas Universitario*, 20-29.
- Boyer, C.B (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Bradley, G.L., & Smith, K.L. (1998). *Cálculo de una variable*. Ed. Prentice Hall.
- Brinton, G. (2005). *Cálculo*. Ed. Pearson Education.
- Bucari, N. D., Bertero, M. F., & Trípoli, M. D. L. M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo. *I Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*.
- Buitrago, I. D., Gaviria, C. A., & Márquez, C. A. (2014). Algunos conceptos matemáticos asociados al infinito. *Ingenierías USBMed*, 5(2), 96-99.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral*. Tesis Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Camacho, A., & Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 4 (3), pp. 237-265.
- Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., & Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.
- Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. (pp. 95-124). Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, España.
- Castro, E., Rico, L., & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371.
- Cenzano, J. (1958). *Matemáticas sexto curso*. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.
- Clark, J., Kraut, G., Mathews, D., & Wimbish, J. (2007). *The "Fundamental Theorem" of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts*.

- Claros, J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Universidad de Granada: Departamento Didáctica de las Matemáticas, Granada, España.
- Claros, J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1(3), 125-137.
- Claros, J., Sánchez, M.T., & Coriat, M. (2016a). Estructura cognitiva y fenomenología: el caso de la sucesión convergente. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 87-105.
- Claros, J., Sánchez, M.T., & Coriat, M. (2016b). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación matemática*, 28(1), 125-152.
- Colera, J., Olivera, M.J., & Fernández, S. (1997). *2º Bachillerato LOGSE*. Ed. Anaya
- Cólera, J., Oliveira, M.J., García, R., & Santaella, E. (2008). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Ed. ANAYA
- Conejo, L., & Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *NÚMEROS, Revista de didáctica de las Matemáticas*, 87, 5-23.
- Contreras, Á., García, M., & Font, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Boletim de Educação Matemática*, 26 (42B), 667-690.
- Cornu, B. (1982). Algunos obstáculos en el aprendizaje de la noción de límite. *Séminaire de didactique de et Pédagogie des Mathématiques*, 34, 230-268.
- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, France.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Costa, E., & de Otto, B. (2005). Ideología y Matemáticas. El infinito. *XIII Jornadas de ASEPUMA*.
- Couoh, J. R. (2015). *El conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: estudio de tres casos*. Universidad Autónoma de Guerrero, Mexico.

- D'Amore, B. (1996). El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (36), 341-360.
- De la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Blanco, J.L., Pérez, C., Sánchez, D. (2015). *Matemáticas I*. Editorial Santillana.
- De la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Blanco, J.L., Pérez, C., Sánchez, D. (2015). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Editorial Santillana.
- Díaz, J.M. (1998). *Introducción a la topología de los espacios métricos*. Ed. Universidad de Cádiz.
- Dong-Joong, K., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 201-208.
- Douglas (2018). *Student personal concept definition of limits and its impact on further learning of mathematics*. Bowling Green State University, Ohio, USA.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Dubinsky, E. (1991). "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Dubinsky, E. (2014). APOS Theory. En S. Lerman (ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Springer.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).
- Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemáticas Educativa II.*, 173- 202. México. CINVESTAV.
- Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.

- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 23-32.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Henzenn, N., & de Santa Fe, E. P. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa*, 10(36), 11-21.
- Enríquez, M., & Palles, L. (2007). *Un Estudio acerca de las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite de una función en el grado once de enseñanza media del colegio INEM–Past*. Universidad de Nariño, Nariño, Colombia.
- Escoredo, A., Gómez, M.D., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., del Río, J., Sánchez, D. (2009). *2º Bachillerato. Matemáticas II*. Editorial Santillana.
- Etayo, J., Cólera, J., Ruiz, A. (1979). *Matemáticas 2º*. Editorial ANAYA.
- Fedriani, E., & Tenorio, A. (2010). Matemáticas más allá: el infinito. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. N°2, pp.37-58.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias*, 36(1), 143-162.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 16(1), 131-146.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 211-229.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L., & Castro, E. (2014) Relación entre representaciones gráficas y simbólicas del concepto de límite finito de una función en un punto. En: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. (pp. 287-295). Salamanca: SEIEM.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, 3(2), 9-24.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics*, 10(1), 3-40.

- Flores, P. (1999). Paradojas matemáticas para la formación de profesores. *SUMA*, 31, 27-35.
- Flores, P. (2004). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. En Castro, Encarnación; de la Torre, Enrique (Eds.), *Investigación en educación matemática: VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 25-42). A Coruña: Servicio de Publicaciones.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrech: Reidel Publishing Company.
- Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. En Ortiz, José; Iglesias, Martha (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 137-153). Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo.
- Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 20(1), 87-113.
- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 275-285.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397-430.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación*, 2, 78-89.
- Gómez, P., & Carulla, C. (1998). Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico? En UCV, I. (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 710-715. Caracas: UCV.

- Gómez, M., & Pantoja, Y. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Sigma*, 11(1), 26-38
- González, A., González, J., Laborda, M. (1986). *Matemáticas 2º BUP. Proyecto Ariadna*. Editorial AKAL.
- González, C., Llorente, J., & Ruiz, M.J. (1995). *Matemáticas I. Editorial*. EDITEX.
- González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM.
- Gorostizaga, J.C. (2015). Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Maquinas Navales.
- Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, 32(6), 777-796.
- Guedj, D. (1996). *L'empire des nombres*. Gallimard.
- Guillén, J., Navarro, R., Peña, J.A., Ferrer, S. (1976). *2º Bachillerato. Matemáticas*. Editorial Magisterio Español.
- Herrera, F., Salazar, E., Hernández, M., & Trejo, R. (2013). Noción de límite basada en la tipología de Brousseau. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. (pp. 1-12). Santo Domingo, República Dominicana.
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones en Matemática Educativa. *Aspectos de la Investigación Actual*. México D.F. Editorial Fondo Educativo Interamericano.
- Irazoqui, E., & Medina, A. (2013). Estudio preliminar de aproximación al concepto de límite de una función. *Theoria*, 21-31.
- Janvier, C. (1987) *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Jirotková, D., & Littler, G. (2003). Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 125-132.

- Jutter (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 407-431
- Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object? *CERME 6- Working Group 10*, 1771.
- Kidron, I. & Dreyfuss, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, vol 87, 297-321.
- Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 183-199.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación matemática*, 20(2), 65-89.
- Lacasta, E., & Wilhelmi, M.R. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.
- Lazcano, I., & Barolo, P. (1993). *Matemáticas 2º BUP*. Editorial Edelvives.
- Lestón, P. (2012). El infinito como evidencia de conflictos en discurso de los docentes. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1069-1077). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté.
- López, V., Sánchez, J.L. (1977). *2º Bachillerato. Matemáticas*. Editorial SM.
- Macías, J.A., Jiménez, A., Duarte, I., Sánchez, M.T., & Claros, F.J. (2017). Límite finito de una función en un punto: la componente numérico-vectorial para la clasificación de distintos perfiles fenomenológicos de profesores de matemáticas. En Codina, A (Coord.), Puig, L. (Coord), Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M., Baeza, M. A. (Eds). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico: 2017*. (pp.59-66) Madrid: Servicio de Publicaciones de la Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM.

- Martín, C., Petriz, F., & Miguel, S. (1987). *Matemáticas 4. Formación Profesional. Segundo Grado*. Editorial Edebé.
- Martín-Robles, I. (1936). *Elementos de Matemáticas (Cuarto curso)*. Madrid: Editorial Ministerio de Educación y Ciencia.
- Medina, A. (2001). *Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios*. Trabajo de grado (Maestría en Docencia de la Matemática). Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas.
- Medina, A., & Rojas, C. (2015). *Obstáculos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas: el caso del concepto de límite*. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 330-336). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Miranda, N., Navarro, C., & Maldonado, E. S. (2007). *Conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas relativos al Límite*.
- Mola, C.E., Sampedro, R., González, M., & Travieso, J. O. (2018). Sistema de tareas docentes para la formación del concepto derivada. *Revista paradigma*. V.39 (1), 267-281.
- Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17(3), 559-579.
- Monterrubio, M.C., & Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.
- Montes, M., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 5-20.
- Morales, A., Reyes, L.E., & Hernández, J.C. (2013). El límite al infinito. Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje. *Revista Premisa*. 15.3, 3-14.

- Movshovitz, N., & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 265-287.
- Navarro-Borrás, F., & Rios, S. (1944). *Curso preliminar de Análisis Matemático*. Madrid: Editorial Stylos.
- Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M., & Nevot, A. (1998). *Matemáticas 2*. Editorial Santillana.
- Olaya, A., Mondragón, K., López, V., & Villamil, M. (2013). *Una propuesta de enseñanza para los estudiantes de grado once del IED Paulo Freire sobre la noción de límite*.
- Ortega-Arcega, M. I., Pantoja-Rangel, R., Ulloa-Ibarra, J. T., & Zamora-Caloca, D. (2015). Secuencias Didácticas para el Aprendizaje de Límite y Continuidad de Una Variable Real. *Revista EDUCACONCIENCIA*, 7(8), 37-52.
- Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*, 1(2), 59-81.
- Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., & Otero, N., (1995). *Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura*. Argentina: Serie Eureka.
- Parada, S. E., Conde, L. A., & Fiallo, J. E. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. *Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 1031-1051.
- Parnafes, O., & Disessa, A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 251-280.
- Pérez Carranza, E. (1969). *Matemáticas sexto curso*. Editorial: Summa
- Pestana, D. et al (2007). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Ed. Ariel Ciencia.
- Piaget, J. (1969). *Science of education and the psychology of the child*. New York: Viking Press.
- Piaget, J. (1971). *Biology and Knowledge: An Essay on the Relations Between Organic Regulations and Cognitive Processes*. University of Chicago Press.
- Pozniak, E. (2000). *Fundamentos del Análisis Matemático*. Ed. MIR.

- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94.
- Radillo, M., & González, L. (2014). Propuestas para la enseñanza de las matemáticas. *Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura*, 853-861.
- Ramírez, J. (2004). Los profesores ante problemas paradójicos: una invitación a la reflexión. *Resúmenes de la 18ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Ramírez, A., Esteve, R., del Valle, F., Navarro, T., & Palomero, F. (1992). *Matemáticas - 2. BUP*. Editorial ECIR.
- Rey Pastor, J. (1969). *Análisis Matemático*. Ed. Kapelusz.
- Rey Pastor, J., de Castro Brzezicki, A. (1959). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Editorial SAETA.
- Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria*. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Madrid.
- Rico, L. (2000). Sobre la Noción de Representación y comprensión en la investigación en educación matemáticas. *Actas del IV Simposio de la SEIEM*, (pp. 1- 14). Huelva.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Ríos, S., & Rodríguez Sanjuan, A. (1966). *Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 199-232.
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación matemática*, 26(1), 73-101.
- Robert, A., & Schwarzenberger, R.L. (1991). Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. *Advanced mathematical thinking*. Dordrech: Kluwer.
- Robinet, J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3), 223-292.
- Rojas, C. J., Londoño, N. M., Cañate, D. E., Abuabara, R. N., & Pacheco, L. C. (2009). Efectos del uso de la tecnología computacional sobre la articulación de los sistemas de representación de la parábola en un grupo de alumnos. *Zona Próxima*, 10, 70-79.
- Romero, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. In *IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46). SEIEM. Huelva.
- Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 262-279). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE, México.
- Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 75-83.
- Salvador, S. (1971). *Matemáticas. Sexto curso*. Editorial ECIR.
- Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Departamento Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, Granada, España.

- Sánchez, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Departamento Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, Granada, España.
- Sánchez, C., & Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 073-84.
- Segovia, I., & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed): *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria*. (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1), 5-67.
- Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Sierra, M., González, M. T., & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Sierra, M., González, M. T., & López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.
- Spivak, M. (1991). *Calculus*. Barcelona. Ed. Reverté.
- Sureda, P., & Otero, M. R. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 6(1), 124-138.
- Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *Advanced mathematical thinking*. Dordrech: Kluwer.
- Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, 82, 44-49.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

- Terrise, M.D., Dávila, M. (1976). *Matemáticas. Curso 2º BUP*. Zaragoza. Editorial Librería Central.
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2015). Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 33(2), 157-171.
- Valdivé, C.M. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: El paso del infinito potencial al infinito “como un todo” para comprender la construcción de los conjuntos infinitos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19.
- Valls, J., Pons, J., & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 0325-338.
- Valverde, M., Llorca, A., del Rincón, R., Sánchez, E., Álvarez, M., Farrús, M., Roig, A., Martínez, P. (2015). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1*. Editorial Edebé.
- Villabona, D. P., & Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, 28(2), 119-150.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (1994). *Matemáticas. Algoritmo 2. BUP 2*. Editorial SM.
- Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (1996). *Ciencias de la Naturaleza y de la Salud-Tecnología. Matemáticas. 1º Bachillerato*. Editorial SM.
- Vizmanos, J. R., & Anzola, M. (2002). *Algoritmo 1: matemáticas aplicadas a las ciencias sociales: humanidades y ciencias sociales: Bachillerato*. Editorial SM.
- Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (2003). *Matemáticas 4º E.S.O.* Editorial. SM.
- Vizmanos, J.R., Hernández J., Alcalde F., Moreno M., & Serrano E. (2011). *2º Bachillerato*. Ed. SM.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-19.

- Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista mexicana de investigación educativa*, 1(1).
- Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. *Teaching and Learning Proof Across the Grades: a K-16 Perspective*. Routledge, pp. 323-338.
- Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741-750.

Anexos

Anexos

En los Anexos de esta tesis doctoral se encuentra aquella información que, por su extensión, no fue viable incluir en el desarrollo de cada uno de los capítulos. En éstos incluimos tres apartados.

En el primero de ellos, *A1*, encontramos la información de la consulta a expertos y las dificultades encontradas del término divergencia del Capítulo 4.

Posteriormente, presentamos el informe construido a partir del análisis minucioso de cada uno de los 35 libros de texto del Capítulo 5, *A2*.

Finalmente, en el último de los subapartados de los Anexos, *A3*, incluimos la información surgida de los debates del profesorado de Educación Secundaria en formación, aportando tanto los fragmentos en los que se apoyó dicho debate como las transcripciones y posteriores informes grupales e individuales.

A1. Anexos Capítulo 4. Consulta a expertos y divergencia.

En los diferentes subapartados de este anexo se encuentra la carta que, proporcionada a cada uno de los expertos, servía como explicación del estudio llevado a cabo; el Cuestionario 1; los comentarios y respuestas de los expertos al Cuestionario 1; el análisis del término divergencia en los manuales universitarios y libros de texto; el Cuestionario 2, y los comentarios y respuestas de los expertos al Cuestionario 2.

A1.1. Carta a expertos y preguntas al cuestionario

Estimado/a matemático/a

En el presente curso académico he iniciado el estudio fenomenológico del límite infinito de sucesiones. Es el comienzo de una tesis doctoral, dirigida por el doctor Javier Claros, del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

El trabajo tiene varios objetivos:

- Seleccionar al menos una definición de límite infinito de una sucesión cuya calidad de contenido y redacción sea bien aceptada por matemáticos experimentados. Con la definición o definiciones realizaremos estudios posteriormente.
- Comparar y relacionar dicha definición y los elementos que intervienen en ella con la de límite finito de una sucesión.

Dado que nuestro estudio partirá de la definición de límite infinito de sucesiones, hemos seleccionado 5 definiciones encontradas en libros de cálculo y libros de texto de Bachillerato, y solicitamos la ayuda de usted, como experto, para seleccionar la que considere más adecuada desde el punto de vista matemático.

Gracias por el tiempo dedicado a este cuestionario.

Un cordial saludo,

Mónica Arnal Palacián

Estudiante Doctorado 2014-2018, UCM

Nombre y Apellidos: _____

Institución: _____

Universidad: ☐

Instituto: ☐

Departamento: _____

A continuación se copian 5 definiciones de límite infinito de una sucesión.

Por favor, ordénelas, numerando del 1 al 5.

Convenios:

- 1) Ponga un "1" en la que considere más adecuada desde un punto de vista matemático, un "2" a la que siga en adecuación, etc., hasta llegar al "5", que se reservará para la menos adecuada.
- 2) Por favor, procure que no haya coincidencia en el número asignado a dos definiciones diferentes. Confiando en su pericia, reconocemos que este convenio es muy difícil de respetar
- 3) Atribuya un "0" a las redacciones que, en su opinión, no puedan considerarse como definiciones.

Gracias por su atención.

Tras la ordenación de las definiciones anteriores, responda las siguientes cuestiones:

- 1) Si ha atribuido un "0" a alguna de las redacciones presentadas, explique por qué no la considera una definición.

- 2) Si cree que hay alguna definición de límite infinito de una sucesión que no hemos incluido y a la que usted le asignaría sin duda la puntuación "1", enúnciela o anote la referencia donde encontrarla.

- 3) ¿Cuál es la definición que usa en su clase cuando tiene que explicar el límite infinito de una sucesión? Si no es una de las definiciones propuestas, cópiela aquí.

A1.2. Cuestionario 1

A continuación, se presenta el Cuestionario 1. Después de él aparecen las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones, pese a que no fueron mostradas a los expertos.

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
<p><u>Definición 1</u></p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ significa que, para todo número real A, se verifica que $a_n > A$ para todo n suficientemente grande.</p>	
<p><u>Definición 2</u></p> <p>Una sucesión real (x_n) es divergente y escribimos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ si para todo $k > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > k$ para todo $n \geq m$.</p>	
<p><u>Definición 3</u></p> <p>Diremos que $\{a_n\}$ tiene por límite $+\infty$, o que $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, y lo representamos mediante $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n > M, \forall n \geq n_0$.</p> <p>En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.</p>	
<p><u>Definición 4</u></p> <p>La definición $\{a_n\}$ diverge a infinito si para todo número M existe un entero N tal que para todo n mayor que N, $a_n > M$. Si se cumple esta condición, escribiremos $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ o $a_n \rightarrow +\infty$.</p>	
<p><u>Definición 5*</u></p> <p>Escribimos $x_n \rightarrow +\infty$ y decimos que la sucesión $\{x_n\}$ tiende a $+\infty$ si para cada $c \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, c) > 0$ para todo $n > N$.</p>	
<p><u>Definición 6</u></p> <p>Decimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$ si $n > N$.</p>	

Definición 1: Bradley, G.L., & Smith, K.L. (1998). *Cálculo de una variable*. Ed. Prentice Hall.

Definición 2: Díaz, J.M. (1998). *Introducción a la topología de los espacios métricos*. Ed. Universidad de Cádiz.

Definición 3: Baenas, T., & Martínez de Santiago, C. (2007). *Cálculo de variable natural*. Ed. Club Universitario.

Definición 4: Brinton, G. (2005). *Cálculo*. Ed. Pearson Education.

Definición 5: Zorich, V.A. (2004). *Mathematical Analysis I*. Ed. Springer. (Adaptación)

Definición 6: Pestana, D. (2007). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Barcelona. Ariel Ciencia.

* La definición del cuestionario es una adaptación y traducción de Zorich (2004). En dicha definición aparecía $x_n > c$. Al copiar dicha definición se cometió una errata ya que se había sustituido $x_n > c$ por $d(x_n, c) > 0$.

A1.3. Comentarios y respuestas de expertos a Cuestionario 1

En este subapartado se presentan los comentarios a cada una de las definiciones por parte de los expertos participantes en el Cuestionario 1.

Definición 1

Experto 1.1: “No dice $n \in \mathbb{N}$, ni que $a_n \in \mathbb{R}$, supongo que se podría deducir del “contexto””.

Experto 2.1: Utiliza la definición u otra similar en su clase cuando tiene que explicar el límite infinito de una sucesión.

Experto 4.1: “Deja incompleta la definición por faltar el caso $-\infty$ ”.

Experto 5.1: “En análisis standard no conozco definición más clara y sencilla que la 1ª. Creo, no obstante, que el análisis no standard es más intuitivo que el clásico”.

Experto 6.1: Para él es suficiente en Bachillerato.

Experto 8.1: Utilizaría esta definición en sus clases, aunque quizás la matizaría más.

Definición 2

Experto 1.1: “Incorrecta, $x_n = -n^2/(n+1)$ “diverge” a $-\infty$ y cumple la definición”.

Experto 2.1: “Sucesiones $\{a_n\}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ verifican la definición. Es una definición válida para divergentes en general, pero no para divergentes a $+\infty$. Ej. $a_n = -n$ ”.

Experto 3.1: “La sucesión $x_n = (-3)^n$ verifica la definición, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq +\infty$ ”.

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el límite sea $+\infty$ ”.

Experto 5.1: “Esta definición es de la sucesión divergente, no de la sucesión divergente positiva”.

Experto 8.1: “Queda definida la divergencia. ¿Y si tiende a $-\infty$?”

Experto 9.1: “La sucesión puede tender a menos infinito”.

Definición 3

Experto 1.1: “¿ $a_n \in \mathbb{R}$? ¿ $n \in \mathbb{N}$?” Considera que es redundante la afirmación: “En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente”.

Experto 2.1: “No tiene sentido, a mi juicio, una definición tan matemática como la 3ª en cursos de bachillerato, sí en 1º de cualquier Grado en Matemáticas, Física, Ingeniería, ...”

Experto 3.1: “El termino divergente es ambiguo, ¿cómo se denomina a $\{x_n\}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$?”

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el límite sea $+\infty$ ”

Definición 4

Experto 1.1: “¿M pertenece a qué conjunto? ¿Puede ser M complejo, por ejemplo? ¿ $n \in \mathbb{R}$? ¿ $n \in \mathbb{N}$?”

Experto 2.1: Definición correcta, pero considera que no tiene sentido $n \in \mathbb{Z}$. Afirma claramente $N \in \mathbb{N}$.

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el límite sea $+\infty$ ”

Experto 8.1: “El número M no sabemos a qué conjunto pertenece. ¿Y si no es real?”

Experto 9.1: “M podría ser un número complejo”.

Definición 5

Experto 1.1: “Incorrecta. Supongamos que, $x_n = 2n/(2n + 1)$. Sea $c \in \mathbb{R}$,

- Si no existe n_0 t. q. $x_{n_0} = c \rightarrow d(x_n, c) > 0 \forall n$

- Si $\exists n_0$ t. q. $x_{n_0} = c \rightarrow d(x_n, c) > 0 \forall n \neq n_0$

Por tanto, x_n propuesta cumple la definición $\forall n > n_0$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ”.

Experto 2.1: “Sucesiones $\{a_n\}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ verifican la definición. Es una definición válida para divergentes en general, pero no para divergentes a $+\infty$. Ej. $a_n = -n$ ”.

Experto 4.1: “La distancia siempre es positiva. Tal condición no define nada”.

Experto 5.1: “Es absurda. Tendría entre otras curiosas consecuencias la de que la sucesión $1/n$ tendría límite $+\infty$. De hecho, cualquier sucesión en la que no hubiera infinitos términos repetidos tendría este límite”.

Definición 6

Experto 1.1: “Innecesario $N \in \mathbb{R}$, sirve con $N \in \mathbb{N}$. Tampoco dice $n \in \mathbb{N}$ ni $a_n \in \mathbb{R}$ ”.

Experto 2.1: “Definición correcta, pero no tiene mucho sentido que $N \in \mathbb{R}$. Claramente $N \in \mathbb{N}$ ”.

Experto 4.1: “Deja incompleta la definición. Falta caso $-\infty$ ”.

En la tabla siguiente se muestran las respuestas de cada uno de ellos:

Tabla A.1. Recopilación respuestas al Cuestionario 1.

	Def. 1	Def. 2	Def. 3	Def. 4	Def. 5	Def. 6
Experto 1.1	1	0	1/2	1/3	0	1/4
Experto 2.1	1/2	0	1	1/5	0	1/6
Experto 3.1	1	0	0	1/4	1/2	1/3
Experto 4.1	1/6	0	0	0	0	1/6
Experto 5.1	1	0	1/2	1/3	0	1/4
Experto 6.1	1/4	1/3	1	1/2	1/6	1/3
Experto 7.1	1/5	1/4	1	1/2	1/6	1/3
Experto 8.1	1/5	0	1/2	0	1/4	1/3
Experto 9.1	1/3	0	1	0	1/4	1/2

A1.4. Divergencia. Análisis manuales universitarios y libros de texto.

Los manuales universitarios analizados han sido: Rey Pastor (1969), Spivak (1991), Linés (1983), Apostol (1989), Bartle y Sherbert (2000), Pozniak (2000) y Pestana (2007).

En el manual de Rey Pastor (1969), *Análisis Matemático*, el límite se encuentra después de la adquisición de los conocimientos adquiridos en los siguientes bloques: fundamentación del número racional, el número real y el número complejo, combinatoria y álgebra lineal, y algoritmo algebraico. Rey Pastor presenta dos límites distintos: límite aritmético, para sucesiones, y límite funcional.

En el límite aritmético, que es el que vamos a trabajar en este trabajo, se aborda la definición de límite finito de una sucesión para posteriormente presentar diferentes ejemplos, como se muestra a continuación:

1. Límites finitos e infinitos. — Se dice que una sucesión indefinida (§ 7-2) de números reales:
[20-1] $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$,
que indicaremos con $\{\alpha_n\}$, *tiende al límite* α , o *tiene el límite* α , o *converge* hacia α , si la diferencia $\alpha_n - \alpha$ llega a ser tan pequeña como se quiera en valor absoluto, tomando α_n bastante avanzado (cfr. § 7-2).

Figura A.1. Fragmento Rey Pastor (1969, p.273)

3. La sucesión
 $0,79, \quad 0,799, \quad 0,7999, \quad \dots,$
tiene por límite 0,8; pues la diferencia
 $0,8 - 0,799 \dots 9 = 0,000 \dots 1$
puede hacerse menor que cualquier número positivo tomando n bastante grande.

Figura A.2. Fragmento Rey Pastor (1969, p. 274)

Inmediatamente después se presenta la definición del límite infinito de una sucesión, considerándola que no tiene límite, acompañándola de tres ejemplos.

la sucesión no tiene límite según la definición anterior; pero generalizando el significado de esta palabra, diremos que *tiene límite infinito*, y escribiremos:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty, \quad \text{o bien: } \alpha_n \rightarrow \infty,$$

Figura A.3. Fragmento Rey Pastor (1969, p.274)

La última definición en presentarse es la de divergencia, que como se detalló mejor en el *Capítulo 4*, está estrechamente relacionada con la de límite infinito de una sucesión. Posteriormente se presentan distintas propiedades y definición de sucesiones particulares,

como son, por ejemplo, sucesiones contenidas en otra o sucesiones monótonas de números reales. Al final del capítulo se plantean 13 ejercicios de los diferentes límites utilizados y a realizar por el alumnado, en los que no se indica su solución.

Para el cálculo de límites hay otro capítulo, explicando los diferentes procesos: límite de suma o diferencia, límite de un producto, límite de logaritmos y potencias, límites indeterminados y finaliza con sucesiones de números complejos. Previo a abordar el límite de funciones, se muestran las series numéricas.

Sin embargo y pese a redactarse en la misma época que el anterior, en el manual de Spivak (1991), Cálculo Infinitesimal, el orden establecido para los límites es inverso al que establecía Rey Pastor (1969), ya que primero presenta el límite de funciones, para continuar con derivadas e integrales, y después el límite de sucesiones.

En este capítulo comienza por aproximaciones polinómicas utilizando el teorema de Taylor y posteriormente el número irracional e .

La primera vez que este manual presenta las sucesiones lo hace como una particularidad de las funciones, como se muestra en la Figura A.4

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es \mathbb{N} .

Figura A.4. Fragmento manual Cálculo Infinitesimal de Spivak (1991, p.613)

En cuanto al límite, solo define el límite finito de una sucesión, aquella sucesión que converge, y el resto de sucesiones las considera divergentes que no cumplen esa definición presentada. Posteriormente utiliza algunos ejemplos de límites infinitos de una sucesión, pero previamente no se han definido.

El comportamiento de la función logarítmica indica también que si $a > 1$, entonces a^n se hace arbitrariamente grande al hacerse n grande. Esta afirmación se escribe a menudo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty, \quad a > 1,$$

Figura A.5. Fragmento manual Cálculo Infinitesimal de Spivak (1991, p.618).

Es importante destacar que a lo largo de este manual se utiliza la notación de “infinito” para “más infinito”.

El capítulo finaliza con una colección de 33 ejercicios, sin mostrar su solución, previo a dar paso a las series infinitas.

Este amplio manual compuesto por 925 páginas, y dedicado exclusivamente al Análisis Matemático de una variable, no da un peso relevante al límite de sucesiones, al que dedica solamente 28 páginas, quizás motivado por la amplitud dada para funciones y su posterior generalización.

Por otra parte, encontramos el manual de Apostol (1989) *Calculus*, compuesto de dos tomos. En el primero de ellos, de 803 páginas, presenta el límite de una función en el capítulo de funciones continuas, y más de 300 páginas después define la noción de sucesión.

Este autor comienza introduciendo la noción de continuidad de forma intuitiva, para posteriormente definir el límite de una función en un punto utilizando diferentes sistemas de representación. Véase Figura A.6, Figura A.7 y Figura A.8.

3.2 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p , si bien no debemos insistir en que f esté definida en p . Sea A un número real. La igualdad

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$$

se lee: «El límite de $f(x)$, cuando x tiende a p , es igual a A », o « $f(x)$ tiende a A cuando x tiende a p ». También se escribe sin el símbolo de límite, como sigue:

$$f(x) \rightarrow A \text{ cuando } x \rightarrow p.$$

Figura A.6. Fragmento manual de Apostol (1989, p. 156).

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. *El simbolismo*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \quad [o \quad f(x) \rightarrow A \text{ cuando } x \rightarrow p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$(3.1) \quad f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \quad y \quad x \neq p.$$

Figura A.7. Fragmento manual de Apostol (1989, p. 157).

El símbolo $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$(3.2) \quad |f(x) - A| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Figura A.8. Fragmento manual de Apostol (1989, p. 158).

No llega a presentarse el límite en el infinito. Lo mismo ocurre con el límite de sucesiones, tanto finito como infinito. Las sucesiones son presentadas como paso previo a la noción de serie.

La palabra «sucesión» tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra «serie» se usa en un sentido completamente distinto. Aquí se estudiará el concepto de sucesión dejando el de serie para definirlo más tarde en el apartado 10.5.

Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n , entonces se dice que el conjunto ordenado

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un

Figura A.9. Fragmento manual de Apostol (1989, p. 462).

Ya más reciente es el manual de Bartle y Sherbert (2000), *Introduction to Real Analysis*, quienes siguen una estructura similar a la dada por Rey Pastor (1969). Los autores dedican un capítulo a las sucesiones y series, donde comienzan por la definición de sucesión y ejemplos, para posteriormente abordar los límites de una sucesión.

Para Bartle y Sherbert (2000), solo las sucesiones que tienen límite finito tienen límite, consideradas convergentes. El resto no lo tendrán, y serán consideradas divergentes.

3.1.3 Definition A sequence $X = (x_n)$ in \mathbb{R} is said to **converge** to $x \in \mathbb{R}$, or x is said to be a **limit** of (x_n) , if for every $\varepsilon > 0$ there exists a natural number $K(\varepsilon)$ such that for all $n \geq K(\varepsilon)$, the terms x_n satisfy $|x_n - x| < \varepsilon$.

If a sequence has a limit, we say that the sequence is **convergent**; if it has no limit, we say that the sequence is **divergent**.

Figura A.10. Fragmento manual de Bartle y Sherbert (2000, p. 54).

Los autores acompañan estas definiciones con teoremas demostrados y con ejemplos resueltos, con todo detalle. En casi todos ellos se trata de límites finitos de una sucesión. Es después de la presentación de diferentes teoremas, presentación de sucesiones monótonas, subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weierstrass, y Criterio de Cauchy, cuando los autores presentan más en detalle el límite infinito de una sucesión.

3.6.1 Definition Let (x_n) be a sequence of real numbers.

- (i) We say that (x_n) tends to $+\infty$, and write $\lim(x_n) = +\infty$, if for every $\alpha \in \mathbb{R}$ there exists a natural number $K(\alpha)$ such that if $n \geq K(\alpha)$, then $x_n > \alpha$.
- (ii) We say that (x_n) tends to $-\infty$, and write $\lim(x_n) = -\infty$, if for every $\beta \in \mathbb{R}$ there exists a natural number $K(\beta)$ such that if $n \geq K(\beta)$, then $x_n < \beta$.

We say that (x_n) is **properly divergent** in case we have either $\lim(x_n) = +\infty$ or $\lim(x_n) = -\infty$.

Figura A.11. Fragmento manual de Bartle y Sherbert (2000, p. 86).

Como ya hiciesen para el límite finito de una sucesión, acompañan la definición de límite infinito de una sucesión con algunos ejemplos y teoremas

(b) $\lim(n^2) = +\infty$.

If $K(\alpha)$ is a natural number such that $K(\alpha) > \alpha$, and if $n \geq K(\alpha)$ then we have $n^2 \geq n > \alpha$.

Figura A.12. Fragmento manual de Bartle y Shergert (2000, p. 87).

(c) If $c > 1$, then $\lim(c^n) = +\infty$.

Let $c = 1 + b$, where $b > 0$. If $\alpha \in \mathbb{R}$ is given, let $K(\alpha)$ be a natural number such that $K(\alpha) > \alpha/b$. If $n \geq K(\alpha)$ it follows from Bernoulli's Inequality that

$$c^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha.$$

Therefore $\lim(c^n) = +\infty$. □

Figura A.13. Fragmento manual de Bartle y Sherbert (2000, p. 87).

3.6.3 Theorem A monotone sequence of real numbers is properly divergent if and only if it is unbounded.

(a) If (x_n) is an unbounded increasing sequence, then $\lim(x_n) = +\infty$.

(b) If (x_n) is an unbounded decreasing sequence, then $\lim(x_n) = -\infty$.

Figura A.14. Fragmento manual de Bartle y Sherbert (2000, p. 87).

Para finalizar la sección, y que sean los estudiantes quienes los realicen, propone una colección de 10 ejercicios sin solución.

Pozniak (2000), en su manual *Fundamentos del Análisis Matemático*, siguen este mismo orden. Antes de definir el límite, presenta la noción de sucesión acompañada de algunos ejemplos, así como las operaciones que son posibles realizar con ellas. Al contrario que todos los manuales revisados hasta ahora, estos autores definen antes el límite infinito de una sucesión, que el límite finito de una sucesión.

Definición 1. Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina infinita si para cualquier número positivo A *) se puede indicar un número N **) tal que para $n \geq N$ todos los elementos x_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad $|x_n| > A$.

Figura A.15. Fragmento del manual traducido de Pozniak (2000, p.54).

Inmediatamente después presenta las sucesiones de límite 0, que denomina infinitesimales, y propiedades de estas con su correspondiente demostración. Además, establece una correspondencia entre límite 0 y límite infinito de una sucesión, a partir de realizar una inversión de todos sus términos.

Teorema 3.6. Si $\{x_n\}$ es sucesión infinita, entonces, partiendo de un número n , está definida la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ que es infinitesimal. Si todos los elementos de una sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ no son iguales a cero, entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinita.

Figura A.16. Fragmento del manual traducido de Pozniak (2000, p. 57).

Es a partir de la definición de sucesión infinitesimal cuando el manual presenta la definición de límite finito de una sucesión, y posteriormente seguir la misma estructura que en los casos anteriores.

Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina convergente si existe un número a tal que para cualquier número positivo ε se puede indicar un número N **) tal que, siendo $n \geq N$, todos los elementos x_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Figura A.17. Fragmento del manual traducido de Pozniak (2000, p. 58).

Por otra parte, se ha analizado una amplia muestra de libros de textos, que se presenta en el *Capítulo 5*. A continuación, se presenta un breve resumen de la propuesta didáctica que presentan los libros de texto siguientes, tomados de la muestra de dicho capítulo.

- Fuentes, Martínez, González y Jiménez (1977). *Matemáticas 2º BUP*. Ediciones Didascalía.
- Martín, Pétriz y Uceta (1987). *Matemáticas 4*. Ed. Edebé.
- Vizmanos y Anzola (1996). *Ciencias de la Naturales y de la salud - tecnología, matemáticas*. 1º Bachillerato. Ed. SM.
- Cólera y Oliveira (2009). *Matemáticas II. Bachillerato 2º*. Ed. Anaya.
- De la Prida, Gaztelu, González, Blanco, Pérez y Sánchez (2015). *Matemáticas I*. Ed. Santillana.

Libro Matemáticas 2º BUP. Ed. Didascalía

Fuentes et al. (1977) comienzan la unidad en la que se encuentra el límite infinito de una sucesión con la presentación de los objetivos generales, objetivos específicos, contenido y diagrama estructural. Presentan las sucesiones de números reales a partir de un ejemplo en los diferentes sistemas de representación, y su posterior definición. Introducen las operaciones con sucesiones a través de ejemplos y propiedades de las mismas. Posteriormente, se proponen diferentes ejercicios y problemas para ser representados sobre la recta, calculando los primeros términos y el término general.

El límite de una sucesión se introduce mediante sus nociones topológicas. La primera definición de límite de una sucesión que aparece es la de límite finito. El límite infinito no se define, pero sí se presentan algunos ejemplos, véase Figura A.18.

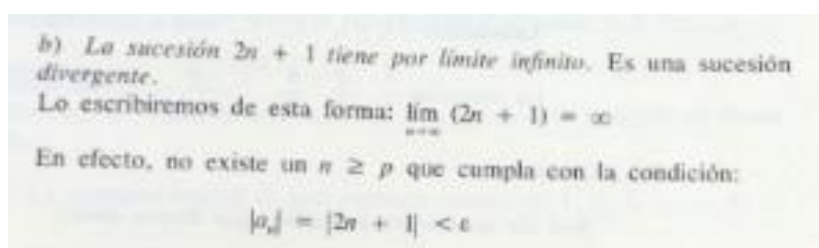


Figura A.18. Fragmento del libro de texto Fuentes et al. (1977, p. 23).

A continuación, se clasifican las sucesiones atendiendo a monotonía, acotación, convergencia y divergencia, y se estudian sus propiedades del límite de una sucesión. Después se abordan con el cálculo de límites donde aparece la adición, el producto, las potencias y las indeterminaciones. El capítulo finaliza con una propuesta de ejercicios y problema.

Libro Matemáticas 4. Ed. Edebé

Martín et al. (1987) comienzan la unidad con la presentación de las sucesiones de números reales a través de un breve contexto histórico, ejemplos de la vida real y diferentes notaciones utilizadas. Los autores continúan con la definición y ejemplos de los diferentes tipos de sucesiones: finitas y no finitas, crecientes y decrecientes, acotadas inferior y superiormente. Definen y acompañan de ejemplos las sucesiones convergentes y las sucesiones divergentes.

No todas las sucesiones de números reales tienen límite. Puedes comprobar que la sucesión

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

no tiene límite.

Observa que el valor de cada x_n , conforme crece n , también va creciendo indefinidamente.

Análogamente, la sucesión

$$3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$$

no tiene límite, y a partir del cuarto todos los términos x_n son menores que 0, por lo que decrece indefinidamente conforme crece n .

Figura A.19. Fragmento libro de texto Martín et al. (1987, p. 71).

Además, presentan una serie de aplicaciones de las sucesiones: operaciones, propiedades, realización de test psicotécnicos y principio de inducción completa. Finalizan la unidad con una colección de ejercicios y problemas propuestos.

Libro Ciencias de la Naturaleza y de la salud – tecnología, matemáticas. 1º Bachillerato. Ed. SM

Vizmanos y Anzola (1996) presentación de las sucesiones nulas, a partir de ejercicios resueltos y su definición. Posteriormente indican las sucesiones no nulas, en las que se incluyen las sucesiones con límite finito, a partir de ejercicios resueltos y su definición, exactamente igual que en el caso anterior.

Con el límite más infinito de una sucesión ocurre exactamente lo mismo, se presenta por primera vez a partir de un ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite más infinito de una sucesión. El sistema de representación utilizado es el tabular. A continuación, se define el límite más infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal. Los ejercicios resueltos concluyen el apartado de límite más infinito de una sucesión.

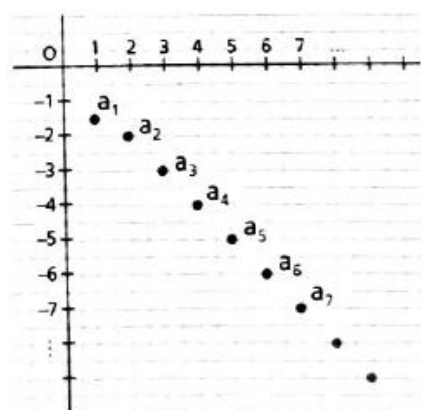
Una sucesión de números reales a_n tiene por límite $+\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n > K$.

Se escribe: $\lim a_n = +\infty$

Figura A.20. Fragmento libro de texto Vizmanos y Anzola (1996, p.160).

Los autores repiten la misma estructura para el límite menos infinito de una sucesión. Presentan un ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite menos infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular. A continuación, se define el límite

menos infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal. Los ejercicios resueltos concluyen el apartado de límite menos infinito de una sucesión.



Representación gráfica de la sucesión

$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

Si la sucesión tiende a $-\infty$, cualquier listón que pongamos, por bajo que sea, será superado por términos simplemente con formar uno suficientemente pequeño.

Figura A.21. Fragmento libro de texto Vizmanos y Anzola (1996, p.161).

La unidad finaliza con la presentación del número e y el ejemplo de la avaricia del usurero, y la introducción del límite de funciones a través de una idea intuitiva y de su definición.

Libro Matemáticas II. Bachillerato 2º. Ed. Anaya

Cólera y Oliveira (2009) presentan la noción de límite mediante un contexto histórico. Además, tratan el límite de funciones a partir de diferentes ejemplos de reflexión y resolución. El límite finito e infinito de una sucesión es presentado a partir de diferentes ejemplos.

$$b) b_{10} = \frac{100 - 10}{2} = 45, \quad b_{100} = \frac{10000 - 100}{2} = 4950, \quad b_{1000} = 499500$$

Observamos que el minuendo del numerador, n^2 , crece mucho más rápidamente que el sustraendo, n . Por tanto, la diferencia se hace tan grande como queramos, aunque la dividamos por 2.

Es decir, $\lim b_n = +\infty$.

Figura A.22. Fragmento libro de texto Cólera y Oliveira (2009, p.59).

Inmediatamente después definen el límite finito, límite más infinito y límite menos infinito de una sucesión en los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico. Continúan la unidad con ejercicios resueltos y propuestos de límite finito, límite más infinito y límite menos infinito de una sucesión y la presentación del número e .

Con la misma estructura que para el límite de sucesiones, definen los diferentes límites de una función en los sistemas de representación verbal y gráfico.

Los autores finalizan la unidad con la presentación de diferentes operaciones posibles con el límite de una función, acompañadas de ejercicios propuestos y ejercicios resueltos.

Libro Matemáticas I. Ed. Santillana

De la Prida et al (2015) comienzan definiendo las nociones de “sucesión”, “término de una sucesión” y “término general”, acompañados de ejemplos y ejercicios propuestos. Definen las sucesiones monótonas y acotadas, acompañadas de un ejemplo. También definen el límite de una sucesión acompañado de ejemplos de sucesiones de límite finito, sucesiones de límite infinito y sucesiones sin límite, concluyendo con una propuesta de ejercicios. Introducen la noción del cálculo de límites a partir del límite de potencias, límite de un polinomio, límite de un cociente de polinomios, todos ellos acompañados de ejemplos. Utilizan operaciones con límites, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos. Indican los distintos tipos de indeterminación, acompañados de ejemplos y ejercicios propuestos.

Además, en el mismo capítulo presentan el límite de una función en un punto, a partir de su definición, acompañada de una representación gráfica, ejemplos y ejercicios propuestos. Estudian las ramas infinitas, definiendo la noción y acompañándola de ejemplos y ejercicios propuestos. Para finalizar, estudian la continuidad de una función con la definición, ejemplos y ejercicios propuestos.

Cabe destacar en este libro de texto que cada apartado del capítulo finaliza con un punto titulado “Saber hacer” en el que se explica paso por paso cada uno de los límites y unos ejercicios complementarios.

calcular límites que presentan una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

► Calcula estos límites. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3}$

PRIMERO. Se determina si el límite presenta el tipo de indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)}{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-3n+1)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3} = \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3+5n^2)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+3)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

SEGUNDO. Se determina la mayor potencia de n , considerando que el exponente de las n que están bajo la raíz queda dividido entre el índice de la raíz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}} \rightarrow$ Mayor grado de $n = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3} \rightarrow$ Mayor grado de $n = \frac{3}{2}$

TERCERO. Se divide el numerador y el denominador entre la potencia de n calculada.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n-1}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n}}{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n+1}{n^3}}} = \frac{2}{0} = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{n^2+3}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{0}{1} = 0$

Figura A.23. Fragmento libro de texto de la Prida et al. (2015, p.229).

A1.5. Cuestionario 2

A continuación, se presenta el Cuestionario 2. Después de él aparecen las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones, pese a que no fueron mostradas a los expertos.

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
<p><u>Definición 1</u></p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ significa que, para todo número real A, se verifica que $a_n > A$ para todo n suficientemente grande.</p>	
<p><u>Definición 2</u></p> <p>Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K. La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K, existe un número natural v, tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$.</p>	
<p><u>Definición 3</u></p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$</p>	
<p><u>Definición 4</u></p> <p>El límite de una sucesión es ∞, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que s_n sea tan grande como queramos dándole a n valores suficientemente grandes.</p>	
<p><u>Definición 5</u></p> <p>Decimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$ si $n > N$.</p>	

Definición 1: Bradley, G.L., & Smith, K.L. (1998). *Cálculo de una variable*. Ed. Prentice Hall.

Definición 2: Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté.

Definición 3: Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcalde, F., Moreno, M., & Serrano, E. (2011). *2º Bachillerato*. Ed. SM.

Definición 4: Colera J., Olivera M.J., & Fernández S. (1997). *2º Bachillerato LOGSE*. Ed. Anaya.

Definición 5: Pestana, D. (2007). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Barcelona. Ariel Ciencia.

A1.6. Comentarios y respuestas de expertos a Cuestionario 2

En este subapartado se presentan los comentarios a cada una de las definiciones por parte de los expertos participantes en el Cuestionario 2.

Definición 1

Experto 2.2: “Nunca he tenido la oportunidad de explicar este tema a mis alumnos, pero en tal caso creo que usaría la definición que tuviera menos símbolos propios de la notación matemática, es decir, la definición número 1”.

Experto 5.2: No está expresada con rigor matemático.

Definición 2

Experto 6.2: “¿Qué significa ‘más infinito’ en un cuerpo ordenado K ? ¿Qué tipo de orden hay en K ?”

Definición 3

Experto 1.2: La utilizada en sus clases para explicar el límite infinito de una sucesión.

Experto 2.2: “Creo que al a hora de definir un nuevo concepto matemático se debería evitar el uso del \Leftrightarrow ”.

Experto 4.2: La utilizada en sus clases para explicar el límite infinito de una sucesión.

Definición 4

Experto 1.2: “El límite infinito puede ser positivo o negativo. La definición 4 no es precisa.

$x_n = (-n^2)$ tiene límite infinito y no cumple la segunda parte de la definición porque $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$.

Que una sucesión sea divergente, no implica que tenga que serlo positivamente. Es claro que si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ ó $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ entonces $\{x_n\}$ es divergente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, $x_n = [(-1)^n \cdot n]$ es divergente pero no diverge positivamente y tampoco negativamente”.

Experto 2.2: “Creo que a la hora de definir un nuevo concepto matemático se debería evitar el uso de \Leftrightarrow ”.

Experto 3.2: “En secundaria utilizaría la definición 4”.

Experto 5.2: “No está expresada con rigor matemático”.

Experto 6.2: “¿ $\zeta^\infty = +\infty$? ¿ $\zeta^\infty = -\infty$?”.

Definición 5

Experto 5.2: La utiliza en bachillerato para explicar el límite infinito de una sucesión.

En la tabla siguiente se encuentran las respuestas al Cuestionario 2 de los expertos que dieron lugar a la selección de la Definición 2 para el estudio posterior.

Tabla A.2. Recopilación respuestas al Cuestionario 2.

	Def. 1	Def. 2	Def. 3	Def. 4	Def. 5
Experto 1.2	1/4	1/2	1	0	1/3
Experto 2.2	1/2	1	0	0	1/3
Experto 3.2	1/3	1	1/2	1/4	1/5
Experto 4.2	1/3	1/2	1	1/4	1/5
Experto 5.2	0	1	1/3	0	1/2
Experto 6.2	1/3	0	1	0	1/2
Subtotales	7/4	4	23/6	1/2	31/15

A2. Anexos Capítulo 5. Informes de los libros de texto.

Los anexos correspondientes al Capítulo están compuestos por el informe de cada uno de los 35 libros de texto analizados. En estos informes se encuentra la ficha del libro de texto, la secuenciación de la unidad didáctica donde se ubica el límite infinito de una sucesión, los fenómenos encontrados, la ficha fenomenológica y unos comentarios finales.

A2.1. Informe de LSI93001

Ficha libro

Código	LSI93001		
Título	Elementos de matemáticas		
Autor	Martín Robles, I.		
Año	1936	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia		

Secuenciación LSI93001

1. Definición de variable numérica para presentar la noción de sucesión, acompañada de un ejemplo.
2. Definición de sucesión creciente, decreciente y oscilante.
3. Definición de crecimiento indefinido y crecimiento infinito.
4. Presentación de diferentes ejemplos de sucesiones con crecimiento indefinido y crecimiento infinito.
5. Definición de infinitamente pequeño e infinitamente grande.
6. Definición de límite finito de una sucesión, acompañada de un ejemplo.
7. Definición de límite superior y límite inferior.

Fenómenos encontrados

LSI93001.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal				LSI93001.01		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero las definiciones e inmediatamente después uno o varios ejemplos de cada una de las nociones relacionadas con las sucesiones de números reales. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, de hecho, esta notación no aparece durante el capítulo, sino que encontramos la noción en uno de los ejemplos presentados de crecimiento indefinido e infinito. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Idea de límite”. En esta unidad se presentan las nociones siguientes: las sucesiones y sus diferentes tipos de crecimiento, infinitamente pequeño e infinitamente grande, el límite finito de una sucesión, y el límite superior e inferior, sumando un total de 5 páginas. De éstas, tres líneas las dedica al límite infinito de una sucesión.

La presentación de la noción de límite infinito de una sucesión solo presenta un ejemplo y no llega a realizarse una definición intuitiva ni formal.

El libro de texto no propone ningún ejercicio para ser realizado por parte del alumnado.

A2.2. Informe de LSI93002

Ficha libro

Código	LSI93002		
Título	Matemáticas		
Autor	Baratech Montes, B., Zalama Miguel, C.		
Año	1938	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia		

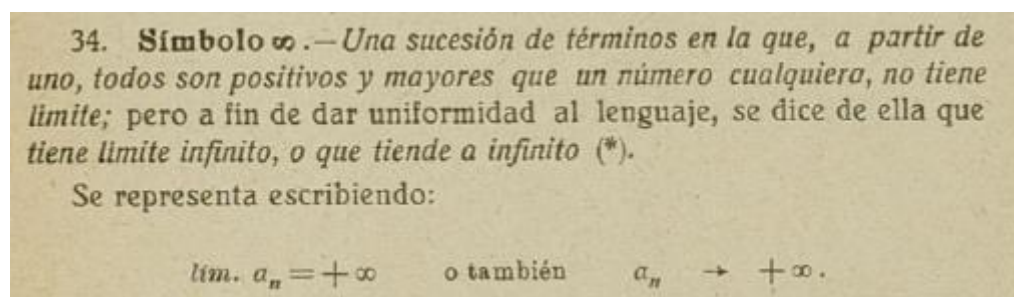
Secuenciación LSI93002

1. Definición de límite finito de una sucesión, acompañada de un ejemplo.
2. Definición de infinitésimo.
3. Definición de límite más infinito y menos infinito de una sucesión.
4. Definición de sucesiones convergentes, divergente y oscilantes
5. Presentación de diferentes teoremas donde está involucrada las nociones de unicidad, acotación y monotonía, todas ellas acompañadas de algunos ejemplos.

Fenómenos encontrados

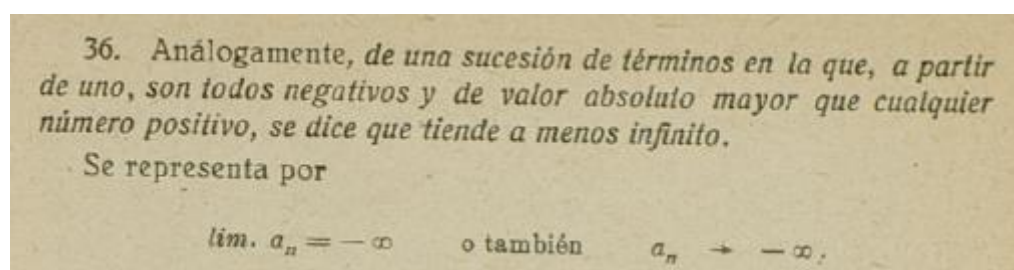
LSI93002.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.



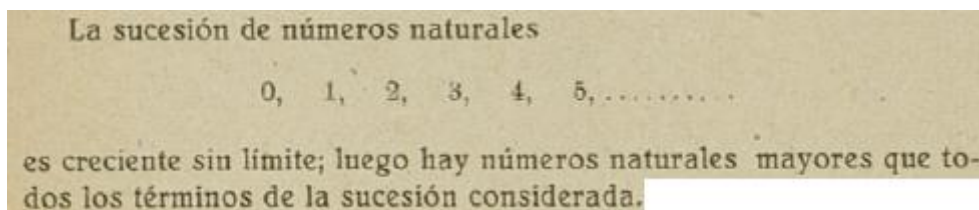
LSI93002.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.



LSI93002.03 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI93002.01	LSI93002.03	LSI93002.02	
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero las definiciones de las siguientes nociones: límite finito de una sucesión, infinitésimo, límite más infinito y menos infinito de una sucesión, sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes, e inmediatamente después algunos ejemplos. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, pero tiene un peso importante en la unidad. Se presentan tanto definiciones como un ejemplo de esta noción. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Límite de una sucesión de números reales”. En esta unidad se presentan las nociones siguientes: el límite finito de una sucesión, los infinitésimos, el límite más y menos infinito de una sucesión y teoremas que involucran la unicidad, la acotación y la monotonía, sumando un total de 5 páginas. De éstas, una página la dedica al límite infinito de una sucesión.

El libro de texto, como ya sucediese en otros de esta etapa histórica, no propone ningún ejercicio para ser realizado por parte del alumnado.

A2.3. Informe de LSI94001

Ficha libro

Código	LSI94001		
Título	Curso preliminar de Análisis Matemático		
Autor	Navarro Borrás, F., Ríos, S.		
Año	1944	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Stylos		

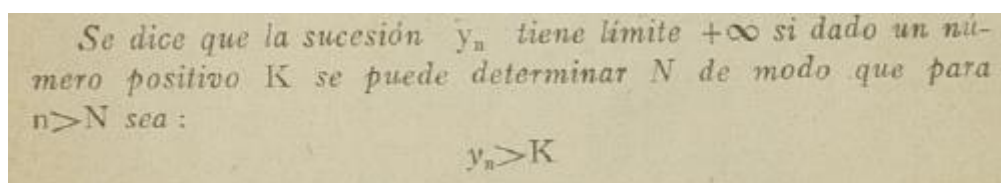
Secuenciación LSI94001

1. Definición y ejemplos de sucesión numérica.
2. Representación gráfica sobre una recta y sobre el eje cartesiano de diferentes sucesiones.
3. Definición de acotación y monotonía.
4. Propiedades de sucesiones infinitésimas, acompañadas de diferentes ejemplos y ejercicios propuestos.
5. Definición de sucesión convergente, acompañada de diferentes ejemplos.
6. Definición de sucesión con valor absoluto infinito, acompañada de diferentes ejemplos.
7. Definición de sucesión oscilante, acompañada de diferentes ejemplos.
8. Definición de sucesión con límite más y menos infinito, acompañadas de diferentes ejemplos y ejercicios propuestos.
9. Propiedades de los límites y su cálculo, tanto para límites finitos como infinitos.
10. Criterios de convergencia, límites indeterminados y diferentes teoremas.
11. Órdenes infinitesimales y de infinitud.
12. Aplicación de la integral al cálculo de límites.
13. Conjuntos de números, conjuntos lineales y conjuntos numerables.

Fenómenos encontrados

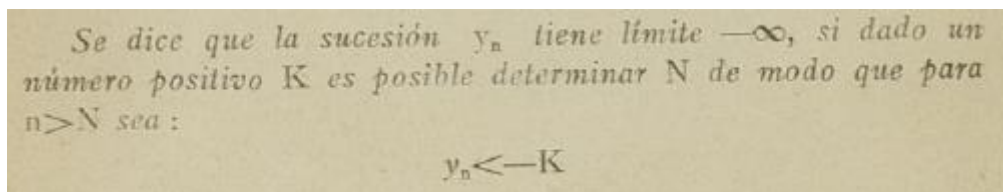
LSI94001.01 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.



LSI94001.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI94001.01 LSI94001.02					
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero las definiciones e inmediatamente después uno o varios ejemplos de cada una de las nociones y ejercicios propuestos para ser realizados por el alumnado. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, ya que se encuentra con el resto de los límites. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones numéricas”. En esta unidad se presentan las nociones siguientes: sucesiones numéricas, acotación, monotonía, infinitésimos, límite finito, límite infinito y sucesiones oscilantes, sumando un total de 44 páginas. De éstas, solamente media página la dedica al límite infinito de una sucesión. Además, hay que destacar que la unidad dedica buena parte de su espacio a diferentes teoremas.

A2.4. Informe de LSI95001

Ficha libro

Código	LSI95001		
Título	Matemáticas Sexto curso		
Autor	Cenzano, J.		
Año	1958	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Nuevas gráficas		

Secuenciación LSI95001

1. Ejemplo y definición del límite infinito de una sucesión.
2. Ejemplo y definición de sucesiones acotadas.
3. Ejemplo y definición de las sucesiones con límite 0.
4. Ejemplo y definición de límite finito de una sucesión.
5. Operaciones y teoremas sobre los límites.
6. Operaciones con números reales.
7. Colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI95001.01.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

1. LIMITE INFINITO.—Consideremos, por ejemplo, la sucesión

$$\frac{1}{d} \quad \frac{2}{d} \quad \frac{3}{d} \quad \frac{4}{d} \quad \dots \quad \frac{n}{d}$$

de las fracciones cuyo denominador es un número entero d .

En efecto, si suponemos que el término buscado es el de lugar n , para que sea

$$\frac{n}{d} > M \quad \text{basta que sea} \quad n > M \times d$$

LSI95001.01.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Vamos a ver que este crecimiento es tal que, *fijado un número positivo M , tan grande como se quiera*, se puede determinar un número de la sucesión tal que él, y todos los que le siguen, sean mayores que M .

LSI95001.01.03 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

tomando para n el primer valor natural mayor que $M \cdot d$, el término n/d de la sucesión dada será mayor que M , y también lo serán todos los términos que le siguen, porque la sucesión dada es creciente.

LSI95001.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Ejemplo: Si la sucesión es $1/5, 2/5, 3/5, \dots, n/5, \dots$, y $M=100$, como $100 \cdot 5 = 500$, resulta que el término de la sucesión que ocupa el lugar 501, o sea $501/5$ y todos los que le siguen son mayores que 100.

LSI95001.03 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

El hecho de que los términos de la sucesión dada, al crecer el índice n indefinidamente, pueden llegar a ser mayores que cualquier número positivo, tan grande como se quiera, se expresa diciendo que la sucesión dada *tiende a infinito o que tiene por límite a infinito*, de acuerdo con la siguiente

LSI95001.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

DEFINICIÓN.—Se dice que una sucesión de números reales positivos, tiene por límite a infinito o que tiende a infinito, cuando fijado un número positivo M tan grande como se quiera, se puede determinar un término de la sucesión tal que él y todos los que le siguen sean mayores que M .

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI95001.01.02 LSI95001.04	LSI95001.01.01 LSI95001.01.03 LSI95001.02	LSI95001.03			
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero los ejemplos y después una definición de cada una de las nociones. El límite infinito de una sucesión tiene un apartado propio, de hecho, el capítulo empieza con él. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Los límites y los números reales”. En esta unidad se presentan las nociones siguientes: el límite infinito de una sucesión, las sucesiones infinitésimas y el límite finito de una sucesión, además de las operaciones y teoremas sobre los límites, sumando un total de 7 páginas. De éstas, 1,5 páginas las dedica al límite infinito de una sucesión.

La presentación de la noción de límite infinito de una sucesión intercala definiciones y ejemplos, todas ellas en el sistema de representación verbal. Además, es relevante destacar que el capítulo comienza con el límite infinito de una sucesión, para después presentar el límite finito de una sucesión, sin realizar ninguna apreciación previa.

El libro de texto cuenta con una colección final de ejercicios propuestos a realizar por parte del alumnado.

A2.5. Informe de LSI95002

Ficha libro

Código	LSI95002		
Título	Elementos de Matemáticas		
Autor	Rey Pastor, J., de Castro Brzezicki, A.		
Año	1959	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	SAETA		

Secuenciación LSI95002

1. Definición y ejemplos de la noción de sucesión de números reales.
2. Definición de límite finito de una sucesión acompañada de ejemplos.
3. Definición de límite infinito de una sucesión, sin especificar el signo. A continuación, se define el límite más y menos infinito, los cuales están acompañados por ejemplos.
4. Propiedades de los límites finitos.
5. Definiciones de sucesiones contenidas en otra y sucesiones monótonas.
6. Definición de sucesiones oscilantes.
7. Cálculo de límites: paso al límite y diferentes operaciones.
8. Cálculo de límites indeterminados.
9. Sucesiones de términos complejos.
10. Colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI95002.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Si desde un cierto término en adelante son todos positivos, y se verifica:
 $\alpha_n > A, \alpha_{n+1} > A, \alpha_{n+2} > A, \dots$
 diremos, precisando más, que el límite es $+\infty$.

LSI95002.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Si desde un cierto término son todos negativos, y se verifica [1. 2], diremos que el límite es $-\infty$.
 $|\alpha_n| > A, |\alpha_{n+1}| > A, |\alpha_{n+2}| > A, \dots$ [1. 2]

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI95002.01		LSI95002.02	
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero las definiciones de cada una de las nociones y posteriormente se presentan algunos ejemplos para algunas de ellas, no para todas. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, ya que el libro lo enmarca dentro de uno que contiene todo tipo de límite de sucesiones. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones numéricas”. En ella encontraremos la presentación de la noción de sucesión de números reales, los distintos tipos de límites, su cálculo, y finalmente sucesiones de términos complejos, sumando un total de 23 páginas. De éstas, solamente poco más de media lo dedica al límite infinito de una sucesión.

La primera definición de límite infinito que presenta el libro de texto no es la que se ha considerado en esta investigación, ya que considera los términos de la sucesión en valor absoluto, pudiendo obtener lo que se ha considerado como una sucesión oscilante. Posteriormente se define el límite más infinito y el límite menos infinito en un sistema de representación verbal, presentando un ejemplo para cada uno de ellos.

En el libro de texto se presenta primero el límite finito de una sucesión, y posteriormente el límite infinito de una sucesión. Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar la unidad.

A2.6. Informe de LSI96001

Ficha libro

Código	LSI96001		
Título	Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica.		
Autor	Ríos, S., Rodríguez Sanjuan, A.		
Año	1966	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia		

Secuenciación LSI96001

1. Ejemplos de sucesiones de números racionales y posterior definición de las nociones sucesión y término general.
2. Nuevo ejemplo acompañado de su representación gráfica.
3. Definición de sucesión infinitésima e introducción a la noción de entorno, acompañada de un ejemplo.
4. Ejemplo y posterior definición de límite finito de una sucesión. Posteriormente se presentan otros ejemplos.
5. Definición de límite más y menos infinito de una sucesión a partir de una definición de límite infinito de una sucesión sin signo acompañadas de un único ejemplo.
6. Definición y un ejemplo de sucesiones oscilantes.
7. Propiedades de los límites.
8. Definiciones de acotación y monotonía, acompañadas de diferentes ejemplos.

Fenómenos encontrados

LSI96001.01.01 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

II. SUCESIONES DIVERGENTES. EL SÍMBOLO ∞ . La sucesión y_n se dice **divergente o que tiene límite infinito**, si dado un número K arbitrariamente grande, desde un valor de n en adelante, se tiene:

$$|y_n| > K,$$

Se representa así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Si es $y_n > K$, se dice que el límite es $+\infty$,

LSI96001.01.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

II. SUCESIONES DIVERGENTES. EL SÍMBOLO ∞ . La sucesión y_n se dice divergente o que tiene límite infinito, si dado un número K arbitrariamente grande, desde un valor de n en adelante, se tiene:

$$|y_n| > K,$$

Se representa así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

en el caso de ser $y_n < -K$,

el límite es $-\infty$.

LSI96001.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Ejemplos. 1. La sucesión

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

tiene límite $+\infty$, pues $2n > K$ para $n > \frac{K}{2}$,

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI96001.01.01 LSI96001.01.02	LSI96001.02				
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro en ocasiones se encuentran primero las definiciones y después algunos ejemplos, y en otras ocasiones viceversa. El límite infinito de una sucesión se encuentra en el apartado que lleva por título “Infinitésimos”, donde se encuentran todos los tipos de límites de sucesiones. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Nociones sobre límites”. En ella se encuentran las nociones de sucesión de números racionales, los distintos tipos de límites y sus propiedades, y la

acotación y la monotonía, sumando un total de 8 páginas. De éstas, media se dedica al límite infinito de una sucesión.

La primera definición de límite infinito que presenta el libro de texto no es la que se ha considerado en esta investigación, por utilizar valores absolutos, pero casi de forma inmediata se presenta el límite más y menos infinito.

En el libro de texto se presentan los diferentes tipos de límite en el siguiente orden: límite finito, límite infinito y sucesiones oscilantes. Durante toda la unidad no se plantea ningún ejercicio para ser realizado por el alumnado, ya que este manual es donde se encuentran cada una de las lecciones y existe otro volumen para ejemplos y ejercicios tanto propuestos como resueltos.

A2.7. Informe de LSI96002

Ficha libro

Código	LSI96002		
Título	Matemáticas sexto curso		
Autor	Pérez Carranza, E.		
Año	1969	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	Summa		

Secuenciación LSI96002

1. Definición y diferentes ejemplos de sucesiones de números racionales.
2. Definición y diferentes ejemplos de sucesiones infinitésimas.
3. Propiedades de las sucesiones infinitésimas.
4. Definición y ejemplos de límite finito de una sucesión.
5. Propiedades de las sucesiones con límite finito.
6. Definiciones y teoremas acerca de las nociones de acotación y monotonía.
Posteriormente se presentan algunos ejemplos.
7. Definición y ejemplos de límite infinito de una sucesión.
8. Colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI96002.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Infinitos.—Una sucesión indefinida u_n cuyos términos son, desde uno de ellos en adelante, mayores que cualquier número positivo g , arbitrariamente grande, se dice que es un *infinito* o *infinitamente grande* positivo; también se dice con más propiedad que *tiende a infinito*, y se expresa así:

$$u_n \rightarrow +\infty$$

LSI96002.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

2) La sucesión $s_n = 10^n$ es otro infinito positivo. Pues dado un número positivo, arbitrariamente grande (tal como el de habitantes de la Tierra), basta poner en s_n valores de n iguales a 10, 11, 12, ..., para obtener valores de s_n iguales a 10^{10} , 10^{11} , (que, según la Geografía, son mayores que el de seres humanos).

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI96002.01	LSI96002.02		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se presentan primero las definiciones de las diferentes nociones y después se acompañan de algunos ejemplos. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, como tampoco lo tienen ninguna de las nociones que se encuentran en la unidad. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Nociones sobre límites”. En ella se encuentran las nociones de sucesión de números racionales, los distintos tipos de límites y sus propiedades, sumando un total de 10 páginas. De ellas, se dedica media página aproximadamente al límite infinito de una sucesión.

El límite infinito de una sucesión se presenta al final de la unidad, inmediatamente después de las sucesiones monótonas acotadas. Después, se encuentra una colección de ejercicios propuestos para ser realizados por el alumnado, único lugar de la unidad dedicado a ello.

A2.8. Informe de LSI97001

Ficha libro

Código	LSI97001		
Título	Matemáticas. Sexto curso		
Autor	Salvador, S.		
Año	1971	Ley en vigor	Ley Moyano
Editorial	ECIR		

Secuenciación LSI97001

1. Introducción a la noción de sucesiones de números racionales.
2. Definición de infinitésimo para introducir la noción de límite.
3. Diferentes ejemplos de límite finito con su correspondiente representación sobre la recta real.
4. Definición de las nociones de convergencia, monotonía y acotación.
5. Definición de sucesiones con límite infinito, sin especificar signo, utilizando un enfoque formal.
6. Definición de sucesiones con límite más infinito y menos infinito.
7. Colección final de ejercicios a resolver por parte del alumnado con su correspondiente solución (sin resolución).

Fenómenos encontrados

LSI97001.01 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Si se verifica: $a_n > M > 0$, para $n \geq v$, se dice que a_n tiene por límite $+\infty$.

LSI97001.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Si se verifica: $-a_n > M > 0$, el límite es $-\infty$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI97001.01 LSI97001.02					
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran primero las definiciones o primer acercamiento a cada una de las nociones y posteriormente se presentan algunos ejemplos. El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, ya que el libro está estructurado en pequeñas unidades. El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Nociones sobre límites”. En ella encontraremos la presentación de sucesiones, acotación, monotonía, límite finito de una sucesión y límite infinito de una sucesión, sumando un total de 7 páginas. De éstas, solamente 1 trata el límite infinito de una sucesión.

La primera definición de límite infinito que presenta el libro de texto no es la que se ha considerado en esta investigación, ya que no diferencia el posible signo del infinito, pudiendo obtener una sucesión oscilante. Posteriormente se presenta una definición para el límite más infinito y otra para el límite menos infinito en un sistema de representación simbólico, sin presentar ningún ejemplo.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la presentación del límite finito de una sucesión.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar la unidad. El que corresponde a una sucesión con límite infinito se indica que debe ser realizado sobre un eje de coordenadas cartesianas.

A2.9. Informe de LSI97002

Ficha libro

Código	LSI97002		
Título	Matemáticas. Curso 2º BUP.		
Autor	Terrise, M.D., Dávila, M.		
Año	1976	Ley en vigor	LGE
Editorial	Librería Central		

Secuenciación LSI97002

1. Definición, desde un enfoque formal, del límite finito de una sucesión, acompañada de un ejemplo.
2. Explicación teórica utilizando la representación gráfica del límite finito de una sucesión.
3. Propiedades del límite finito de una sucesión.
4. Definición de sucesiones acotadas.
5. Más propiedades de sucesión convergente y sucesión acotada.
6. Definición de las sucesiones con límite infinito, sin especificar su signo.
7. Ejemplos de límite infinito.
8. Definiciones, desde un enfoque intuitivo, del límite más y menos infinito de una sucesión.
9. Definición de sucesiones oscilantes.
10. Colección de ejercicios resueltos y posteriormente colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI97002.01.01 i.v.s.i. (v-e) y LSI97002.01.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento dos ejemplos del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, uno de ellos para el caso más infinito y otro para menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Las sucesiones:

a) $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

b) $-1, -2, -2^2, -2^3, -2^4, \dots$

son infinitos. Si tomamos $A = 10$, el quinto término de cada una de ellas y todos los que le siguen son, en valor absoluto, mayores que A . Si $A = 50$, la condición se verifica a partir de $p = 7$. Si $A = 1.000$, $p = 11$, etc.

LSI97002.02.01 c-i.i. (v-d) y LSI97002.02.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento dos definiciones de los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado y decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

Si una sucesión $\{a_n\}$ es un infinito y tiene, desde un cierto lugar en adelante, todos sus términos $\begin{cases} \text{positivos} \\ \text{negativos} \end{cases}$ se dice de ella que es un infinito $\begin{cases} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{cases}$ y se escribe, respectivamente:

$$\lim a_n = +\infty \quad \lim a_n = -\infty$$

LSI97002.03 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

5. La sucesión $a_n = \frac{n^2 + 2}{n}$ es un infinito. ¿Desde qué lugar son sus términos mayores de 50?

Solución:

$$\frac{n^2 + 2}{n} > 50 \Rightarrow n^2 + 2 > 50n \Rightarrow n^2 - 50n + 2 > 0$$

Si x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$) son las raíces de la ecuación $n^2 - 50n + 2 = 0$, según la teoría de inequaciones, la desigualdad anterior se verificará para todo $n < x_1$ y para todo $n > x_2$. Para que se cumpla desde un cierto lugar en adelante tomaremos como valor de p el menor número natural mayor que x_2 . Siendo $x_1 = -0.04 \dots$ y $x_2 = 49.95 \dots$, las raíces de esta ecuación, será $p = 50$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal		LSI97002.01.01 LSI97002.01.02 LSI97002.03	LSI97002.02.01		LSI97002.02.02	
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Límite de sucesiones”. En ella encontraremos el límite finito de una sucesión, el límite infinito de una sucesión y las sucesiones oscilantes, sumando un total de 11 páginas de presentación, de las que solo 1 corresponde al límite infinito de una sucesión.

En este libro se encuentran primero las definiciones y teoremas, para posteriormente presentar diferentes ejemplos. Un caso excepcional es el límite infinito de una sucesión, donde primero se define un límite que nosotros no hemos considerado, aquel que utiliza el valor absoluto y que considera sucesiones oscilantes, posteriormente presenta tres ejemplos y finalmente se define el límite más infinito y el límite menos infinito de una sucesión.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la presentación del límite finito de una sucesión, e inmediatamente después las sucesiones oscilantes.

Los ejercicios resueltos y planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar la unidad. Uno de los ejercicios resueltos es un límite infinito de una sucesión que es resuelto desde un enfoque formal, mientras que el ejercicio propuesto está planteado de la misma forma que éste.

A2.10. Informe de LSI97003

Ficha libro

Código	LSI97003		
Título	2º Bachillerato. Matemáticas		
Autor	Guillén, J., Navarro, R., Peña, J.A., Ferrer, S.		
Año	1976	Ley en vigor	LGE
Editorial	Magisterio Español		

Secuenciación LSI97003

1. Introducción a la noción de sucesión de números reales a partir de su definición y diferentes ejemplos.
2. Definiciones de acotación y monotonía acompañadas de diferentes ejemplos.
3. Definición de límite finito de una sucesión acompañada de un ejemplo. Posteriormente se proponen una serie de cuestiones y ejercicios.
4. Definición de sucesión nula, como caso particular de sucesión con límite finito. Posteriormente se encuentra una serie de cuestiones y ejercicios.
5. Definición de sucesión con límite infinito, sin especificar signo.
6. Posteriormente se definen las sucesiones con límite más y menos infinito acompañadas de un ejemplo para menos infinito. Además se proponen una serie de cuestiones y ejercicios.
7. Colección de problemas de recapitulación, donde posteriormente se indican las respuestas.

Fenómenos encontrados

LSI97003.01.01 c-i.i. (v-d) y LSI97003.01.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento dos definiciones del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado y el decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

En una sucesión con límite infinito, si a partir de cierto término todos son positivos diremos que tiende a infinito positivo; si a partir de cierto término todos son negativos, que tiende a infinito negativo;

LSI97003.02.01 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

El término general de la sucesión es $3n - n^2 = n(3 - n)$; esta última manera de escribirlo permite ver en seguida que basta que n sea mayor que 3 para que el correspondiente término sea negativo. A partir de $n = 4$, pues, el valor absoluto de los términos será igual a $n^2 - 3n = n(n - 3)$.

LSI97003.02.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Siendo k un número positivo arbitrariamente grande, se deberá tener:

$$n(n-3) > k \quad (1)$$

Ahora bien, es evidente que, por grande que sea k , siempre podremos elegir n_0 de modo que se cumplan simultáneamente las dos desigualdades que siguen, para $n \geq n_0$:

$$\begin{cases} n > k \\ n-3 > 1 \end{cases}$$

Al multiplicar entre sí estas dos desigualdades, resulta (1), de modo que el límite infinito queda demostrado. Como todos los términos, desde el cuarto en adelante, son negativos, podremos precisar más, y poner:

$$\lim \{3n - n^2\} = -\infty$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal		LSI97003.02.02	LSI97003.01.01		LSI97003.01.02	LSI97003.02.01
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones de números reales”. En ella encontramos la definición de sucesión, acotación, monotonía, el límite finito de una sucesión y el límite infinito de una sucesión, sumando un total de 10 páginas de presentación, de las que 1.5 corresponde al límite infinito de una sucesión.

Se encuentran primero las definiciones y posteriormente se presentan los ejemplos. Previamente al límite infinito de sucesiones, se sitúa la exposición del límite finito de una sucesión. Posteriormente solo se presenta una colección de problemas recapitulativos finales.

Como sucede en otros libros de texto de esta década, el límite infinito de una sucesión es presentado por una definición que no se ha considerado en este estudio, por incluir las sucesiones oscilantes en $+\infty$ y $-\infty$ como sucesiones de límite infinito, por la consideración de la definición de sucesión divergente correspondiente.

A2.11. Informe de LSI97004

Ficha libro

Código	LSI97004		
Título	2º Bachillerato. Matemáticas.		
Autor	López, V., Sánchez, J.L.		
Año	1977	Ley en vigor	LGE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI97004

1. Definición de una sucesión de números reales, acompañada de un ejemplo.
2. Determinar una sucesión a partir de un término general.
3. Definición del anillo de las sucesiones de números reales.
4. Definición de monotonía y acotación.
5. Definición de límite finito de una sucesión acompañada de dos ejemplos.
6. Definición y ejemplos de intervalos y entornos en la recta real.
7. Interpretación geométrica del límite de una sucesión.
8. Definición de límite infinito de una sucesión, sin especificar el signo. Finalmente se menciona que puede ser más y menos infinito. Presentación posterior de dos ejemplos.
9. Clasificación de las sucesiones por su límite en convergentes, divergentes y oscilantes.
10. Definición y propiedades de las sucesiones nulas.
11. Propiedades de límites.
12. Colección de ejercicios resueltos y posteriormente colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI97004.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

1. Una sucesión tiene por término general $5n^2 - 45$. a) Escribir los términos de lugar 2º y 6º.
b) ¿Existe algún término de la sucesión que sea nulo? c) ¿Cuál es su límite?

- El límite de la sucesión es **infinito**, ya que siendo K un número arbitrariamente grande, a partir de un término de lugar p , suficientemente avanzado, dicho término y los siguientes se mantienen superiores a K.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal				LSI97004.01		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesión de números reales. Límite de sucesiones”. En ella encontramos un contenido matemático avanzado como son la definición de grupo abeliano y anillo. Apenas se presentan ejemplos, ya que el libro de texto está enfocado a una explicación más teórica. La unidad está compuesta por un total de 14 páginas de presentación, de las que solo 0.5 corresponde al límite infinito de una sucesión, y no con la particularidad de este estudio.

Se encuentran primero las definiciones y posteriormente se presentan los ejemplos, dejando ejercicios propuestos para el alumnado solo al final de la unidad.

El límite infinito de sucesiones se encuentra inmediatamente después del límite finito, pero no llega a ofrecerse la definición de límite infinito de una sucesión tal y como la consideramos en este estudio. Esto ocurre de igual forma con otros libros de texto de esta década. No se establece diferencia en la definición para el límite más y menos infinito, sino que se presenta de forma conjunta, por la consideración de la definición de sucesión divergente correspondiente.

A2.12. Informe de LSI97005

Ficha libro

Código	LSI97005		
Título	Matemáticas 2º.		
Autor	Etayo, J., Cólera, J., Ruiz, A.		
Año	1979	Ley en vigor	LGE
Editorial	Anaya		

Secuenciación LSI97005

1. Introducción a las sucesiones a partir de un ejemplo real conocido para el alumnado.
2. Definición de la noción de sucesión, acompañada de un ejemplo en diferentes sistemas de representación.
3. Estudio de algunas sucesiones. A partir de su término general se generan diferentes términos de la sucesión, para acercarse a la noción de límite.
4. Definición y ejemplos de puntos de acumulación (el libro de texto utiliza punto de aglomeración).
5. Definiciones de límite finito de una sucesión acompañadas de diferentes ejemplos.
6. Definiciones, expresadas de diferentes maneras, del límite más y menos infinito, acompañadas de un ejemplo.
7. Colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI97005.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Los términos de (t_n) pueden hacerse *tan grandes como queramos*. Decimos que *tiende a infinito* y ponemos $t_n \rightarrow +\infty$.

LSI97005.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

$$(s_n) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cualquiera que sea el número } k \text{ (y por grande que lo tomemos)} \\ \text{podemos encontrar un número natural, } n_0, \text{ de modo que} \\ \text{si } n > n_0 \text{ entonces } s_n > k. \end{array} \right.$$

LSI97005.03 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

(Es decir, seremos capaces de encontrar un término de la sucesión a partir del cual todos los siguientes sean mayores que cualquier número prefijado, k .)

LSI97005.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

$$(s_n) \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cualquiera que sea el número } k \text{ (y por grande que lo tomemos)} \\ \text{podemos encontrar un número natural, } n_0, \text{ de modo que} \\ \text{si } n > n_0 \text{ entonces } s_n < -k. \end{array} \right.$$

LSI97005.05 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

$$(s_n) \rightarrow \infty \text{ si cualquiera que sea el número } k \text{ podemos encontrar un número natural, } n_0, \text{ de modo que si } n > n_0 \text{ entonces } s_n > k.$$

LSI97005.06 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

$$(s_n) \rightarrow -\infty \text{ si cualquiera que sea el número } k \text{ podemos encontrar un número natural } n_0 \text{ de modo que si } n > n_0 \text{ entonces } s_n < -k.$$

LSI97005.07.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

1. La sucesión (s_n) $s_n = 3n^2 - 5$ es divergente y tiende a $+\infty$. Veamos a partir de qué término son mayores que 5.584 todos los siguientes.
[Es decir, dado $k = 5.584$, buscamos un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $s_n > 5.584$]

LSI97005.07.02 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

Veámoslo:
 $3n^2 - 5 > 5.584 \Leftrightarrow 3n^2 > 5.589 \Leftrightarrow n^2 > 5.589/3 = 1.863 \Leftrightarrow n > \sqrt{1.863} = 43. \dots$
 $n_0 = 43$, pues si $n > 43$ entonces $s_n > 5.584$.

LSI97005.07.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

Si hubiéramos tomado un número cualquiera, k , en lugar de 5.584, sería:

$$3n^2 - 5 > k \Leftrightarrow 3n^2 > k + 5 \Leftrightarrow n^2 > (k + 5)/3 \Leftrightarrow n > \sqrt{(k + 5)/3}$$

Sería n_0 cualquier número entero igual o mayor que esa raíz cuadrada.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI97005.02 LSI97005.04 LSI97005.05 LSI97005.06	LSI97005.07.01	LSI97005.01 LSI97005.03			
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico		LSI97005.07.02 LSI97005.07.03				

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Límite de sucesiones”. A lo largo de la unidad se presentan ejemplos intercalados en la teoría, descritos con rigurosidad. La unidad está compuesta por un total de 15 páginas de presentación, de las que 1.5 corresponde al límite infinito de una sucesión, utilizando diferentes definiciones y un ejemplo. Además, quiere destacarse que 4 páginas están dedicadas a una colección de ejercicios propuestos a realizar por el alumnado.

En este libro se encuentran primero las definiciones y posteriormente se presentan los ejemplos, dejando ejercicios propuestos para el alumnado solo al final de la unidad. Además, queremos destacar que algunas definiciones están repetidas. Esto sucede en aquellas nociones matemáticas que los autores consideran más importantes. Para ellas utilizan el espacio de la página correspondiente habitual y además una parte del margen para poder recuadrar la definición y destacarla sobre el resto del contenido.

El límite infinito de sucesiones se encuentra inmediatamente después del límite finito. Al contrario de lo que sucedía con el resto de los libros de la década, en esta ocasión sí se ofrece una definición para el límite más infinito y menos infinito. Además, utiliza para ello varios enfoques distintos: intuitivo y formal.

A2.13. Informe de LSI98001

Ficha libro

Código	LSI98001		
Título	Matemáticas 2º BUP. Proyecto Ariadna.		
Autor	González, A., González, J., Laborda, M.		
Año	1986	Ley en vigor	LGE
Editorial	AKAL		

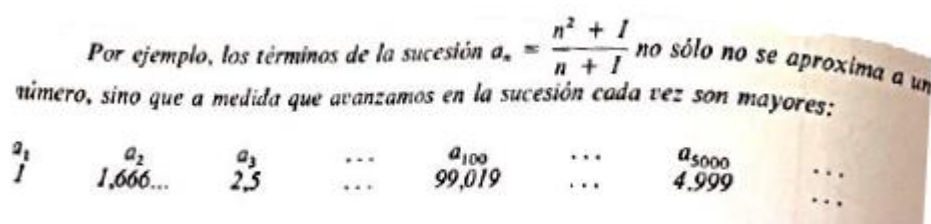
Secuenciación LSI98001

1. Introducción a la idea de sucesión a partir de la realización de un mosaico.
2. A partir de ejemplos se introducen las nociones de término general y recurrencia.
3. En los siguientes ejemplos se presentan sucesiones en diferentes sistemas de representación: verbal, tabular y gráfico.
4. Primera idea de la noción de límite a partir de ejemplos.
5. Definición de límite finito desde un enfoque intuitivo y acompañada de ejemplos.
6. Nueva definición de límite finito utilizando un enfoque formal y el sistema de representación simbólico.
7. Ejemplos desarrollados paso a paso de límite finito de una sucesión.
8. Ejemplo de límite infinito de una sucesión y posteriormente la presentación de una definición desde un enfoque intuitivo y posteriormente formal.
9. Ejemplos de límite infinito de una sucesión.
10. Definición de límite menos infinito de una sucesión.
11. Definición de monotonía y acotación, acompañadas de ejemplos.
12. Operaciones con sucesiones y límites.
13. Número e.
14. Colección de ejercicios propuestos a modo de recapitulación y síntesis.

Fenómenos encontrados

LSI98001.01.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.



LSI98001.01.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Observa que pueden ser mayores que cualquier número. Basta con tomar el valor de n adecuado.

LSI98001.02 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Una sucesión es divergente a $+\infty$ si, fijado un número cualquiera, existe un término de la sucesión a partir del cual todos son mayores que ese número.

LSI98001.03.01 i.v.s.i. (v-d) y LSI98001.03.02 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento dos definiciones del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal y simbólico.

En términos matemáticos:

Fijado un número cualquiera	$\forall M \in \mathbb{R}$
Existe un término	$\exists K \in \mathbb{N}$
Tal que	/
A partir de él	$\forall n > K$
Todos son mayores que el número ..	$a_n > M$

LSI98001.04 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{N} / \forall n > K, a_n > M$$

LSI98001.05.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Vamos a utilizar la definición para demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 10) = +\infty$. Dado un número M , tenemos que encontrar el término a_k a partir del cual todos son mayores que M , es decir, $a_n > M$, o también, $n^2 + 10 > M$.

Resolviendo la inecuación:

$$n^2 > M - 10 \quad : \quad n > \sqrt{M - 10}$$

Luego basta con tomar n mayor que $\sqrt{M - 10}$.

LSI98001.05.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

= 70,63 y, por tanto, a partir del término 70 ($k = 70$) todos son mayores que 5000. Si $M = 5.000$, entonces $\sqrt{5.000} - 10 =$

LSI98001.06.01 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Existen también sucesiones cuyos términos se van haciendo cada vez más pequeños, pudiendo ser inferiores a cualquier número. Por ejemplo, la sucesión $w_n = 6 - 2n$.

$w_1, w_2, \dots, w_{200}, \dots, w_{500}, \dots$
 $4, 2, \dots, -394, \dots, -994, \dots$

LSI98001.06.02 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Veamos si hay algún término menor que -2.500 :

$$w_n < -2.500 \quad ; \quad 6 - 2n < -2.500 \quad ; \quad -2n < -2.500 - 6 \quad ; \quad 2.506 < 2n$$

despejando n : $n > 1.253$. Por tanto, para n mayor que 1.253, o también a partir del término w_{1253} todos son menores que -2.500 .

LSI98001.07 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Una sucesión es divergente a $-\infty$, si fijado un número cualquiera, existe un término de la sucesión a partir del cual todos son menores que ese número.

LSI98001.08.01 i.v.s.i. (v-d) y LSI98001.08.02 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento dos definiciones del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal y simbólico.

En términos matemáticos:

Fijado un número cualquiera	$\forall M \in \mathbb{R}$
Existe un término	$\exists K \in \mathbb{N}$
Tal que	/
A partir de él	$\forall n > K$
Todos son menores que el número ..	$a_n < M$

LSI98001.09 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{N} / \forall n > K, a_n < M$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c.i.i.		d.i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI98001.03.01 LSI98001.08.01	LSI98001.05.01	LSI98001.02	LSI98001.01.01 LSI98001.01.02 LSI98001.05.02	LSI98001.07	LSI98001.06.01 LSI98001.06.02
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico	LSI98001.03.02 LSI98001.04 LSI98001.08.02 LSI98001.09					

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones”. En ella encontraremos la presentación de sucesiones, límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión, acotación y monotonía, sumando un total de 26 páginas. De éstas, 2 presentan el límite infinito de una sucesión y 3 el límite finito de una sucesión. A los ejercicios planteados a modo de recapitulación y síntesis se reservan 4 páginas.

En este libro se encuentran primero los ejemplos asociados a cada una de las nociones y posteriormente se presentan las definiciones, algunas de ellas en diferentes sistemas de representación.

El límite infinito de una sucesión se sitúa inmediatamente después del límite finito de una sucesión, y antes de las nociones de acotación y monotonía. Además, el libro de texto proporciona una variedad de ejemplos y definiciones desde enfoques intuitivos y formales, y la utilización de los sistemas de representación verbal y simbólico.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar la unidad.

A2.14. Informe de LSI98002**Ficha libro**

Código	LSI98002		
Título	Matemáticas. 2º BUP.		
Autor	Benedicto, C., Negro, A.		
Año	1987	Ley en vigor	LGE
Editorial	Alhambra		

Secuenciación LSI98002

1. Comienzo de la unidad con la definición y ejemplos de las siguientes nociones: valor absoluto, distancia, intervalos y entornos.
2. Definición y ejemplos de la noción de sucesión.
3. Ejemplos de límite finito de una sucesión, para finalmente realizar su definición.
4. Ejemplos de límite infinito de una sucesión, para finalmente realizar su definición.
5. Ejemplos de sucesiones oscilantes.
6. Finalización de la unidad con una colección de ejercicios resueltos y propuestos.

Fenómenos encontrados**LSI98002.01 c-i.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Estudiamos ahora la sucesión $a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Observamos que:

- a) La sucesión no tiene límite finito como las estudiadas hasta ahora.
- b) Los términos de la sucesión se hacen tan grandes como queramos. Por grande que sea el número en que estemos pensando, siempre será rebasado por todos los términos de la sucesión a partir de un cierto término.

LSI98002.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

El número «un millón» es bastante grande. A pesar de eso es fácilmente superado por nuestra sucesión. Si calculas a_{1000} ya obtienes $1000^2 = 1000000$.

$a_{1001} = 1002001$ y los términos van siendo cada vez mayores. Es decir: a partir del término a_{1000} (sin contar a a_{1000}) los términos se hacen mayores de un millón.

Lo mismo sucede si cogemos un billón o cualquier otro número por grande que sea.

LSI98002.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

El límite de la sucesión a_n es $+\infty$ cuando para cualquier número positivo M que tomemos, por grande que sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos que le siguen son mayores que M .

LSI98002.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

El límite de la sucesión b_n es $-\infty$ cuando para cualquier número positivo M que tomemos, por grande que sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos que le siguen son menores que $-M$.

LSI98002.05 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

EJEMPLO 11

Comprobemos que $b_n = -n^2$ cumple esta definición.

Queremos que los términos de la sucesión sean menores que $-M$ (siendo M un número positivo cualquiera).

Para ello basta que los términos que cogemos ocupen un lugar de $n > \sqrt{M}$.

Por ejemplo si $M = 1.000.000$, $\sqrt{M} = 1000$

$b_{1000} = -1000000$ que es igual que $-M$

$b_{1001} = -1002001 < -1000000.$

LSI98002.06 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

10. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n^2 + 1}{4}$ tiende a $+\infty$.

La sucesión es $\frac{2}{4}, \frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{17}{4}, \dots$

Hay que probar que si $M > 0$, existe un término a partir del cual

$$a_n > M \quad \frac{n^2 + 1}{4} > M \quad ; \quad n^2 + 1 > 4M \quad ; \quad n^2 > 4M - 1 \quad ; \quad n > \sqrt{4M - 1}$$

Luego todos los términos a_n , correspondientes a un lugar $n > \sqrt{4M - 1}$ son mayores que M .

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI98002.03 LSI98002.04	LSI98002.05 LSI98002.06		LSI98002.01 LSI98002.02		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

Los límites de sucesiones se encuentran en la unidad “Sucesiones. Límite de sucesiones”. Lo que nos ocupa, límite infinito de sucesiones, es un subapartado bajo el título de sucesiones divergentes. La unidad cuenta con un total de 18 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos, sin proponer ningún ejercicio para el alumno. En las 2 últimas, se reserva este espacio para que el alumno resuelva los ejercicios y problemas propuestos. De las 16 páginas que intercalan teoría y ejercicios resueltos, el límite infinito de una sucesión solo ocupa poco más de una. El resto de la unidad es ocupado por: conceptos básicos (3 páginas), clasificación y ejemplos de tipos de sucesiones (4 páginas), límite finito de sucesiones (1 páginas), sucesiones oscilantes (1 página), mientras que los ejercicios resueltos ocupan el resto.

Las sucesiones con límite infinito se presentan a partir de dos ejemplos. En el primero de ellos se identifica el fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado, mientras que en el

segundo se identifica el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito. Posteriormente se define dicho límite, para más infinito, utilizando el sistema de representación verbal. En el caso del límite menos infinito existe una modificación en su presentación. Primero se realiza la definición, análoga a la anterior, y se concluye con un ejemplo, en el que se identifica el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito. No se identifica el análogo para el fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado.

Al final de la unidad, se encuentran algunos ejercicios resueltos, donde se identifica de nuevo el fenómeno de ida y vuelta para sucesiones de límite infinito, para más infinito.

Previo al límite infinito de sucesiones, el libro de texto presenta el límite finito de una sucesión, con su definición y posteriores ejemplos.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan únicamente al final de la unidad, sin intercalar la teoría con los ejercicios propuestos.

A2.15. Informe de LSI98003

Ficha libro

Código	LSI98003		
Título	Matemáticas. Factor-2		
Autor	Álvarez, F., García, C., Garrido, L.M. y Vila, A.		
Año	1987	Ley en vigor	LGE
Editorial	Vicens-vives		

Secuenciación LSI98003

1. Definición de una sucesión como un caso particular de función.
2. Ejemplos en los que determinar el término general, o bien diferentes términos.
3. Representación de sucesiones sobre un diagrama cartesiano y lineal.
4. Definición de sucesiones monótonas, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
5. Definición del límite finito de una sucesión a partir del límite de una función, acompañada de un ejemplo.
6. Definición del límite finito e infinito de una sucesión, sin la utilización de funciones, y colección de ejercicios resueltos.
7. Propiedades de los límites y ejercicios resueltos.
8. Finalización de la unidad con la introducción del número e y sus aplicaciones en los límites, junto a ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI98003.01.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento de una definición el fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Una sucesión a_n tiene límite $+\infty$ cuando sus términos se hacen tan grandes como queramos, con tal de prolongar suficientemente la sucesión.

LSI98003.01.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento de una definición el fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Si los términos crecen ilimitadamente en valor absoluto, pero son negativos, se dice que el límite es $-\infty$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI98003.01.01		LSI98003.01.02	
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad “Sucesiones”, apareciendo de forma casi testimonial. La unidad cuenta con un total de 16 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos y ejercicios resueltos y propuestos para el alumnado. El límite infinito de una sucesión ocupa algo menos de una página. Tiene gran peso la resolución de ejercicios, utilizando en buena parte de ellos el sistema de representación gráfico.

Las sucesiones con límite infinito se presentan a partir de una definición en la que se identifican los fenómenos intuitivos, inmediatamente después de definir el límite finito de una sucesión.

Pese a que algunos de los ejercicios resueltos de límite finito de una sucesión están debidamente justificados, no ocurre lo mismo para el límite infinito, para el que solo se muestra la solución, sin procedimiento. En consecuencia, no se detectan ejemplos de ninguno de los fenómenos caracterizados.

En este libro de texto se intercala las definiciones, los ejemplos y los ejercicios resueltos y propuestos, dejando únicamente al final de la unidad una recapitulación del tipo de ejercicios ya preguntados con anterioridad.

Previo al límite de sucesiones, el libro de texto presenta el límite de una función en un punto y las funciones continuas, siendo utilizado para el límite de una sucesión como caso particular del anterior.

A2.16. Informe de LSI98004

Ficha libro

Código	LSI98004		
Título	Matemáticas 4. Formación Profesional/Segundo Grado.		
Autor	Martín, C., Petriz, F., Miguel, S.		
Año	1987	Ley en vigor	LGE
Editorial	Edebé		

Secuenciación LSI98004

1. Primera idea de la noción de sucesión a partir de diferentes contextualizaciones científicas.
2. Construcción de una sucesión a partir de su término general.
3. Definiciones de sucesión finita e infinita, sucesiones monótonas y sucesiones acotadas. Cada una de estas definiciones acompañadas de diferentes ejemplos.
4. Definición de sucesión convergente acompañada de un ejemplo.
5. Ejemplo de sucesión de límite infinito para posteriormente realizar su definición. El término utilizado es el de sucesión divergente.
6. Presentación de las diferentes operaciones posibles con las sucesiones y posteriormente algunas de las propiedades de límite. Todas ellas acompañadas de ejemplos.
7. Presentación del principio de inducción completa.
8. Colección final de ejercicios y problemas propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI98004.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

No todas las sucesiones de números reales tienen límite. Puedes comprobar que la sucesión

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

no tiene límite.

Observa que el valor de cada x_n , conforme crece n , también va creciendo indefinidamente.

LSI98004.02 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Análogamente, la sucesión

$$3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$$

no tiene límite, y a partir del cuarto todos los términos x_n son menores que 0, por lo que decrece indefinidamente conforme crece n .

LSI98004.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión es divergente a $+\infty$ si, dado cualquier número K (por grande que sea), existe un término en la sucesión tal que todos los siguientes son mayores que K .

LSI98004.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión es divergente a $-\infty$ si, dado cualquier número K (por grande que sea), existe un término en la sucesión tal que todos los siguientes son menores que $-K$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI98004.03 LSI98004.04			LSI98004.01		LSI98004.02
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad “Sucesiones. Concepto de límite”. La unidad cuenta con un total de 14 páginas, de las que las 10 primeras intercalan la teoría y los ejercicios resueltos, sin llegar a proponer ningún ejercicio. En las 4 últimas, el alumno encuentra los ejercicios y problemas propuestos. De las 10 páginas que

intercalan teoría y ejercicios resueltos, solamente media página es de límite infinito de sucesiones. El resto de la unidad es ocupado por: conceptos básicos (2.5 páginas), clasificación y ejemplos de tipos de sucesiones (3 páginas), límite finito de sucesiones (0.5 páginas), aplicaciones de las sucesiones (3.5 páginas).

La noción de límite infinito es presentada a partir de dos ejemplos, el primero de ellos con límite más infinito y el segundo con límite menos infinito. Posteriormente se definen, de manera formal, los límites más y menos infinito de una sucesión. Al final de la unidad, se encuentran algunos ejercicios propuestos a resolver por parte del alumno.

Este libro de texto sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la definición y dos ejercicios resueltos del límite finito de una sucesión. Además, cabe destacar que los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan únicamente al final de la unidad, sin intercalar la teoría con los ejercicios propuestos.

A2.17. Informe de LSI98005

Ficha libro

Código	LSI98005		
Título	Matemáticas 2 Bachillerato.		
Autor	Belmonte, J.M., Montero, G., Negro, A., Pérez, S., Sierra, T.		
Año	1989	Ley en vigor	LGE
Editorial	Alhambra		

Secuenciación LSI98005

1. Definición de sucesión de números reales acompañada de diferentes ejemplos, entre ellos la sucesión de Fibonacci.
2. Definición de monotonía.
3. Representaciones gráficas en el eje cartesiano y la recta real de dos ejemplos de sucesiones.
4. Ejemplo, utilizando la representación gráfica, y posterior definición con un enfoque formal, del límite finito de una sucesión.
5. Planteamiento de distintas problemáticas y posterior ejemplo.
6. Ejemplo, utilizando la representación gráfica, y posteriores definiciones de límite más y menos infinito de una sucesión.
7. Número e .
8. Teoremas que relacionan la monotonía y la convergencia.
9. Procedimientos de cálculo de límites.
10. Colección de ejercicios propuestos a realizar por los alumnos.

Fenómenos encontrados

LSI98005.01.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.

Estudiemos ahora la sucesión de término general.



Como ves, esta sucesión crece de tal modo que «parece perderse en el infinito», o más concretamente, los términos de la sucesión se hacen tan «grandes» como queramos.

LSI98005.01.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Tomemos un número cualquiera, por ejemplo, 5.000.

Puedes comprobar que en esta sucesión a partir de un término, todos son mayores que 5.000 (en concreto $a_{71} = 5.112$).

LSI98005.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Pero esto va a ocurrir con cualquier cantidad que yo tome, es decir, dado $k > 0$ va a existir un término de la sucesión a partir del cual, todos los términos que le siguen son mayores que esa cantidad positiva k :

Entonces decimos que esa sucesión tiende a $+\infty$.

LSI98005.03 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

De esta forma, se dice que $\lim a_n = +\infty$ si se cumple. Dado $k > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} / a_n > k, \forall n \geq m$.

LSI98005.04 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$\lim a_n = -\infty$, si se cumple
Dado $k < 0$, $\exists m \in \mathbb{N} / a_n < k, \forall n \geq m$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI98005.02			LSI98005.01.02		
	Gráfico				LSI98005.01.01		
	Tabular						
	Simbólico	LSI98005.03 LSI98005.04					

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones y límites”. En ella encontraremos la presentación de sucesiones, límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión, acotación y monotonía, sumando un total de 18 páginas. De éstas, solo una presenta el límite más y menos infinito de una sucesión,

mientras que el límite finito de una sucesión ocupa algo más del doble. A los ejercicios planteados a modo de recapitulación y síntesis se reservan 4 páginas.

Este libro intercala los ejemplos y las definiciones. Para algunas nociones utiliza primero las definiciones y después los ejemplos, mientras que para otras utiliza el orden inverso. En el caso de los límites, primero se presenta la idea a partir de un ejemplo y posteriormente se utilizan diferentes definiciones.

El límite infinito de una sucesión se sitúa inmediatamente después del límite finito de una sucesión, y antes del número e .

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumno se ubican únicamente al finalizar la unidad.

A2.18. Informe de LSI99001**Ficha libro**

Código	LSI99001		
Título	Matemáticas - 2. BUP		
Autor	Ramírez, A., Esteve, R., del Valle, F., Navarro, T., Palomero, F.		
Año	1992	Ley en vigor	LGE
Editorial	ECIR		

Secuenciación LSI99001

1. Primer acercamiento a la idea de la noción de límite de una sucesión a partir de una definición intuitiva de límite finito.
2. Ejemplos de límite finito de una sucesión en el sistema de representación gráfico y verbal.
3. Definición precisa y formal del límite finito de una sucesión.
4. Representaciones gráficas que acompañan en la comprensión de la noción de límite finito de una sucesión.
5. Más ejemplos de límite finito de una sucesión en diferentes sistemas de representación.
6. Colección de ejercicios propuestos de límite finito de una sucesión.
7. Propiedades de las sucesiones convergentes acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
8. Diferentes definiciones, desde un enfoque tanto intuitivo como formal, del límite más infinito de una sucesión acompañadas de ejemplos en diferentes sistemas de representación.
9. Colección de ejercicios propuestos de límite infinito de una sucesión.
10. Definición y ejemplos de sucesiones oscilantes.
11. Colección de ejercicios propuestos finales a modo de recapitulación.

Fenómenos encontrados**LSI99001.01 i.v.s.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Ya puedes imaginar que no toda sucesión tiene límite finito o, dicho de otra forma, que no toda sucesión es convergente. Basta con que consideres la sucesión de los números naturales, $a_n = n$, en la cual puedes ver que dado un número K cualquiera siempre es posible encontrar un número natural de manera que él y todos los posteriores sean mayores que K .

LSI99001.02 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Intuitivamente, decir que una sucesión a tiene por límite más infinito significa que los términos a_n de la sucesión llegan a ser, a partir de uno de ellos, mayores que cualquier número positivo K , por muy grande que éste sea.

LSI99001.03 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = -14; \quad a_2 = -26; \quad a_3 = -36; \quad a_4 = -44$$

pueden hacerte pensar que la sucesión a es decreciente, pero esto es falso pues:

$$a_{15} = 0; \quad a_{20} = 100; \quad a_{100} = 8\,500; \dots$$

No olvides que, en general, los primeros términos no indican nada a efectos del cálculo del límite.

Además, se verifica que:

$$n^2 - 15n = n(n - 15) > n, \quad \text{si } n > 15$$

y ya sabes que los términos de la sucesión de los números naturales llegan a sobrepasar cualquier número positivo K . Por tanto decimos que la sucesión a tienen límite $+\infty$ y se escribe:

$$\lim (n^2 - 15n) = +\infty$$

LSI99001.04 i.v.s.i. (v-d)

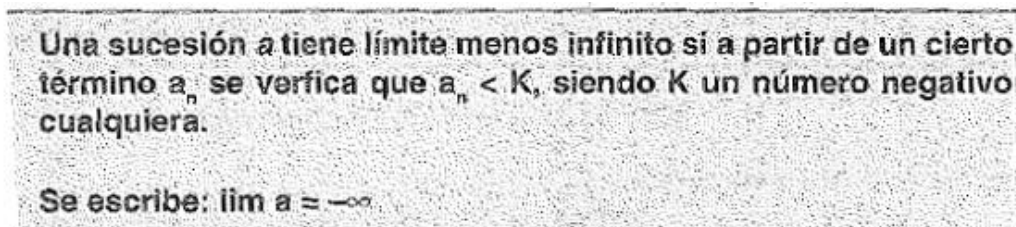
Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión a tiene límite más infinito si a partir de un cierto término a_n se verifica que $a_n > K$, siendo K un número positivo cualquiera.

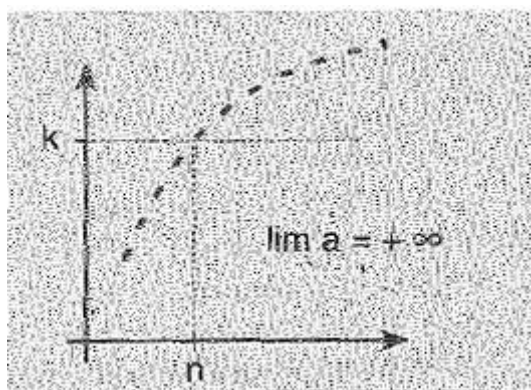
Se escribe: $\lim a = +\infty$

LSI99001.05 i.v.s.i. (v-d)

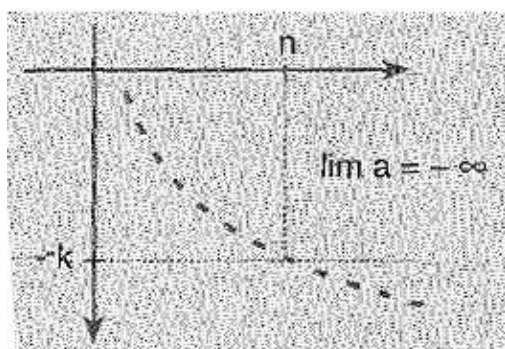
Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

LSI99001.06 i.v.s.i. (g-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación gráfico.

LSI99001.07 i.v.s.i. (g-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación gráfico.



LSI99001.08.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

La sucesión de término general $a_n = 2n - n^2$ tiene límite $-\infty$, pues su gráfica es una serie de puntos situados en una parábola de ecuación $y = 2x - x^2$ (figura 10).

Esto nos indica que a partir de un cierto término a_n se verifica que $2n - n^2 < K$, para cualquier K

Si, por ejemplo, es $K = -100$, entonces

$2n - n^2 < -100 \Rightarrow n^2 - 2n - 100 > 0$
y n puede ser el 12.

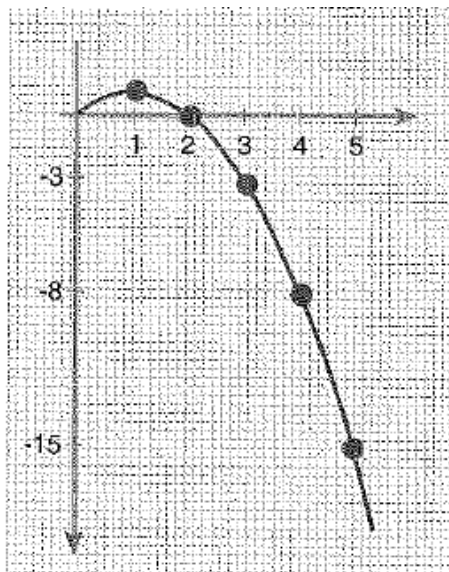
Si $K = -10^6$, entonces

$2n - n^2 < -10^6 \Rightarrow n^2 - 2n - 10^6 > 0$
y n puede ser el 1 002.

Se escribe : $\lim (2n - n^2) = -\infty$

LSI99001.08.02 d-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99001.04 LSI99001.05	LSI99001.01 LSI99001.08.01	LSI99001.02	LSI99001.03		
	Gráfico	LSI99001.06 LSI99001.07					LSI99001.08.02
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad “Límite de una sucesión”, apareciendo en los sistemas de representación verbal y gráfico. Ésta cuenta con un total de 18 páginas, en las que se presenta exclusivamente el límite de sucesiones. A pesar de ello, se reservan 2 páginas para el límite infinito de una sucesión, en contraste con las 5 páginas utilizadas para el límite finito de una sucesión.

En este libro de texto se intercalan las definiciones, los ejemplos y los ejercicios resueltos y propuestos, dejando un espacio de reflexión al alumnado en cada uno de los apartados que conforman la unidad. Además, también se plantean ejercicios al finalizar la unidad a modo de recapitulación, revisando cada una de las nociones descritas.

Las sucesiones con límite infinito se presentan a partir de una definición intuitiva, y se encuentran inmediatamente después del límite finito de una sucesión.

A2.19. Informe de LSI99002

Ficha libro

Código	LSI99002		
Título	2º BUP. Matemáticas		
Autor	Benedicto, C., Negro, A.		
Año	1993	Ley en vigor	LGE
Editorial	Alhambra		

Secuenciación LSI99002

1. Definición y ejemplos de valor absoluto, distancia e intervalos.
2. Definición y de sucesión de números reales y ejemplos.
3. Ejemplos y posterior definición de límite finito de una sucesión, concluyendo con un nuevo ejemplo.
4. Ejemplos y posteriores definiciones de límite más infinito y menos infinito, concluyendo con un nuevo ejemplo.
5. Ejemplos y definición de sucesiones oscilantes.
6. Colección de ejercicios y problemas resueltos.
7. Colección de ejercicios y problemas propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI99002.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Estudiamos ahora la sucesión $a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Observamos que:
a) La sucesión no tiene límite finito como las estudiadas hasta ahora.
b) Los términos de la sucesión se hacen tan grandes como queramos. Por grande que sea el número en que estemos pensando, siempre será rebasado por todos los términos de la sucesión a partir de un cierto término.

LSI99002.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

El número «un millón» es bastante grande. A pesar de eso es fácilmente superado por nuestra sucesión. Si calculas a_{1000} ya obtienes $1000^2 = 1000000$. $a_{1001} = 1002001$ y los términos van siendo cada vez mayores. Es decir: a partir del término a_{1000} (sin contar a a_{1000}) los términos se hacen mayores de un millón. Lo mismo sucede si cogemos un billón o cualquier otro número por grande que sea.

LSI99002.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

El límite de la sucesión a_n es $+\infty$ cuando para cualquier número positivo M que tomemos, por grande que sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos que le siguen son mayores que M .

LSI99002.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

El límite de la sucesión b_n es $-\infty$ cuando para cualquier número positivo M que tomemos, por grande que sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos que le siguen son menores que $-M$.

LSI99002.05 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

*Comprobemos que $b_n = -n^2$ cumple esta definición.
Queremos que los términos de la sucesión sean menores que $-M$ (siendo M un número positivo cualquiera).*

Para ello basta que los términos que cogemos ocupen un lugar de $n > \sqrt{M}$.

Por ejemplo si $M = 1.000.000$, $\sqrt{M} = 1000$

$b_{1000} = -1000000$ que es igual que $-M$

$b_{1001} = -1002001 < -1000000$.

LSI99002.06 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

10. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n^2 + 1}{4}$ tiende a $+\infty$.

La sucesión es $\frac{2}{4}, \frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{17}{4}, \dots$

Hay que probar que si $M > 0$, existe un término a partir del cual

$$a_n > M \quad \frac{n^2 + 1}{4} > M \quad ; \quad n^2 + 1 > 4M \quad ; \quad n^2 > 4M - 1 \quad ; \quad n > \sqrt{4M - 1}$$

Luego todos los términos a_n correspondientes a un lugar $n > \sqrt{4M - 1}$ son mayores que M .

LSI99002.07 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

11. ¿Qué términos de la sucesión son mayores que 1 millón?

Haciendo $M = 1.000.000$, resulta que n debe ser mayor que $\sqrt{4.000.000 - 1} = \sqrt{3.999.999} = 1999,9 \dots$
A partir de $a_{2.000}$ la sucesión rebasa a 1 millón.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99002.03 LSI99002.04	LSI99002.05 LSI99002.06 LSI99002.07		LSI99002.01 LSI99002.02		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones. Límite de sucesiones”. Ésta cuenta con un total de 17 páginas, de las que 7 de ellas están reservadas para los ejercicios resueltos y propuestos al final de la unidad. El límite infinito de una sucesión ocupa poco más de una página, mientras que el límite finito de una sucesión ocupa el triple de páginas, entre definiciones y ejemplos.

La unidad comienza con la definición de algunas nociones previas a la adquisición del conocimiento de la noción sucesión. Posteriormente se define ésta, para después presentar el límite finito de una sucesión a partir de diferentes ejemplos. Finalmente, el libro de texto presenta el límite más y menos infinito de una sucesión, y también las sucesiones oscilantes.

El libro de texto utiliza primero un enfoque intuitivo y posteriormente un enfoque formal para la presentación del límite infinito de sucesiones, dando lugar a la identificación de diferentes fenómenos caracterizados en este estudio. Este manual, además de contar con una amplia variedad de ejercicios y problemas resueltos, también propone una colección para ser realizada por el alumno.

A2.20. Informe de LSI99003

Ficha libro

Código	LSI99003		
Título	Matemáticas 2º BUP		
Autor	Lazcano, I. y Barolo, P.		
Año	1993	Ley en vigor	LGE
Editorial	Edelvives		

Secuenciación LSI99003

1. Diferentes definiciones involucradas en la noción de sucesión: términos de la sucesión, ilimitada, término n-ésimo, entre otros.
2. Ejemplos de estas nociones en diferentes sistemas de representación.
3. Definiciones y ejemplos de sucesiones acotadas y monótonas.
4. Operaciones con sucesiones.
5. Primera idea de la noción de punto de acumulación, acompañada de múltiples ejemplos.
6. Ejemplos y posterior definición de límite finito de una sucesión. Después se presentan más ejemplos.
7. Relación del límite con su unidad, convergencia y acotación.
8. Definición de límite infinito de una sucesión, pero en valor absoluto, que no es como ha sido considerado en este estudio, acompañada de 3 ejemplos.
9. Definición de límite más infinito y menos infinito como casos particulares de la anterior definición.
10. Sucesiones oscilantes.
11. Colección de 5 páginas y media de actividades propuestas a realizar por los alumnos.

Fenómenos encontrados

LSI99003.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Por tanto, el infinito, cuyo símbolo es ∞ , se define como el límite de una sucesión cuyos términos se hacen todo lo grandes que se quiera, es decir, llegan a ser mayores que cualquier número positivo previamente fijado.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI99003.01			
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones”. En ella se encuentra la presentación de sucesiones, límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión y sucesiones oscilantes, sumando un total de 20 páginas. De éstas, solo media página presenta el límite infinito de una sucesión, con la problemática anteriormente descrita, y 5 de ellas el límite finito de una sucesión. A los ejercicios planteados a modo de recapitulación y síntesis se reservan 5,5 páginas.

En este libro se encuentran primero los ejemplos asociados a cada una de las nociones, posteriormente se presentan las definiciones y finalmente cada apartado finaliza con nuevos ejemplos.

El límite infinito de una sucesión se sitúa inmediatamente después del límite finito de una sucesión. La primera de las definiciones de límite infinito no es la considerada en este estudio, por considerar aquellas que pudiesen ser oscilantes en $+\infty$ y $-\infty$. Esta problemática ya fue presentada en algunos de los libros de la década de 1970, por la relación existente entre la noción de divergencia y de límite infinito. Al igual que ocurría entonces, el límite más y menos infinito se considera una particularidad de este límite infinito. Existe una amplia variedad de actividades y ejercicios propuestos para la realización del alumnado, que están situados al final de la unidad.

A2.21. Informe de LSI99004

Ficha libro

Código	LSI99004		
Título	Matemáticas. Algoritmo 2. BUP 2		
Autor	Vizmanos, J.R., Alzola, M.		
Año	1994	Ley en vigor	LGE
Editorial	SM		

Secuenciación Libro LSI99004

1. Presentación del límite a partir de un ejemplo conocido por el alumnado con anterioridad.
2. Acercamiento a la noción de límite utilizando la calculadora, y la presentación de diferentes ejemplos.
3. Ejemplos y posterior definición del límite finito de una sucesión.
4. Ejemplo y posterior definición del límite más infinito de una sucesión.
5. Ejemplo y posterior definición del límite menos infinito de una sucesión.
6. Operaciones con infinito y operaciones con sucesiones convergentes.
7. Indeterminaciones.
8. Procedimientos para el cálculo de límite con sucesiones polinómicas y radicales.
9. Colección de problemas resueltos y colección de ejercicios propuestos.
10. Paradojas del infinito: Aquiles y la Tortuga.

Fenómenos encontrados

LSI99004.01.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Consideremos la sucesión de término general $a_n = n^3$; los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «listón» que pongamos podemos conseguir encontrar términos que lo superan. Supongamos que fijamos un valor muy alto; por ejemplo, $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $1\,000$ se verifica que los términos consecutivos son mayores que el valor previamente fijado;

LSI99004.01.02 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$n^3 > 100\,000\,000 \text{ para todo } n > 1\,000$$

LSI99004.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por grande que sea el valor **K** que fijemos, siempre encontrarás un valor del índice **n** a partir del cual los términos sucesivos serán mayores que **K**. Cuando se verifica esto se dice que la sucesión (n^3) tiende a más infinito. Se simboliza por $+\infty$.

LSI99004.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

La sucesión de números reales (a_n) tiende a infinito si para cualquier valor que fijemos **K se puede conseguir que todos los términos a partir de uno dado sean mayores que **K**, sin más que dar valores a **n** tan grandes como sea necesario.**

Se escribe: $\lim a_n = +\infty$ o también $a_n \rightarrow +\infty$

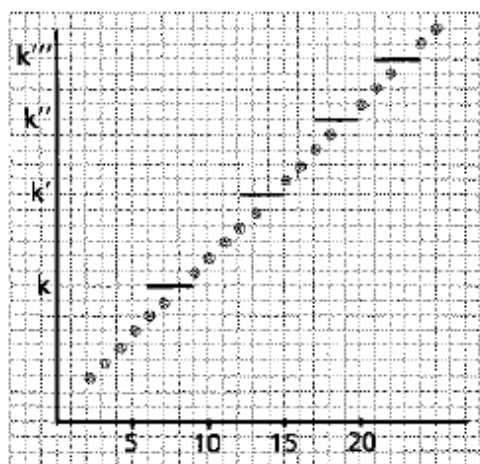
LSI99004.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Cuanto **mayor** sea el valor de **K**, **mayor** tendrá que ser el índice **n** a partir del cual se consigue que $a_n > K$.

LSI99004.05.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.



LSI99004.05.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Si la sucesión tiende a infinito,
cualquier listón que pongamos por alto
que sea será superado por términos
sin más que formar uno
suficientemente grande.

LSI99004.06.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

a) ¿A qué tiende la sucesión de término general $a_n = -n^2$?

La sucesión es: $(a_n) = (-1, -4, -9, -16, -25, -36, -49...)$.

Los términos se van haciendo cada vez menores, pero de tal manera que por bajo que sea el «listón» que pongamos, podemos conseguir encontrar términos menores que él. Supongamos que fijamos un valor muy bajo, por ejemplo, $K = -10\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que 100 se verifica que los términos consecutivos son menores que el valor previamente fijado;

LSI99004.06.02 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$-n^2 < -10\,000 \text{ para todo } n > 100$$

LSI99004.07 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Por pequeño que sea el valor **K** que fijemos siempre encontraremos un valor del índice **n** a partir del cual los términos sucesivos serán menores que **K**. Por ello decimos que la sucesión $(-n^2)$ tiende a menos infinito. Se simboliza por $-\infty$.

LSI99004.08 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

La sucesión de números reales (a_n) tiende a menos infinito si para cualquier valor que fijemos K se puede conseguir que todos los términos a partir de uno dado sean menores que K , sin más que dar valores a n tan grandes como sea necesario.

Se escribe: $\lim a_n = -\infty$ ó también $a_n \rightarrow -\infty$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99004.02 LSI99004.03 LSI99004.04 LSI99004.07 LSI99004.08	LSI99004.01.01 LSI99004.06.01 LSI99004.05.02				
	Gráfico				LSI99004.05.01		
	Tabular						
	Simbólico		LSI99004.01.02 LSI99004.06.02				

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad “Límite de sucesiones de números reales”. La unidad cuenta con un total de 16 páginas, en las que se presenta exclusivamente el límite de sucesiones. A pesar de ello, se reserva solo 1 página para el límite infinito de una sucesión, exactamente igual que para el límite finito de una sucesión, siguiendo una estructura idéntica. Los ejercicios propuestos ocupan algo más de 4 páginas.

En este libro de texto se intercalan las definiciones y los ejemplos, mientras que los ejercicios propuestos quedan relegados al final de la unidad con un peso notable sobre el resto de contenido.

El límite infinito de una sucesión aparece en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico. Además, cabe destacar que el límite infinito de sucesiones se presenta en todos los casos desde un enfoque formal, identificando el fenómeno i.v.s.i. Cabe destacar en este libro de texto que los límites se presentan a partir de un ejemplo atractivo para el alumnado, como son los deportes, y que el final de la unidad se encuentra la paradoja de Aquiles y la tortuga.

A2.22. Informe de LSI99005

Ficha libro

Código	LSI99005		
Título	Ciencias de la Naturales y de la salud - tecnología, matemáticas. 1º Bachillerato		
Autor	Vizmanos, J.R. y Anzola, M.		
Año	1996	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI99005

1. Presentación de las sucesiones nulas a partir de ejercicios resueltos y su definición.
2. Presentación de las sucesiones no nulas, en las que se incluyen las sucesiones con límite finito a partir de ejercicios resueltos y su definición.
3. Ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite más infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular.
4. Definición de límite más infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal.
5. Ejercicios resueltos que concluyen el apartado de límite más infinito de una sucesión.
6. Ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite menos infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular.
7. Definición de límite menos infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal.
8. Ejercicios resueltos que concluyen el apartado de límite menos infinito de una sucesión.
9. Presentación del número e y un ejemplo de su aplicación.
10. Introducción del límite de funciones a través de una idea intuitiva y de su definición.

Fenómenos encontrados

LSI99005.01.01 c-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	\rightarrow	$+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	\rightarrow	$+\infty$

LSI99005.01.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «límite» se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo, $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

LSI99005.01.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

Por tanto,

$$n^2 + 1 > K \text{ para todo } n > 10\,000$$

LSI99005.01.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por grande que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán mayores que K .

LSI99005.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión de números reales a_n tiene por límite $+\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n > K$.

Se escribe: $\lim a_n = +\infty$

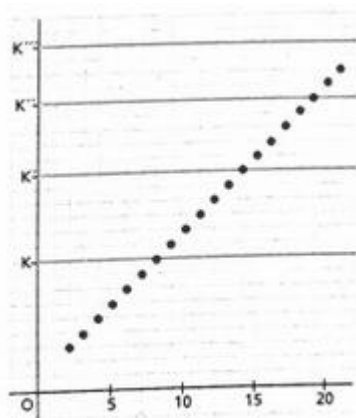
LSI99005.03 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

¿A qué valor se aproximan las sucesiones $a_n = n^2$, $a_n = 4n^3$, $a_n = 5n^4$, ...?
A medida que n se hace mayor los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego $\lim n^2 = \lim 4n^3 = \lim 5n^4 = +\infty$, ...

LSI99005.04.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación gráfico.



LSI99005.04.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Si la sucesión tiende a $+\infty$, cualquier listón que pongamos, por alto que sea, será superado por términos simplemente con formar uno suficientemente grande.

LSI99005.05.01 d-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?
Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	\rightarrow	$+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	...	\rightarrow	$-\infty$

LSI99005.05.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez menores, pero de forma que por bajo que sea el «listón» se pueden encontrar términos menores que él. Si fijamos un valor muy bajo, por ejemplo, $K = -100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son menores que el valor previamente fijado:

LSI99005.05.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

Por tanto, $-n^2 + 1 < K$ para todo $n > 10\,000$

LSI99005.05.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Por pequeño que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán mayores que K .

LSI99005.06 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión de números reales a_n tiene por **límite** $-\infty$, cuando para todo número real positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$, se verifica que $a_n < K$.
Se escribe: $\lim a_n = -\infty$

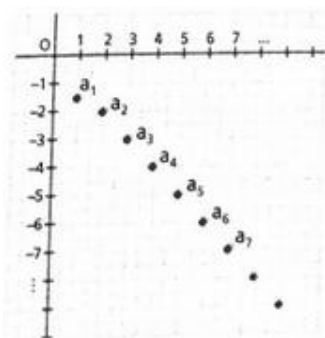
LSI99005.07 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación verbal.

1. ¿A qué valor se aproximan las sucesiones $a_n = -2n^2$ y $a_n = -6n^3$, ...?
A medida que n se hace mayor los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego $\lim -2n^2 = \lim -6n^3 = \lim -7n^4 = -\infty$, ...

LSI99005.08.01 d-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado, en el sistema de representación gráfico.



Representación gráfica de la sucesión
-1, -2, -3, -4, -5, ...

LSI99005.08.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Si la sucesión tiende a $-\infty$, cualquier
listón que pongamos, por bajo que
sea, será superado por términos
simplemente con formar uno
suficientemente pequeño.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99005.01.04 LSI99005.02 LSI99005.05.04 LSI99005.06	LSI99005.01.02 LSI99005.04.02 LSI99005.05.02 LSI99005.08.02		LSI99005.03		LSI99005.07
	Gráfico				LSI99005.04.01		LSI99005.08.01
	Tabular				LSI99005.01.01		LSI99005.05.01
	Simbólico		LSI99005.01.03 LSI99005.05.03				

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Funciones: Límites y continuidad”. En ella encontraremos límite de sucesiones: sucesiones nulas, límite de sucesiones, sucesiones no nulas, límite más infinito de una sucesión, límite menos infinito de una sucesión. Posteriormente se presenta la avaricia del usurero y el número e. En la última parte de la unidad se encuentra el límite de funciones, presentado a partir de una idea intuitiva y después de las diferentes

definiciones. Se contemplan los límites determinados e indeterminados, los límites de funciones racionales, los límites de funciones irracionales, los límites de funciones trigonométricas y la continuidad en un punto. La unidad cuenta con un total de 20 páginas, de las que las 17 primeras intercalan la teoría y los ejercicios resueltos. En las 3 últimas, se encuentran los ejercicios y problemas propuestos, pero ninguno de ellos sobre el límite de una sucesión. De las 17 páginas que intercalan teoría y ejercicios resueltos, 4 de ellas son del límite de una sucesión, 2 del límite finito y otras 2 del límite infinito.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la definición y ejercicios resueltos del límite finito de una sucesión nula, encontrándose dividido en el límite de una sucesión nula y el límite de una sucesión no nula.

El apartado “Límite más infinito de una sucesión” comienza, a modo de presentación, con un ejemplo en el sistema de representación tabular. Posteriormente se define, de manera formal, el límite más infinito de una sucesión. Finalmente se presentan algunos ejemplos, concluyendo el apartado sin la propuesta de ejercicios a resolver por parte del alumno. Análogamente, se encuentra el apartado “Límite menos infinito de una sucesión”, el cual tiene la misma estructura que el anterior. Durante la unidad se trata tanto el límite infinito de manera intuitiva como formal, utilizando los 4 sistemas de representación: gráfico, tabular, verbal y simbólico. Además, y motivado por la variedad de representaciones, definiciones y ejemplos, el alumnado puede alcanzar una cierta soltura del lenguaje formal del límite infinito.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al final de la unidad, ninguno de ellos del límite de una sucesión.

A2.23. Informe de LSI99006

Ficha libro

Código	LSI99006		
Título	Matemáticas 2		
Autor	Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M., Nevot, A.		
Año	1998	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	Santillana		

Secuenciación LSI99006

1. Presentación de la idea de límite a partir de la imagen de un ejemplo.
2. Definición y construcción de sucesiones de números reales, progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sucesiones definidas por recurrencia.
3. Actividades propuestas sobre los puntos anteriores, con su solución.
4. Presentación de objetivos.
5. Ejemplo de límite finito de una sucesión y posterior definición. Después se presenta un nuevo ejemplo.
6. Definición de límite más y menos infinito de una sucesión con un ejemplo en el margen del libro de texto.
7. Ejercicios propuestos de límite finito y límite infinito.
8. Definición de límite de una función en un punto a partir de sucesiones, acompañada de diferentes ejemplos en distintos sistemas de representación.
9. Análogamente para su definición mediante entornos y distancias.
10. Límites laterales: ejemplos y posterior definición.
11. Límite infinito de una función: definiciones y posteriores ejemplos.
12. Cálculo de límites: operaciones y propiedades.
13. Colección de ejercicios resueltos y posterior colección de ejercicios propuestos.
14. Referencias históricas a las “circunferencias polacas” y a Cauchy.

Fenómenos encontrados

LSI99006.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Las sucesiones, como $a_n = n^2$, que se hacen mayores que cualquier número, se dice que tienden a $+\infty$.

LSI99006.02 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Las sucesiones, como $a_n = -n^2$, que se hacen menores que cualquier número, se dice que tienden a $-\infty$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI99006.01		LSI99006.02	
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se ubica en la unidad que lleva por título “Límites”. Esta unidad está compuesta por 28 páginas, de las que solo se dedica media página al límite infinito de una sucesión, mientras que al límite finito de una sucesión se dedican 1,5 páginas. La mayor parte está dedicado al límite de una función, ya que los anteriores son considerados como un paso previo a éstos.

En este libro se encuentran primero las definiciones de sucesión de números reales, progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sucesiones por recurrencia. Después de estas nociones se presenta el límite de una sucesión. Las definiciones, los ejemplos y los ejercicios propuestos se intercalan en toda la unidad.

El límite infinito de una sucesión se encuentra inmediatamente después del límite finito de una sucesión. Después se presentan los diferentes límites de una función. El enfoque desde el que se presenta el límite objeto de este estudio es meramente intuitivo, y se omite por completo cualquier formalidad posible.

A2.24. Informe de LSI00001

Ficha libro

Código	LSI00001		
Título	Matemáticas. Bachillerato 1. Ciencias de la naturaleza y la salud. Tecnología		
Autor	Martín, M.A., Morán, M., Rey, J.M., Reyes, M.		
Año	2001	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	Bruño		

Secuenciación LSI00001

1. Presentación de la recta real, acompañada de las propiedades de las desigualdades.
2. Definición de valor absoluto e intervalos en la recta real.
3. Realización de estimación de números reales y aproximaciones.
4. Definición y ejemplos de la utilización de la notación científica.
5. Definiciones de sucesión, término de una sucesión y término general acompañadas de ejemplos. Posteriormente se presentan las progresiones geométricas.
6. Definición de límite infinito de una sucesión acompañada de diferentes ejemplos.
7. Definición de límite finito de una sucesión acompañada de diferentes ejemplos, siguiendo la misma estructura que el límite anterior.
8. Definición y ejemplos de límites de sucesiones polinómicas, de racionales y de progresiones geométricas.
9. La unidad finaliza con una colección de ejercicios propuestos.

Fenómenos encontrados

LSI00001.01 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Una sucesión a_n **tiende a infinito** o tiene **límite infinito** si sus términos pueden hacerse tan grandes como se quiera con tal de avanzar en la misma. Se escribe: $a_n \rightarrow +\infty$ o $\lim a_n = +\infty$.

LSI00001.02 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Si una sucesión a_n cumple la propiedad de que, si se avanza suficientemente en la sucesión, sus términos superan a cualquier número real, se escribe:

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow +\infty$$

y se dice que a_n tiende a infinito.

LSI00001.03 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

1, 4, 9, 16, 25...

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = n^2$, tiende a infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

LSI00001.04.01 c-i.i. (v-e)

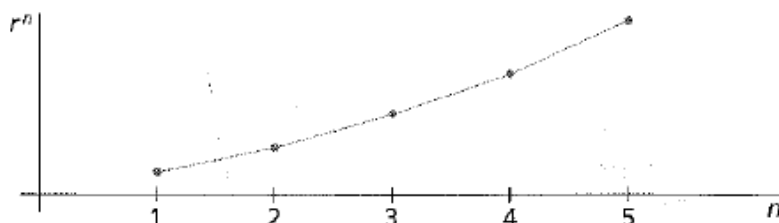
Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Cuando se eleva un número fijo r a sucesivas potencias, la conducta de la sucesión r^n depende del valor de r .

- Si $r > 1$, las potencias crecen más allá de cualquier número real: el límite de la sucesión es infinito.

LSI00001.04.02 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI00001.01 LSI00001.02	LSI00001.03 LSI00001.04.01		
	Gráfico				LSI00001.04.02		
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

Los límites de sucesiones se encuentran en la unidad “Aproximación de números reales. Sucesiones”. Lo que nos ocupa, límite infinito de sucesiones, es un apartado de esta unidad titulado “Límite de sucesiones”. La unidad cuenta con un total de 24 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos, proponiendo además cuestiones a resolver por el alumno. En las 3 últimas, se reserva un espacio para que el alumno resuelva los ejercicios y problemas propuestos. Del resto de páginas, donde se intercalan teoría y ejercicios resueltos, el límite infinito de una sucesión solo ocupa poco más de dos. El resto de la unidad es ocupado por nociones previas como, por ejemplo, recta real, intervalos, valor absoluto, aproximación o estimación, entre otros.

Las sucesiones con límite infinito se presentan a partir de una definición intuitiva, para posteriormente realizar cuatro ejemplos. En la definición podemos apreciar el fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado, mientras que, en los ejemplos, de los cuatro que presenta el libro de texto, solo se identifica este mismo fenómeno en uno de ellos. En el resto no se aprecia ninguno. Como información en uno de los márgenes, se encuentra una nueva definición de límite infinito de una sucesión con un enfoque formal de la noción. Inmediatamente después del límite infinito de una sucesión se presenta el límite finito de una sucesión, con una estructura idéntica al anterior. Una vez presentadas ambas nociones, el libro establece tres subapartados en los que enfatizar alguno de ellos: para sucesiones polinómicas, sucesiones racionales y progresiones geométricas. Todos estos subapartados con la misma estructura que lo anteriormente descrito.

Al final de la unidad, se encuentran algunos ejercicios propuestos, donde no se indica la solución de ninguno de ellos. Los ejercicios resueltos están intercalados con la teoría a lo largo de toda la unidad.

A2.25. Informe de LSI00002**Ficha libro**

Código	LSI00002		
Título	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Bachillerato 1.		
Autor	Bescós, E. y Pena, Z.		
Año	2001	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	Oxford		

Secuenciación LSI00002

1. Definición de la noción de sucesión.
2. Diferentes ejemplos de sucesiones, determinando además su término general.
3. Definiciones y ejemplos de progresiones aritméticas y geométricas.
4. Ejemplos de sucesiones con límite finito.
5. Definición de límite finito de una sucesión.
6. Ejemplos, en varios sistemas de representación, y posterior definición de límite más infinito de una sucesión.
7. Ejemplos, en varios sistemas de representación, y posterior definición de límite menos infinito de una sucesión.
8. Presentación de ejemplos de sucesiones oscilantes.
9. Diferentes operaciones con sucesiones: propiedades y ejemplos.
10. Procedimientos de cálculo de límites.
11. Definición del número e a partir del límite de una sucesión.
12. Definiciones y ejemplos de los diferentes límites de una función.
13. Colección de ejercicios resueltos y propuestos.

Fenómenos encontrados**LSI00002.01.01 c-i.i. (t-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

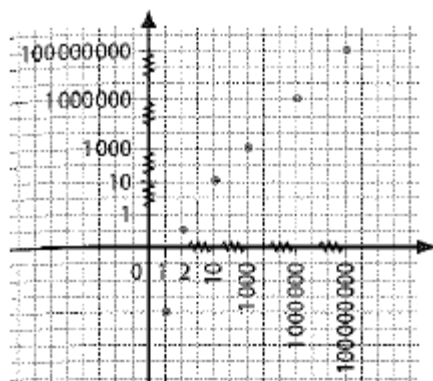
$$a_n = \frac{n^2 - 3}{n}$$

Si se construye una tabla de valores y se representa gráficamente, puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente (figura 4.4).

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	...	$n \rightarrow \infty$
$\frac{n^2 - 3}{n}$	-2	0,5	9,7	999,997	1 000 000	100 000 000	...	$+\infty$

LSI00002.01.02 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.



LSI00002.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión tiene límite $+\infty$ cuando, para cualquier número real y positivo, k , que se tome, siempre existe un valor, n_0 , de n , a partir del cual los términos de la sucesión son mayores que k . Se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

LSI00002.03.01 d-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

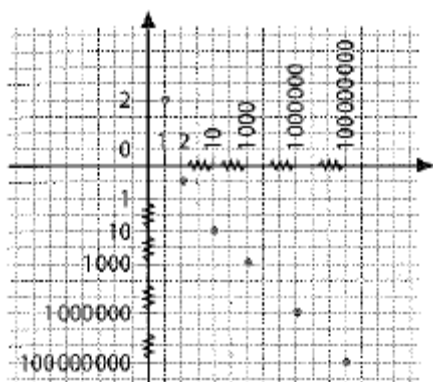
Si se representa la sucesión opuesta a la anterior, $a_n = -\frac{n^2 - 3}{n}$, se obtiene la figura 4.5.

n	1	2	10	1.000	1.000.000	100.000.000	...	$n \rightarrow \infty$
$-\frac{n^2 - 3}{n}$	-2	-0,5	-9,7	-999,997	-1.000.000	-100.000.000	...	$-\infty$

Como puede observarse, los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto, pero, al ser negativos, se dice que tienden a $-\infty$.

LSI00002.03.02 d-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.

LSI00002.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión tiene límite $-\infty$ cuando, para cualquier número real y negativo, k , que se tome, siempre existe un valor, n_0 , de n , a partir del cual los términos de la sucesión son menores que k . Se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00002.02 LSI00002.04					
	Gráfico				LSI00002.01.02		LSI00002.03.02
	Tabular				LSI00002.01.01		LSI00002.03.01
	Simbólico						

Comentarios

Los límites de sucesiones se encuentran en la unidad “Límite y continuidad” en el apartado titulado “Idea intuitiva de límite de una sucesión”. La unidad cuenta con un total de 32 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos, así como ejercicios propuestos. El límite infinito de una sucesión ocupa apenas una página. El resto de la unidad es ocupado por su cálculo a partir de diferentes procedimientos y los límites de una función, teniendo un peso predominante en la unidad.

Las sucesiones con límite infinito se presentan con un ejemplo en los sistemas de representación tabular y gráfico, y posteriormente se define, desde un enfoque formal, la noción. Esta estructura se encuentra en dos ocasiones, una para el límite más infinito y otra para el límite menos infinito. En los ejemplos podemos identificar los fenómenos crecimiento intuitivo ilimitado y decrecimiento intuitivo ilimitado, y en la definición el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito.

Previamente a la introducción de esta noción se encuentra el límite finito de una sucesión. Para su adquisición, también se ha realizado una presentación a partir de diferentes ejemplos para finalmente definir la noción. En esta misma unidad se encuentran los diferentes límites de una función. Los límites de una sucesión se han presentado como paso previo.

A2.26. Informe de LSI00003**Ficha libro**

Código	LSI00003		
Título	Algoritmo. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1.		
Autor	Vizmanos, J.R., Anzola, M.		
Año	2002	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI00003

1. Ejemplos y posterior definición de las sucesiones con límite 0.
2. Ejemplos y definición de las sucesiones con límite finito distinto de 0.
3. Ejemplos y definición del límite más infinito de una sucesión.
4. Ejemplos y definición del límite menos infinito de una sucesión.
5. Presentación del número e a partir de la noción de límite de una sucesión.
6. Idea intuitiva, utilizando ejemplos, de la noción de límite de una función.
7. Definición del límite de una función.
8. Cálculo de diferentes límites de una función.
9. Ejemplos y definición de continuidad en un punto.

Fenómenos encontrados**LSI00003.01.01 c-i.i. (t-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	100 000 001	...	tiende a $+\infty$

LSI00003.01.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «límite» se pueden encontrar términos que lo superen.

Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

LSI00003.01.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Por tanto:

$$n^2 + 1 > K \quad \text{para todo} \quad n > 10\,000$$

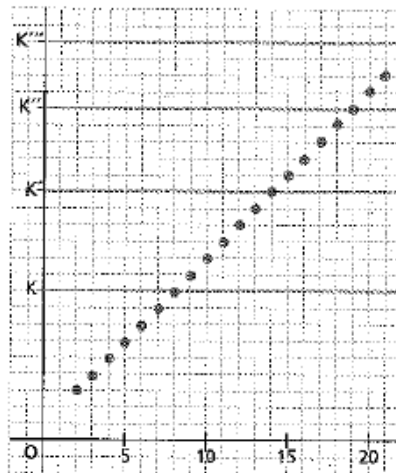
LSI00003.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por grande que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán mayores que K .

LSI00003.03.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación gráfico



LSI00003.03.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación gráfico.

Si la sucesión tiende a $+\infty$, cualquier listón que pongamos, por alto que sea, será superado por términos, simplemente con formar uno lo suficientemente grande.

LSI00003.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión a_n de números tiende a $+\infty$ cuando para todo número positivo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$ se verifica que $a_n > K$.
Se escribe: $\lim a_n = +\infty$

LSI00003.05 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

A qué valor tienden las sucesiones

$$a_n = n^2, b_n = 4n^3, c_n = 5n^4$$

A medida que n se hace mayor, los términos de las sucesiones se hacen cada vez mayores, luego tienden a $+\infty$.

LSI00003.06.01 d-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-99 999 999	...	tiende a $-\infty$

LSI00003.06.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos se van haciendo cada vez menores, pero de tal manera que por bajo que sea el «listón» se pueden encontrar términos menores que él.

Si fijamos un valor muy bajo, por ejemplo $K = -100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son menores que el valor previamente fijado:

LSI00003.06.03 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$-10\,000^2 + 1 = -99\,999\,999$$

Por tanto:

$$-n^2 + 1 < K \quad \text{para todo} \quad n > 10\,000$$

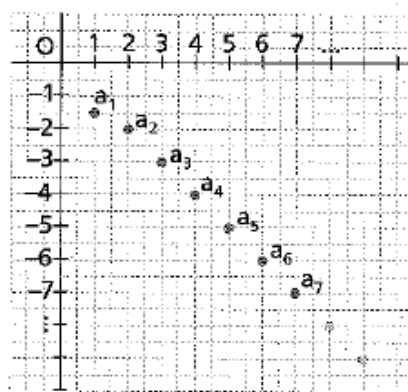
LSI00003.07 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Por pequeño que sea el valor K fijado, siempre se encontrará un valor del índice, n^* , a partir del cual los términos siguientes serán menores que K .

LSI00003.08.01 d-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación tabular.



Representación gráfica de la sucesión

$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

LSI00003.08.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación tabular.

Si la sucesión tiende a $-\infty$, cualquier listón que pongamos, por bajo que sea, será superado por términos simplemente con formar uno lo suficientemente pequeño.

LSI00003.09 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Una sucesión a_n de números tiende a $-\infty$ cuando para todo número negativo K existe un número natural n^* , tal que para todo $n > n^*$ se verifica que $a_n < K$.
Se escribe: $\lim a_n = -\infty$

LSI00003.10 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo el fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

A qué valor se aproximan las sucesiones

$$a_n = -2n^2, b_n = -6n^3, c_n = -7n^4$$

A medida que n se hace mayor, los términos de las sucesiones se hacen cada vez menores, luego tienden a $-\infty$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00003.02 LSI00003.04 LSI00003.07 LSI00003.09	LSI00003.01.02 LSI00003.03.02 LSI00003.06.02 LSI00003.08.02		LSI00003.05		LSI00003.10
	Gráfico				LSI00003.03.01		LSI00003.08.01
	Tabular				LSI00003.01.01		LSI00003.06.01
	Simbólico		LSI00003.01.03 LSI00003.06.03				

Comentarios

Los límites de sucesiones se encuentran en la unidad “Tendencia y continuidad” en los apartados titulados “Límite más infinito de una sucesión” y “Límite menos infinito de una sucesión”. La unidad cuenta con un total de 18 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos. El límite infinito de una sucesión ocupa dos páginas completas, mientras que el límite finito ocupa otras dos. El resto de la unidad es ocupado por el número e y por los diferentes límites de una función, teniendo un peso predominante en la unidad.

Las sucesiones con límite más y menos infinito se presentan a partir de un ejemplo en diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico, verbal y simbólico, además de considerar enfoque intuitivo y formal. Tras el desarrollo del ejemplo se presenta la

definición. Posteriormente se presentan nuevos ejemplos resueltos, aunque en esta ocasión con una explicación de resolución menor. Los ejemplos utilizados para más y para menos infinito son completamente análogos, únicamente cambiando el signo del coeficiente director. Tanto en el ejemplo inicial como en uno de los ejemplos finales podemos identificar los fenómenos descritos en el presente estudio.

Anterior al límite infinito de una sucesión, se encuentran las sucesiones nulas y el límite finito de una sucesión. En este segundo caso, la estructura es idéntica a la que luego los autores utilizan para el límite infinito de una sucesión. En esta misma unidad también se encuentran los diferentes límites de funciones teniendo un peso predominante frente a los límites de sucesiones.

Los ejercicios propuestos se encuentran al final de la unidad.

A2.27. Informe de LSI00004**Ficha libro**

Código	LSI00004		
Título	Algoritmo. Matemáticas 4. Opción B		
Autor	Vizmanos, J.R., Anzola, M.		
Año	2003	Ley en vigor	LOGSE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI00004

1. Contextualización en la portada del capítulo utilizando el número e.
2. Primera aproximación a la noción de límite utilizando tanto ejemplos de límites finitos como infinitos.
3. Ejemplos y definición de límite de una sucesión, considerando únicamente el límite finito.
4. Ejemplos y definición de límite infinito de una sucesión.
5. Presentación de los símbolos $+\infty$ y $-\infty$.
6. Límites de operaciones con sucesiones, donde se encuentran propiedades y ejemplos.
7. Introducción a los límites indeterminados, a partir de diferentes ejemplos.
8. Número e.
9. Colección final de ejercicios.

Fenómenos encontrados**LSI00004.01.01 i.v.s.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Considera la sucesión de término general $a_n = 2n + 1$:

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, \dots, a_{100} = 201, \dots$$

Sus términos se hacen cada vez mayores, de manera que por alto que sea el «listón» que pongamos se puede conseguir encontrar términos que lo superan.

LSI00004.01.02 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

Por ejemplo, tomamos $k = 100\,000$:

$$a_n = 2n + 1 > 100\,000 \Rightarrow n > 49\,999,5$$

LSI00004.01.03 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por tanto, a partir del término $a_{50\,000}$ se verifica que $a_n > 100\,000$. Compruébalo, por ejemplo, con $a_{50\,000}$ y $a_{60\,000}$. Diremos entonces que la sucesión a_n tiende a más infinito.

LSI00004.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

La sucesión a_n tiende a **más infinito** si dado un número real k , por grande que sea, existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes a él son mayores que k . Se escribe: $\lim a_n = +\infty$.

LSI00004.03.01 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Sea ahora la sucesión de término general $a_n = -n^3$:

$$a_1 = -1, a_2 = -8, a_3 = -27, \dots, a_{100} = -1\,000\,000, \dots$$

Sus términos se van haciendo cada vez menores, de modo que por bajo que sea el «listón» que pongamos, existen términos menores que él.

LSI00004.03.02 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

Por

ejemplo, tomemos $k = -10\,000$:

$$a_n = -n^3 < -10\,000 \Rightarrow n^3 > 10\,000 \Rightarrow n > 21,54$$

LSI00004.03.03 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

Por tanto, a partir del término a_{22} se verifica que $a_n < -10\,000$. Por ejemplo: $a_{22} = -10\,648$, $a_{50} = -125\,000$, ...

Diremos entonces que la sucesión a_n tiende a menos infinito.

LSI00004.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en la siguiente definición el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

La sucesión a_n tiende a **menos infinito** si dado un número real k , por pequeño que sea, existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes a él son menores que k . Se escribe: $\lim a_n = -\infty$.

LSI00004.05 i.v.s.i. (s-e)

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación simbólico.

Dado $k = 1\,000$ y la sucesión $a_n = (2n^2 + 5)$, averiguar a partir de qué término de la misma todos los siguientes son mayores que k . Comprobarlo con algunos términos posteriores.

$$a_1 = 7, a_2 = 13, a_3 = 23, \dots, a_{100} = 20\,005, \dots$$

$$a_n = 2n^2 + 5 > 1\,000 \Rightarrow 2n^2 > 995 \Rightarrow n^2 > 497,5 \Rightarrow n > 22,30$$

A partir del término a_{23} se cumple la condición exigida:

$$a_{23} = 1\,063, a_{40} = 3\,205, \dots$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00004.02 LSI00004.04	LSI00004.01.01 LSI00004.03.01 LSI00004.01.03 LSI00004.03.03				
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico		LSI00004.01.02 LSI00004.03.02 LSI00004.05				

Comentarios

Los límites de sucesiones se encuentran en la unidad “Límites de sucesiones. El número e ”, por lo que todos los apartados comprenden el aprendizaje de esta noción, sin llegar a presentar el límite de una función. La unidad cuenta con un total de 15 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos, dejando para el final de la unidad la colección de ejercicios resueltos. La noción de límite infinito de una sucesión ocupa una página únicamente, mientras que el límite finito ocupa el doble. El resto de la unidad es ocupado por el número e y por diferentes propiedades y procesos que faciliten el cálculo de los límites.

Las sucesiones con límite más y menos infinito se presentan a partir de un ejemplo en diferentes sistemas de representación: verbal y simbólico, para a continuación enunciar una definición formal. Posteriormente se presenta un nuevo ejemplo. En todos los ejemplos presentados se emplea una sucesión polinómica. Tanto en el ejemplo inicial como en el que finaliza el apartado, podemos identificar los fenómenos descritos en el presente estudio.

Anterior al límite infinito de una sucesión, se encuentran las sucesiones de límite finito, que el libro denomina como límite de una sucesión. En este caso, la estructura es similar a la descrita para el límite infinito, pero se usan más sistemas de representación, como por ejemplo el tabular y el gráfico.

A2.28. Informe de LSI00005**Ficha libro**

Código	LSI00005		
Título	Matemáticas 2. Ciencias y tecnología		
Autor	Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F.		
Año	2008	Ley en vigor	LOE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI00005

1. Introducción de las progresiones aritméticas y geométricas.
2. Definiciones de sucesión, término general, sucesiones monótonas y sucesiones acotadas, acompañadas de ejercicios resueltos y propuestos.
3. Ejemplos y posteriores definiciones de sucesiones convergentes, divergentes y otro tipo de sucesiones.
4. Propiedades de los límites de sucesiones.
5. Cálculo de diferentes límites de sucesiones cuando existe algún tipo de indeterminación.
6. Definición de función real de variable real y sus diferentes tipos: polinómicas, racionales, etc., acompañada de ejercicios resueltos y propuestos.
7. Definición de límite de una función en un punto, con ejercicios resueltos y propuestos.
8. Definición de límites infinitos de una función.
9. Propiedades de los límites de funciones. Cálculo de diferentes límites de funciones cuando existe algún tipo de indeterminación.
10. Enunciados sobre definiciones formales del límite.
11. Ejercicios resueltos recopilatorios de toda la unidad y colección final de ejercicios propuestos.

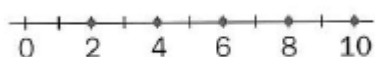
Fenómenos encontrados**LSI00005.01.01 c-i.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

La sucesión $a_n = 2n$ verifica que sus términos se hacen cada vez mayores; es decir, se acercan a $+\infty$: $a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 6$ $a_4 = 8$ $a_5 = 10$
 Se dice que el límite de la sucesión es $+\infty$ y se escribe: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

LSI00005.01.02 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.



LSI00005.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

La expresión *hacerse cada vez mayores* o *acercarse a $+\infty$* se traduce matemáticamente en que para cualquier número real positivo M se puede encontrar un término de la sucesión tal que a partir de él todos los términos son mayores que M .

LSI00005.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

De la misma forma, los términos de una sucesión se acercan a $-\infty$ si para cualquier número real negativo M se puede encontrar un término de la sucesión tal que a partir de él todos los términos sean menores que M .

LSI00005.04 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \text{ se puede encontrar un } n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

LSI00005.05 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \text{ se puede encontrar un } n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow a_n < M.$$

LSI00005.06 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \text{ si } n > n_0 \Rightarrow a_n > M$$

LSI00005.07 i.v.s.i. (s-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación simbólico.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \text{ si } n > n_0 \Rightarrow a_n < M$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00005.02 LSI00005.03			LSI00005.01.01		
	Gráfico				LSI00005.01.02		
	Tabular						
	Simbólico	LSI00005.04 LSI00005.05 LSI00005.06 LSI00005.07					

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad “Límites de sucesiones y de funciones” en el apartado titulado “Límite de una sucesión”, donde también se encuentra el límite finito de una sucesión. La unidad cuenta con un total de 26 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos y ejercicios propuestos. El límite infinito de una sucesión ocupa apenas media página, mientras que el límite finito ocupa la otra mitad de dicha página. El resto de la unidad es ocupado por los diferentes límites de funciones, teniendo por lo tanto un peso predominante en la unidad.

Las sucesiones con límite más y menos infinito se presentan a partir de un ejemplo en diferentes sistemas de representación: verbal y gráfico, utilizando una recta en lugar del eje cartesiano como es habitual en los libros de texto analizados. Además, se consideran ambos enfoques: el intuitivo y el formal. Se finaliza la noción con la presentación de la definición formal utilizando el sistema de representación simbólico.

Los fenómenos caracterizados en este estudio están presentes en ejemplos y definiciones, tanto desde un enfoque intuitivo como desde un enfoque formal.

Inmediatamente anterior al límite infinito de una sucesión, se encuentran las sucesiones de límite finito, con una estructura de presentación similar.

En esta misma unidad también se encuentran los diferentes límites de funciones, de hecho, el límite de una sucesión se presenta como un paso previo a esta noción.

A2.29. Informe de LSI00006

Ficha libro

Código	LSI00006		
Título	Matemáticas I. Bachillerato 1º		
Autor	Cólera, J., Oliveira, M.J., García, R., Santaella, E.		
Año	2009	Ley en vigor	LOE
Editorial	Anaya		

Secuenciación LSI00006

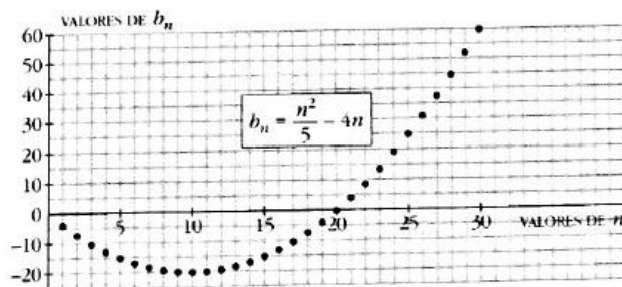
1. Presentación del concepto de sucesión por medio de un ejemplo en el que se presenta la sucesión de Fibonacci y un breve contexto histórico.
2. Diferentes ejemplos de reflexión y resolución que tratan sobre sucesiones.
3. Presentación de los conceptos “sucesión” y “términos de una sucesión”, acompañadas de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.
4. Definición de “progresión aritmética” y “progresión geométrica” acompañadas de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.
5. Introducción de “sucesiones de potencias” y “sucesión de Fibonacci” acompañada de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.
6. Introducción del límite finito de una sucesión y límite infinito de una sucesión a través de ejemplos, utilizando el sistema de representación gráfico.
7. Ejercicios propuestos de límite finito de una sucesión y límite infinito de una sucesión.
8. Aproximación la idea de límite finito e infinito de una sucesión.
9. Ejemplo en el sistema de representación gráfico de una sucesión que no tiene límite.
10. Breve resumen de los conocimientos adquiridos en la unidad.
11. Ejercicios propuestos y resueltos de límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión y sucesiones que no tienen límite.

Fenómenos encontrados

LSI00006.01.01 c-i.i. (g-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación gráfico.

■ Procedemos de forma análoga con la sucesión $b_n = \frac{n^2}{5} - 4n$:



LSI00006.01.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Aunque los términos de la sucesión empiezan decreciendo, a partir de uno de ellos empiezan a crecer y se hacen muy grandes, cada vez más. Esto lo expresamos así:

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{n^2}{5} - 4n \right) = +\infty$$

LSI00006.02 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

- Si crece de modo que sus valores acaban superando a cualquier número, decimos que:

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \text{o bien que} \quad \lim a_n = +\infty$$

LSI00006.03 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

- Si decrece, tomando valores menores que cualquier número negativo, por grande que sea su valor absoluto, ponemos:

$$a_n \rightarrow -\infty \quad \text{o bien que} \quad \lim a_n = -\infty$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI00006.02	LSI00006.01.02	LSI00006.03	
	Gráfico				LSI00006.01.01		
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

En este libro se encuentran a modo de presentación diferentes ejemplos de sucesiones. Tras reflexionar y resolver los ejercicios propuestos, se definen algunos de los conceptos previos al conocimiento de límite de una sucesión, acompañados de ejercicios resueltos y ejercicios planteados.

El apartado “Límite de una sucesión” comienza con dos ejemplos, uno de límite finito de una sucesión y otro de límite infinito de una sucesión, en el sistema de representación gráfico. Posteriormente se plantean sendos ejercicios para su resolución.

Tras el conocimiento del concepto de límite, se presenta las definiciones intuitivas de límite finito y límite infinito de una sucesión, acompañados de ejercicios resueltos.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la presentación del límite de una sucesión e inmediatamente después el límite finito de sucesiones, tanto en los ejercicios resueltos como en las definiciones presentadas.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al comienzo de la unidad a modo reflexión, al finalizar la página y en la conclusión de la unidad. Ninguno de ellos con la especificación de realizarlo de forma intuitiva o de forma formal, aunque todos los resueltos utilizan la forma intuitiva, por lo que hace pensar que el alumnado elegirá esta misma forma de resolución, por tratarse de ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición.

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Sucesiones”. En ella encontraremos introducción, concepto de sucesión, algunos tipos importantes de sucesiones, límite de una sucesión y algunos límites importantes. La unidad cuenta con un total de 18 páginas, de las que las 12 primeras intercalan la teoría y los problemas, resueltos y propuestos. En solo 3 de ellas aparece el límite infinito de una sucesión ocupando realmente una página y media. El resto lo ocupa el límite finito de una sucesión y las sucesiones que no tienen límite.

Durante la unidad se trata, predominantemente, el límite infinito de forma intuitiva, sin obtener que el alumnado alcance con una cierta soltura el lenguaje formal del mismo. Además, el sistema de representación predominante es el verbal, utilizado en toda la unidad, salvo para su primera toma de contacto en la que se utiliza el sistema de representación gráfico.

A2.30. Informe de LSI00007**Ficha libro**

Código	LSI00007		
Título	Matemáticas II. Bachillerato 2º		
Autor	Cólera, J., Oliveira, M.J.		
Año	2009	Ley en vigor	LOE
Editorial	Anaya		

Secuenciación LSI00007

1. Presentación del concepto de límite mediante su contexto histórico.
2. Diferentes ejemplos de reflexión y resolución que tratan sobre límite de funciones.
3. Ejemplos de límite finito y límite infinito de una sucesión.
4. Definición de límite finito, límite más infinito y límite menos infinito de una sucesión en los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico.
5. Ejercicios resueltos propuestos de límite finito, límite más infinito y límite menos infinito de una sucesión.
6. Presentación del número e.
7. Definición de diferentes límites de una función en los sistemas de representación verbal y gráfico.
8. Presentación de diferentes operaciones posibles con el límite de una función, acompañadas de ejercicios propuestos y ejercicios resueltos.

Fenómenos encontrados**LSI00007.01 c-i.i. (v-d)**

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

$\lim s_n = +\infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que s_n sea tan grande como queramos, dándole a n valores suficientemente grandes.

LSI00007.02 i.v.s.i. (v-d)

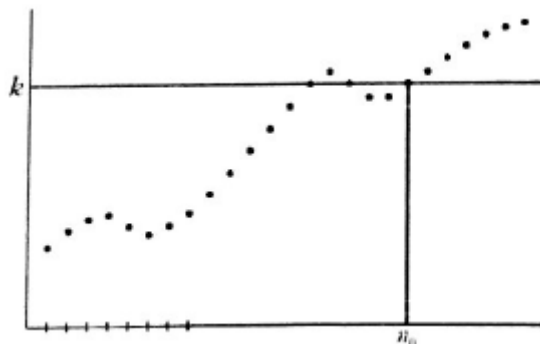
Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Por grande que sea k , podemos encontrar un n_0 tal que

si $n > n_0$ entonces $s_n > k$

LSI00007.03 i.v.s.i. (g-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación gráfico.



Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00007.02		LSI00007.01			
	Gráfico	LSI00007.03					
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Límites de funciones. Continuidad”, ocupando únicamente una página de las 24 que consta la parte en la que se enuncian las definiciones y los primeros ejercicios a resolver. El límite de sucesiones se presenta como paso previo al conocimiento y resolución del límite de funciones.

El apartado “Límite de una sucesión” comienza, a modo de presentación, con ejemplos de sucesiones con límite finito, límite más infinito, límite menos infinito y no existe límite. Posteriormente se define, de manera intuitiva y formal, el límite más infinito de una sucesión en los sistemas de representación verbal y gráfico. Finalmente se proponen algunos ejercicios a resolver por parte del alumnado.

En el libro de texto se sitúa, previo al límite infinito de sucesiones, la reflexión y resolución de algunos ejercicios sobre límites de una función

Durante la unidad se trabaja tanto el límite infinito de manera intuitiva como formal, utilizando los sistemas de representación gráfico y verbal. Dado el poco contenido, dentro

de la unidad, no podemos establecer un análisis exhaustivo y consideraremos su presencia como introducción a contenidos posteriores.

A2.31. Informe de LSI00008

Ficha libro

Código	LSI00008		
Título	2º Bachillerato. Matemáticas II		
Autor	Escoredo, A., Gómez, M.D., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., del Río, J., Sánchez, D.		
Año	2009	Ley en vigor	LOE
Editorial	Santillana		

Secuenciación LSI00008

1. Presentación del concepto de límite de una sucesión a través de la definición del límite finito de una sucesión y la utilización de los sistemas de representación verbal y simbólico, acompañadas de un ejemplo en ambos sistemas de representación.
2. Definiciones del límite infinito de una sucesión. Dos definiciones para el límite más infinito de una sucesión, una intuitiva y otra formal, y dos definiciones para el límite menos infinito de una sucesión, una intuitiva y otra formal.
3. Dos ejemplos a los que se le aplica la definición intuitiva de límite más infinito y de menos infinito de sucesiones.
4. Un ejemplo en el que se aplica la definición formal de límite más infinito de una sucesión.
5. Introducción a las sucesiones que no tienen límite.
6. Ejemplo de sucesión que no tiene límite.
7. Planteamiento de ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición de sucesiones que tienen límite finito, límite infinito o no tienen límite.

Fenómenos encontrados

LSI00008.01 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Dada una sucesión de números reales de término general a_n :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ si para valores muy grandes de n , los términos correspondientes de la sucesión se hacen mayores que cualquier número prefijado.

LSI00008.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

De forma teórica: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ si para cualquier número, k , podemos encontrar un número natural h tal que:
Si $n > h$, se cumple que $a_n > k$.

LSI00008.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ si para valores muy grandes de n , los términos correspondientes de la sucesión se hacen menores que cualquier número prefijado.

LSI00008.04 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

De forma teórica: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ si para cualquier número, k , podemos encontrar un número natural h tal que:
Si $n > h$, se cumple que $a_n < h$.

LSI00008.05.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

3 Comprueba que estas sucesiones tienen límites infinitos.

a) $a_n = n^2 - 1$ 0, 3, 8, 15, 24, ..., 99, ..., 9.999, ...

La sucesión crece indefinidamente

LSI00008.05.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

3 Comprueba que estas sucesiones tienen límites infinitos.

a) $a_n = n^2 - 1$

para cualquier número que prefijemos, a partir de un término de la sucesión todos son mayores que ese número.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = +\infty$$

LSI00008.06.01 d-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

b) $a_n = 1 - 2^n$ $-1, -3, -7, -15, -31, \dots, -1.023, \dots$

Los valores de los términos de la sucesión son cada vez menores

LSI00008.06.02 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.


b) $a_n = 1 - 2^n$ $-1, -3, -7, -15, -31, \dots, -1.023, \dots$

si prefijamos un número, a partir de un término todos son menores que él.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^n) = -\infty$$

LSI00008.07 i.v.s.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Date cuenta 

Comprobamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = +\infty$$

Dado un valor de k muy grande, por ejemplo $k = 10.000$, buscamos h tal que para cualquier $n > h$ se cumple que $a_n > 10.000$.

Si $h = 50 \xrightarrow{n > h} n = 51$
 $a_{51} = 51^2 - 1 \not> 10.000$

Si $h = 100 \xrightarrow{n > h} n = 101$
 $a_{101} = 101^2 - 1 > 10.000$

Obtenemos el mismo resultado para $n = 102, 103, \dots$
 Es decir, para cualquier $n > h$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI00008.01 LSI00008.02 LSI00008.03 LSI00008.04	LSI00008.05.02 LSI00008.06.02 LSI00008.07		LSI00008.05.01		LSI00008.06.01
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de sucesiones se encuentra en la unidad que lleva por nombre: “Límites y continuidad”. En ella encontraremos límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión, límite finito de una función, límite infinito de una función, operaciones con límites, cálculo de límites, resolución de algunas indeterminaciones, límite de una función en un punto, continuidad de una función, Teorema de Bolzano y Teorema de Weierstrass, sumando un total de 2 páginas de presentación, 18 páginas de teoría acompañadas de ejemplos y ejercicios, y 12 páginas de ejercicios resueltos o propuestos. De las 18 páginas de teoría, solamente 2 tratan el límite de una sucesión, 1 para el límite finito y otra para el límite infinito.

En este libro se encuentran primero las definiciones y posteriormente los ejemplos. El apartado comienza con las definiciones formales e intuitivas de límite infinito de una sucesión en el sistema de representación verbal. Concluidas las definiciones, el libro

presenta dos ejemplos en los que podemos observar los siguientes fenómenos intuitivos: crecimiento intuitivo ilimitado y decrecimiento intuitivo ilimitado. Al margen de la página, con el título “Date cuenta”, encontramos un cuadro en el que aparece un ejemplo en el que se utiliza la definición formal y en el que se observa el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito.

En el libro de texto se sitúa, previamente al límite infinito de sucesiones, la presentación del límite de una sucesión e inmediatamente después el límite finito de sucesiones.

Este libro utiliza en mayor medida la presentación formal para las definiciones y por igual la presentación formal y la intuitiva para los ejemplos. Solamente se expresa el límite infinito de sucesiones en el sistema de representación verbal. Pensamos que esto último es debido al poco peso que tiene en la unidad y que es utilizado como paso previo al límite de una función.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar la página y en la conclusión de la unidad. Ninguno de ellos da alguna indicación sobre cómo realizarlo, es decir si de forma intuitiva o de forma formal. Todos ellos son ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición.

A2.32. Informe de LSI01001**Ficha libro**

Código	LSI01001		
Título	Matemáticas I		
Autor	de la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Blanco, J.L., Pérez, C., Sánchez, D.		
Año	2015	Ley en vigor	LOMCE
Editorial	Santillana		

Secuenciación LSI01001

1. Definiciones de “sucesión”, “término de una sucesión” y “término general”, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
2. Definición de sucesiones monótonas y acotadas, acompaña de un ejemplo.
3. Definición de límite de una sucesión acompaña de ejemplos de sucesiones de límite finito, sucesiones de límite infinito y sucesiones sin límite. Propuesta de ejercicios.
4. Nociones de cálculo de límites: límite de potencias, límite de un polinomio, límite de un cociente de polinomios, todos ellos acompañados de ejemplos.
5. Operaciones con límites, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
6. Indicación de los distintos tipos de indeterminaciones, acompañados de ejemplos y ejercicios propuestos.
7. Definición de límite de una función en un punto, acompañada de representación gráfica, ejemplos y ejercicios propuestos.
8. Estudio de las ramas infinitas. Definición, ejemplos y ejercicios propuestos.
9. Estudio de la continuidad de una función. Definición, ejemplos y ejercicios propuestos.
10. Apartado “Saber hacer” en el que se explica paso por paso el límite de sucesiones y funciones a través de ejemplos y ejercicios propuestos complementarios.

Fenómenos encontrados**LSI01001.01 c-i.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } a_n = n^2 &\rightarrow 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 100^2, \dots, 1000^2, \dots \rightarrow \\
 &\rightarrow 1, 4, 9, 16, \dots, 10\,000, \dots, 1\,000\,000, \dots \\
 \text{La sucesión crece indefinidamente} &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty
 \end{aligned}$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal				LSI01001.01		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por título “Límite de una función”. Esta unidad está dedicada, principalmente, al límite de funciones. El límite de sucesiones se presenta a modo introductorio, de hecho, entre ambos límites, límite finito de una sucesión y límite infinito se dedica poco más de media página. La unidad cuenta con un total de 30 páginas, en las que se intercalan definiciones, ejemplos y ejercicios resueltos.

La presentación del límite infinito de una sucesión se realiza a partir de un ejemplo en el sistema de representación verbal, y queda englobado en el apartado de límite de sucesiones, como caso particular a partir del límite finito de una sucesión del que sí se realiza una definición.

Cabe destacar que el manual contiene una gran cantidad de ejercicios resueltos y también de ejercicios propuestos para ser realizados por el alumnado.

A2.33. Informe de LSI01002**Ficha libro**

Código	LSI01002		
Título	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I		
Autor	de la Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Blanco, J.L., Pérez, C., Sánchez, D.		
Año	2015	Ley en vigor	LOMCE
Editorial	Santillana		

Secuenciación LSI01002

1. Definiciones de “sucesión”, “término de una sucesión” y “término general”, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
2. Definición de sucesiones monótonas y acotadas, acompaña de un ejemplo.
3. Definición de límite de una sucesión acompaña de ejemplos de sucesiones de límite finito, sucesiones de límite infinito y sucesiones sin límite. Propuesta de ejercicios.
4. Nociones de cálculo de límites: límite de potencias, límite de un polinomio, límite de un cociente de polinomios, todos ellos acompañados de ejemplos.
5. Operaciones con límites, acompañadas de ejemplos y ejercicios propuestos.
6. Indicación de los distintos tipos de indeterminaciones, acompañados de ejemplos y ejercicios propuestos.
7. Definición, de límite de una función en un punto, acompañada de representación gráfica, ejemplos y ejercicios propuestos.
8. Estudio de las ramas infinitas. Definición, ejemplos y ejercicios propuestos.
9. Estudio de la continuidad de una función. Definición, ejemplos y ejercicios propuestos.
10. Apartado “Saber hacer” en el que se explica paso por paso el límite de sucesiones y funciones a través de ejemplos y ejercicios propuestos complementarios.

Fenómenos encontrados**LSI01002.01 c-i.i. (v-e)**

Identificamos en el siguiente ejemplo el fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } a_n = n^2 &\rightarrow 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 100^2, \dots, 1000^2, \dots \rightarrow \\
 &\rightarrow 1, 4, 9, 16, \dots, 10\,000, \dots, 1\,000\,000, \dots \\
 \text{La sucesión crece indefinidamente} &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty
 \end{aligned}$$

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENOMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal				LSI01002.01		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por título “Límite de una función”. Esta unidad está dedicada, principalmente, al límite de funciones. El límite de sucesiones se presenta como introducción a los límites de funciones, de hecho, entre ambos límites, límite finito de una sucesión y límite infinito se dedica poco más de media página. La unidad cuenta con un total de 30 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos.

La presentación del límite infinito de una sucesión se realiza a partir de un ejemplo en el sistema de representación verbal, y queda englobado en el apartado de límite de sucesiones, como caso particular a partir del límite finito de una sucesión del que sí se realiza una definición.

Cabe destacar que el manual contiene una gran cantidad de ejercicios resueltos y también de ejercicios propuestos para ser realizados por el alumnado.

Quiero aclarar que este manual, pese a ser de la materia “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I” contiene la misma información y presentada de la misma manera que el manual análogo de la materia “Matemáticas I”, por ese motivo el fenómeno identificado es el mismo, así como la secuenciación y los comentarios realizados.

A2.34. Informe de LSI01003**Ficha libro**

Código	LSI01003		
Título	Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1		
Autor	Valverde, M., Llorca, A., del Rincón, R., Sánchez, E., Álvarez, M., Farrús, M., Roig, A., Martínez, P.		
Año	2015	Ley en vigor	LOMCE
Editorial	Edebé		

Secuenciación LSI01003

1. Ejemplo de límite finito de una sucesión y posterior definición.
2. Ejemplo de límite infinito de una sucesión, en el sistema de representación tabular, y posterior definición.
3. Presentación del número e .
4. Operaciones con sucesiones y límites.
5. En los márgenes se encuentran curiosidades históricas y un link para visualizar más características de las nociones anteriormente presentadas.
6. Límites de funciones. Todos ellos se introducen a partir de un ejemplo y posteriormente se presenta una definición de cada uno. El orden seguido es: límite de una función en un punto, límites laterales y límites en el infinito.
7. Procedimientos para el cálculo de límites para funciones polinómicas y racionales.
8. Operaciones con límites.
9. Cálculo de asíntotas.
10. Estudio de la continuidad y tipos de discontinuidad.
11. Colección de problemas resueltos.
12. Colección final de ejercicios y problemas propuestos para ser realizados por el alumnado.
13. Páginas finales donde se realiza una síntesis de la unidad, una evaluación y la presentación de aplicaciones de los límites.

Fenómenos encontrados

LSI01003.01.01 c-i.i. (t-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación tabular.

Veamos qué sucede con la sucesión $b_n = \frac{n^2}{n+1}$:

n	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
a_n	0,5	9,09	99	999	9999	99999	999999

En esta sucesión los términos no se aproximan a ningún número, en cambio a medida que n aumenta los términos se hacen cada vez mayores.

LSI01003.01.02 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

A partir de cierto valor de n , los términos son mayores que cualquier número queelijamos.

LSI01003.02 c-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

El símbolo $+\infty$, que no es un número real, sirve para expresar que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.

LSI01003.03 d-i.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno decrecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Si la sucesión decrece indefinidamente, es decir, a medida que n crece, los términos son tan pequeños como queramos, el límite es $-\infty$.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal			LSI01003.02	LSI01003.01.02	LSI01003.03	
	Gráfico						
	Tabular				LSI01003.01.01		
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión se encuentra en la unidad que lleva por título “Límites”. Esta unidad está dedicada al límite de funciones, y presenta el límite de sucesiones solamente como introducción, de hecho, entre ambos límites, límite finito de una sucesión y límite infinito se dedica apenas una página. La unidad cuenta con un total de 22 páginas, en las que se intercalan definiciones y ejemplos o ejercicios resueltos. Como se ha dicho anteriormente, apenas una página está dedicada al límite de una sucesión. El resto está ocupado por los diferentes límites de funciones.

La presentación del límite infinito de una sucesión se realiza a partir de un ejemplo en el sistema de representación tabular, y posteriormente se presenta una definición de límite más infinito de una sucesión e inmediatamente después una del límite menos infinito de una sucesión. El apartado concluye con la relación de esta noción con el término divergencia.

A lo largo de toda la unidad existen enlaces situados en los márgenes que dirigen a un contenido en internet adicional o de revisión de nociones que debiesen haber sido adquiridas con anterioridad.

A2.35. Informe de LSI01004

Ficha libro

Código	LSI01004		
Título	Matemáticas II		
Autor	Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L., Barbero, F.		
Año	2016	Ley en vigor	LOMCE
Editorial	SM		

Secuenciación LSI01004

1. Introducción a las funciones a partir de un ejemplo real, en el que se presenta la relación de magnitudes utilizando datos de los planetas.
2. Definición de una función, utilizando las nociones de dominio y recorrido.
3. Clasificación del tipo de funciones, acompañada de diferentes ejemplos y colección de ejercicios propuestos.
4. Definición y ejemplos de cada uno de los límites de una función: límite de una función en un punto, límites laterales, límites infinitos y límites en el infinito. Para cada uno de ellos se proponen diferentes ejercicios a resolver por el alumnado.
5. Propiedades de los límites de funciones y cálculo de límites, acompañados de ejercicios resueltos y propuestos.
6. Presentación de diferentes indeterminaciones, acompañadas de ejemplos
7. Presentación de infinitésimos equivalentes.
8. Definición de las siguientes nociones: sucesión, monotonía y acotación.
9. Ejemplo y posterior definición de límite finito de una sucesión.
10. Ejemplo y posterior definición de límite infinito de una sucesión.
11. Sucesiones oscilantes, que el libro de texto considera como “otras sucesiones”.
12. Procedimientos de cálculo de límites de sucesiones.
13. Continuidad de una función y tipos de discontinuidad. Dichas nociones están acompañadas de diferentes ejemplos.
14. Teorema de Bolzano y Propiedad de Darboux, acompañados de ejemplos y ejercicios propuestos.
15. Teorema de Weierstrass acompañado de ejemplos y ejercicios propuestos.
16. Definiciones formales de los diferentes límites de una función.
17. Resumen de la unidad.
18. Colección de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos para resolver por parte de alumnado.

Fenómenos encontrados

LSI01004.01 c-i.i. (v-e)

Identificamos en el siguiente fragmento un ejemplo del fenómeno crecimiento intuitivo ilimitado en el sistema de representación verbal.

Por otro lado, la sucesión $b_n = 2n$ verifica que sus términos se hacen cada vez mayores; es decir, *tienden a $+\infty$* : $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 6, b_4 = 8, b_5 = 10 \dots$

Se dice que el límite de la sucesión es $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

LSI01004.02 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso más infinito, en el sistema de representación verbal.

Los términos de una sucesión *se hacen cada vez mayores o tienden a $+\infty$* si para cualquier número real positivo M se puede encontrar un término de la sucesión tal que todos los términos son mayores que M a partir de él.

LSI01004.03 i.v.s.i. (v-d)

Identificamos en el siguiente fragmento una definición del fenómeno de ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, en este caso menos infinito, en el sistema de representación verbal.

De la misma forma, los términos de una sucesión *tienden a $-\infty$* si para cualquier número real negativo M se puede encontrar un término de la sucesión tal que todos los términos sean menores que M a partir de él.

Ficha fenomenológica y sistemas de representación

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI01003.02 LSI01003.03			LSI01003.01		
	Gráfico						
	Tabular						
	Simbólico						

Comentarios

El límite infinito de una sucesión no tiene un apartado propio, ya que se encuentra englobado con el resto de las nociones asociadas a una sucesión. La unidad donde se encuentra lleva por título “Límites de funciones. Continuidad”. En ella el límite infinito de una sucesión ocupa poco más de un párrafo, ya que solo se dedica una página a la noción de sucesión. El resto de la unidad lo ocupa el límite de funciones, tanto definiciones como ejemplos y ejercicios propuestos.

En este libro se encuentran primero los límites de funciones y posteriormente, como caso particular, se presentan los límites de sucesiones. Para algunas nociones se utilizan primero algunos ejemplos y después una definición, mientras que para otras se utiliza el orden inverso. El límite infinito de una sucesión se sitúa inmediatamente después a una definición del límite finito de una sucesión.

Los ejercicios planteados para la realización por parte del alumnado se sitúan al finalizar cada uno de los apartados, y también al concluir la unidad.

A3. Anexos Capítulo 6. Fenomenología del límite infinito de una sucesión en profesorado de Educación Secundaria en formación

Los anexos de este capítulo se componen de 5 subapartados:

En A3.1. se muestra la carta de presentación dirigida al alumnado participante en los grupos de debate, el cuestionario de la fase espontánea y el cuestionario de la fase inducida.

En A3.2. se detalla la referencia de cada uno de los fragmentos que han sido empleados en los cuestionarios para su posterior discusión.

El subapartado A3.3. contiene la transcripción de los 8 grupos de debates, presentados de forma que se preserve el anonimato de todos sus componentes.

En A3.4. se presentan los informes grupales de 7 de los 8 grupos. Recordamos que el grupo A sirvió ya como ejemplo en el apartado 6.3.1.

De forma análoga se muestran, A3.5, los informales individuales de 26 de los 27 participantes en los debates de discusión.

A3.1. Cuestionario presentado

Carta de presentación

Nombre y apellidos:

Titulación de acceso al Máster:

Expedida por la Universidad de:

Año en el que obtuvo la titulación:

Experiencia docente previa: Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo indique donde, nivel académico y años de experiencia:

Está interesado/a en participar en una entrevista explicativa de sus respuestas: Sí ☐ No ☐

En estos momentos me encuentro realizando una investigación didáctica centrada en la noción de límite infinito de una sucesión.

En los centros de secundaria y bachillerato españoles se utilizan diferentes presentaciones de la noción indicada, utilizando diferentes sistemas de presentación, así como distintos formatos, por citar solamente algunos casos documentados.

En cualquiera de ellas solemos iniciar la secuenciación de la noción de límite infinito de una sucesión apoyándonos, por ejemplo, en casos particulares o presentado las ideas de una manera intuitiva o informal.

En la fase actual, pretendo analizar, mediante debates en pequeños grupos, en qué medida mis conclusiones provisionales se acercan a los tratamientos que distintos/as profesores/as en formación utilizarían en clase para esta noción matemática.

Para organizar este debate se proporcionan once fragmentos referentes a la noción de límite infinito de una sucesión. Algunos de ellos han sido obtenidos de libros de texto de diferentes editoriales y periodos educativos, mientras que otros han sido elaborados por el propio equipo de investigación.

Debatan si utilizarían o no cada uno de los fragmentos presentados cuando tengan que realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje del límite infinito (más y menos infinito). Además, indiquen el porqué de esta decisión. Para facilitar su análisis, les pido que, utilizando cualquier dispositivo de grabación, como por ejemplo su teléfono móvil, guarden el audio del debate llevado a cabo por los miembros del grupo. La grabación se iniciará con la presentación de cada miembro, donde se indicará su nombre y apellidos, de tal forma que facilite la identificación de su voz.

Para una organización de ideas, y que pueda facilitar el hilo conductor del debate, tengan en cuenta las siguientes sugerencias:

- 1.- Cursos o niveles en los que trabajaría cada uno de los fragmentos propuestos.
- 2.- Dificultades que sus futuros/as alumnos/as cree que encontrarían.
- 3.- Las preferencias que ustedes tienen hacia algunos de los fragmentos para su uso en el aula.

En el momento del debate, pueden intentar establecer los detalles que distinguen, en los procesos de enseñanza, diferenciando por ejemplo los acercamientos "intuitivos" de los acercamientos más formales.

Toda la información recopilada se procesará de manera que se respete el anonimato de cada uno de los miembros de cada grupo.

Muchas gracias por su colaboración.

Mónica Arnal Palacián

Cuestionario Fase espontánea

Fragmento A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \text{ se puede encontrar un } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

Fragmento B

1, 4, 9, 16, 25, ...

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = n^2$, tiende a infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

Fragmento C

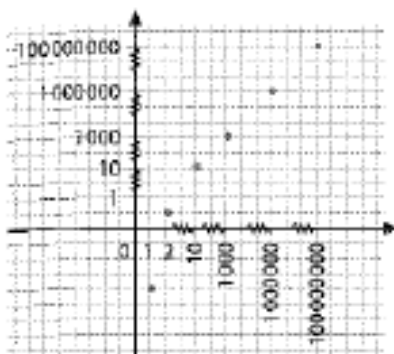
Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-999 999 999	...	tiende a $-\infty$

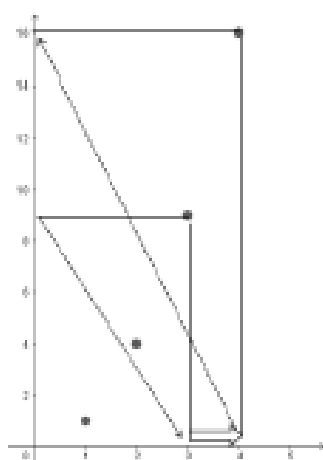
Fragmento D

Sea la sucesión $a_n = \frac{n^2-3}{n}$. Si se representa gráficamente puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.



Fragmento E

Sea la sucesión $a_n = n^2$.



Dado $H \in \mathbb{Q}$, existe un v número natural, por ejemplo, $v=5$

Con $n \geq v$, ejemplo $n = 4$, tenemos

$$a_4 = 16 > 0 = H$$

$$H = 16, n = 5 \rightarrow a_5 = 25 > 16$$

$$H = 25, n = 6 \rightarrow a_6 = 36 > 25$$

...

$$H = 160, n = 11 \rightarrow a_{11} = 121 > 160$$

...

$$H = 10\,000, n = 101 \rightarrow a_{101} = 10\,201 > 10\,000$$

donde $n(H) = \lfloor (\sqrt{H}) \rfloor + 1$, si $H \geq 1$

Como consecuencia de las operaciones realizadas en el cuadro de la derecha, el límite es más infinito.

Fragmento F

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , siendo K un cuerpo ordenado, existe un número natural v , tal que es

$$a_n > H, \text{ para todo } n \geq v.$$

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es

$$a_n < H, \text{ para todo } n \geq v.$$

Fragmento G

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el “listón” se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Fragmento H

Sea la sucesión $a_n = n^2$.

n	4	5	6	7	8	...	93	...	9.993
a_n	16	25	36	49	64	...	8.649	...	99.860.049
H	10	17	28	39	50	...	8.609	...	99.840.089
v	3	4	5	6	7	...	92	...	9.992

Dado $H = 9$, existe un v número natural $v = 3$ tal que $n \geq v$, $n = 4$, tenemos $a_n = 16 > 9 = H$ donde $n(H) = \lfloor (\sqrt{H}) \rfloor + 1$, si $H \geq 0$.

Esta $n(H)$ se obtiene resolviendo la inecuación $n^2 > H$. Se ha tomado la parte entera de \sqrt{H} para que n sea un número natural y se le ha sumado 1 para que sea mayor que el v fijado.

Como resultado de los cálculos realizados, el límite de dicha sucesión es más infinito.

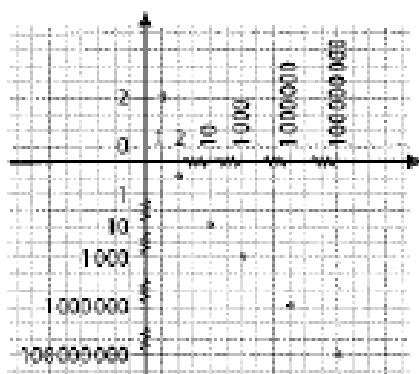
Fragmento I

$-1, -4, -9, -16, -25, \dots$

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = -n^2$, tiende a menos infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes en valor absoluto, pero negativos, como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

Fragmento J

Sea la sucesión $a_n = -\frac{n^2-3}{n}$. Como puede observarse, los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto, pero, al ser negativos, se dice que tienden a $-\infty$.



Fragmento K

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?
Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	tiende a $+\infty$

Entre los fragmentos presentados anteriormente:

- 1) Ordenen aquellos que sí utilizarían si tuviesen que presentarlos en el aula, como si de una secuencia didáctica se tratase. Para facilitar el orden que tenga lugar en el debate grupal puede utilizar la siguiente tabla. Finalmente, para que quede registrada en su grabación, lean el orden establecido.

Utilizaríamos al principio

Utilizaríamos al final

- 2) Justifiquen el orden presentado, indicando sus razones principales.

Cuestionario Fase inducida

Nombres y apellidos:

Recordatorio: Los fenómenos caracterizados han sido: ida y vuelta en sucesiones con límite infinito (i.v.s.i.), crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.) y decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.).

Fragmento A

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$.

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento B

1, 4, 9, 16, 25, ...

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = n^2$, tiende a infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento C

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

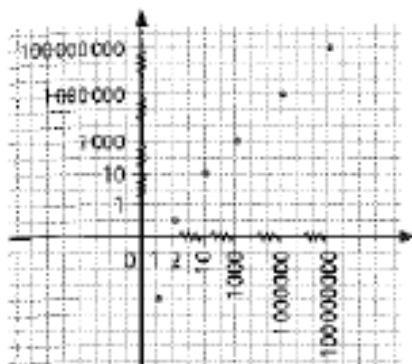
Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-999 999 999	...	tiende a $-\infty$

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento D

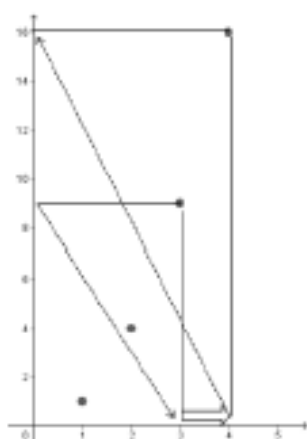
Sea la sucesión $a_n = \frac{n^2-3}{n}$. Si se representa gráficamente puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.



i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento E

Sea la sucesión $a_n = n^2$



Dado $H=9$, existe un n número natural, por ejemplo, $n=3$
 Con otro ejemplo $n=4$, tenemos
 $a_4 = 16 > 9 = H$
 $H = 16, n = 5 \rightarrow a_5 = 25 > 16$
 $H = 25, n = 6 \rightarrow a_6 = 36 > 25$
 ...
 $H = 100, n = 11 \rightarrow a_{11} = 121 > 100$
 ...
 $H = 10\,000, n = 101 \rightarrow a_{101} = 10\,201 > 10\,000$
 donde $n(H) = \lfloor (\sqrt{H}) \rfloor + 1$, si $H \geq 1$

Como consecuencia de las operaciones realizadas en el cuadro de la derecha, el límite es más infinito.

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento F

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , siendo K un cuerpo ordenado, existe un número natural v , tal que es

$$a_n > H, \text{ para todo } n \geq v.$$

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es

$$a_n < H, \text{ para todo } n \geq v.$$

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento G

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el “listón” se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento H

Sea la sucesión $a_n = n^2$

n	4	5	6	7	8	...	93	...	9.993
a_n	16	25	36	49	64	...	8.649	...	99.860.049
H	10	17	28	39	50	...	8.469	...	99.840.086
v	3	4	5	6	7	...	92	...	9.992

Dado $H = 9$, existe un v número natural $v = 3$ tal que $n \geq v$, $n = 4$, tenemos $a_n = 16 > 9 = H$ donde $n(H) = \lfloor (\sqrt{H}) \rfloor + 1$, si $H \geq 0$.

Esta $n(H)$ se obtiene resolviendo la inecuación $n^2 > H$. Se ha tomado la parte entera de \sqrt{H} para que n sea un número natural y se le ha sumado 1 para que sea mayor que el v fijado.

Como resultado de los cálculos realizados, el límite de dicha sucesión es más infinito.

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento I

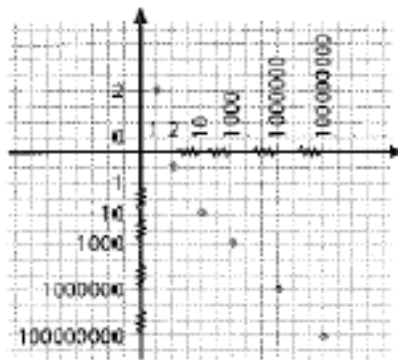
$-1, -4, -9, -16, -25, \dots$

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = -n^2$, tiende a menos infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes en valor absoluto, pero negativos, como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento J

Sea la sucesión $a_n = -\frac{n^2-3}{n}$. Como puede observarse, los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto, pero, al ser negativos, se dice que tienden a $-\infty$.



i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

Fragmento K

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	tiende a $+\infty$

i.v.s.i. ☐ c-i.i. ☐ d-i.i. ☐ Ninguno de ellos ☐

A3.2. Fragmentos utilizados

Los fragmentos A, B, C, D, F, G, I y J fueron seleccionados de libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato y manuales universitarios, mientras que los fragmentos E y H fueron creados por el equipo investigador, ante la ausencia de ejemplos del enfoque formal para los sistemas de representación tabular y gráfico.

En el caso de los fragmentos correspondientes a la selección se transcribieron para que la calidad de la imagen no incidiese en el debate del alumnado.

A continuación, presentamos los fragmentos utilizados en el cuestionario, el fragmento original y la referencia bibliográfica.

Fragmento A cuestionario

Fragmento A

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$.

Fragmento A original

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$.

Referencia

Vizmanos, J.R., Hernández, J., & Alcaide, F. (2008). *Matemáticas 2. Ciencias y tecnología*. Editorial SM.

Fragmento B cuestionario

Fragmento B

1, 4, 9, 16, 25, ...

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = n^2$, tiende a infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

Fragmento B original

1, 4, 9, 16, 25...

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = n^2$, tiende a infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

Referencia

Martín, M.A., Morán, M., Rey, J.M., Reyes, M. (2001). *Matemáticas. Bachillerato 1. Ciencias de la naturaleza y la salud*. Tecnología. Editorial Bruño.

Fragmento C cuestionario

Fragmento C

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-999 999 999	...	tiende a $-\infty$

Fragmento C original

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	-99 999 999	...	tiende a $-\infty$

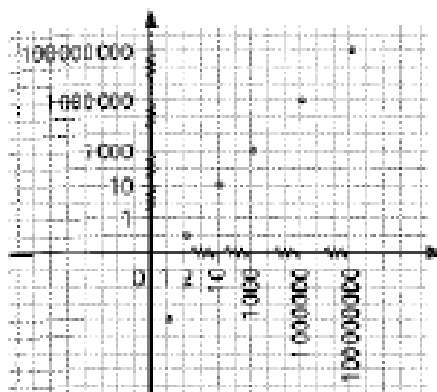
Referencia

Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (2002). *Algoritmo. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1*. Editorial SM

Fragmento D cuestionario

Fragmento D

Sea la sucesión $a_n = \frac{n^2-3}{n}$. Si se representa gráficamente puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente.



Fragmento D original

$$a_n = \frac{n^2 - 3}{n}$$

Si se construye una tabla de valores y se representa gráficamente, puede observarse que los términos de la sucesión crecen indefinidamente (figura 4.4).

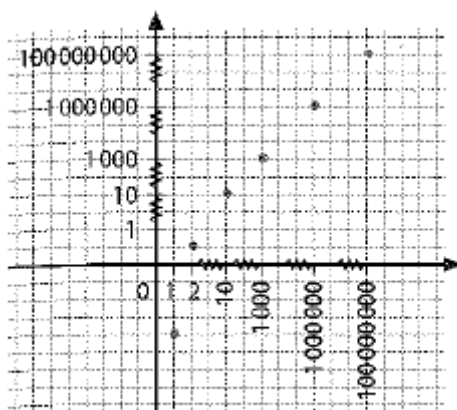


FIGURA 4.4.

Referencia

Bescós, E. y Pena, Z. (2001). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Bachillerato 1*. Editorial Oxford.

Fragmento E cuestionario y original**Fragmento E**

Sea la sucesión $a_n = n^2$

Dado $H=9$, existe un n número natural, por ejemplo, $n=3$

Con $n \geq n_0$, ejemplo $n = 4$, tenemos

$$a_4 = 16 > 9 = H$$

$H = 16, n = 5 \rightarrow a_5 = 25 > 16$

$H = 25, n = 6 \rightarrow a_6 = 36 > 25$

...

$H = 100, n = 11 \rightarrow a_{11} = 121 > 100$

...

$H = 10\,000, n = 101 \rightarrow a_{101} = 10\,201 > 10\,000$

donde $n(H) = \lfloor \sqrt{H} \rfloor + 1$, si $H \geq 1$

Como consecuencia de las operaciones realizadas en el cuadro de la derecha, el límite es más infinito.

Fragmento F cuestionario

Fragmento F

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , siendo K un cuerpo ordenado, existe un número natural v , tal que es

$$a_n > H, \text{ para todo } n \geq v.$$

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es

$$a_n < H, \text{ para todo } n \geq v.$$

Fragmento F original

Definición: Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . Se dice que la sucesión tiene por límite “infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v tal que es

$$|a_n| > H, \text{ para todo } n \geq v, \text{ con } n \in N.$$

Se escribe

$$\lim a_n = \infty.$$

2.2. En la definición anterior se pueden considerar dos casos particulares: sucesiones con límite $+\infty$, y con límite $-\infty$.

Definiciones: La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es

$$a_n > H, \text{ para todo } n \geq v.$$

La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “menos infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es

$$a_n < H, \text{ para todo } n \geq v.$$

Se escribe respectivamente

$$\lim a_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim a_n = -\infty.$$

Referencia

Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Editorial Reverté.

Fragmento G cuestionario**Fragmento G**

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión

$$a_n = n^2 + 1?$$

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el “listón” se pueden encontrar términos que lo superen. Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Fragmento G original

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Los términos se van haciendo cada vez mayores, pero de tal manera que por alto que sea el «listón» se pueden encontrar términos que lo superen.

Si fijamos un valor muy alto, por ejemplo $K = 100\,000\,000$, entonces para cualquier valor de n mayor que $n^* = 10\,000$, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado:

$$10\,000^2 + 1 = 100\,000\,001 > K$$

Referencia

Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (2002). Algoritmo. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1. Editorial SM

Fragmento H cuestionario y original

Fragmento H

Sea la sucesión $a_n = n^2$

n	4	5	6	7	8	...	93	...	9993
a_n	16	25	36	49	64	...	8.649	...	99.860.049
H	10	17	28	39	50	...	8.469	...	99.840.086
v	3	4	5	6	7	...	92	...	9992

Dado $H = 9$, existe un v número natural $v = 3$ tal que $n \geq v$, $n = 4$, tenemos $a_n = 16 > 9 = H$ donde $n(H) = \lfloor (\sqrt{H}) \rfloor + 1$, si $H \geq 0$.

Esta $n(H)$ se obtiene resolviendo la inecuación $n^2 > H$. Se ha tomado la parte entera de \sqrt{H} para que n sea un número natural y se le ha sumado 1 para que sea mayor que el v fijado.

Como resultado de los cálculos realizados, el límite de dicha sucesión es más infinito.

Fragmento I cuestionario

Fragmento I

$-1, -4, -9, -16, -25, \dots$

Esta sucesión, cuyo término general es $a_n = -n^2$, tiende a menos infinito, pues sus términos se pueden hacer tan grandes en valor absoluto, pero negativos, como se quiera con tal de avanzar suficientemente en la sucesión.

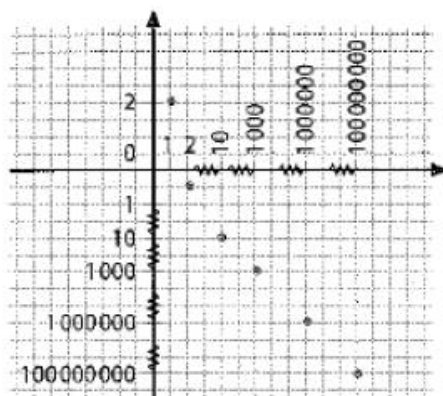
Fragmento I original

Por equivalencia a fragmento B.

Fragmento J cuestionario

Fragmento J

Sea la sucesión $a_n = -\frac{n^2-3}{n}$. Como puede observarse, los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto, pero, al ser negativos, se dice que tienden a $-\infty$.



Fragmento J original

Si se representa la sucesión opuesta a la anterior, $a_n = \frac{n^2-3}{n}$, se obtiene la figura 4.5.

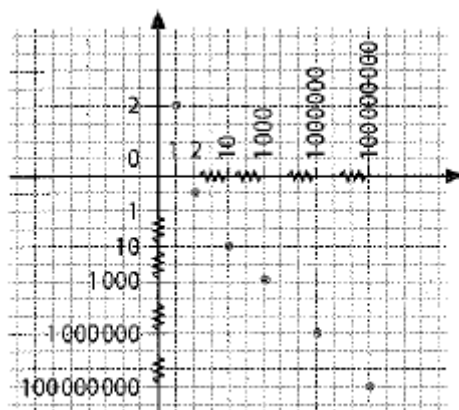


FIGURA 4.5.

Referencia

Bescós, E., & Pena, Z. (2001). Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Bachillerato 1. Editorial Oxford.

Fragmento K cuestionario

Fragmento K

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión

$$a_n = n^2 + 1?$$

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	...	tiende a $+\infty$

Fragmento K original

Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	10 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	2	101	10 001	1 000 001	100 000 001	...	tiende a $+\infty$

Referencia

Vizmanos, J.R., & Anzola, M. (2002). Algoritmo. Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1. Editorial SM

A3.3. Transcripciones de los grupos

En este anexo se encuentran las transcripciones de los 8 grupos participantes en los debates.

En ellas se indica el interlocutor de cada comentario, otorgándole la misma codificación que en la presentada en su análisis, de forma que se preserve el anonimato de todos los participantes. Además, se ha incluido el código H.28 para la persona excluida de la muestra, por no tener ningún comentario categorizado, al participar en el debate del grupo H.

Como ya se indicó en el apartado 6.1, dada la existencia de dos debates realizados por cada grupo, se especifica si cada uno de ellos corresponde a la fase espontánea o a la fase inducida.

En el transcurso de los debates se produjeron algunas palabras malsonantes que han sido sustituidas por “\$%&”.

A3.3.1. Transcripción. Grupo A.

Fase espontánea

A.01: Yo creo que lo que vamos a hacer según lo que nos han dicho en primer lugar vamos a comentar fragmento a fragmento las dificultades que hemos ido encontrando, y luego individualmente vamos a decir que lista haríamos en orden dificultad, de cómo se debería presentar en clase y las razones, justificándolo un poco, ¿vale? Así que si queréis vamos viendo uno a uno y vamos viendo las dificultades que están. ¿Quiere empezar alguien? ¿Empiezo yo?

A.03: Empieza tú si quieres.

A.01: Bueno vale. El primero es una definición matemática, o sea, lenguaje puramente matemático, no sé si incluso vosotros lo veis, lo sabéis leer.

A.02: Yo no lo entiendo. Lo sé leer. Porque lo sé leer, no es que diga, hay un símbolo que no entiendo, saberlo leer lo sé leer, pero si me lo pones así solo, tal cual, me cuesta un rato, ¿sabes? Y aún así, me cuesta un rato. El M lo veo confuso, las n no tanto y las a_n no tanto porque sé que forma parte de la terminología de sucesiones, pero el M lo veo bastante confuso.

A.01: Vale. O sea, yo este tipo de notación digamos empecé a estudiarla en la carrera directamente.

A.03: Sí, en la universidad, yo también.

A.01: En el instituto me ponía algo de esto y algún profesor me puso algo de esto y nadie sabía qué “\$%&” era la A del revés, ni la M , ni las a_n , ni qué es esto. Esto sí porque es un lenguaje que a priori no se entienden institutos, universidad se empieza a dar. Yo en primero de carrera en matemáticas se daba tal cual, en Análisis y Cálculo de primero.

A.04: Nosotros lo hacíamos antes.

A.01: ¿Vosotros en Italia lo hacíais antes?

A.02: O sea, es que esto los profesores no te lo explican. En realidad, en los libros está siempre, las cosas escritas con lenguaje matemático están en los libros siempre, de la ESO....

A.03: Segundo de Bachillerato ya aparece.

A.02: No, no, y en 4º ESO también aparece. El profe no te lo explica y tú lo ignoras, pero en 4º estas cosas aparecen en el libro, y en 3º. Siempre aparecen. Lo que pasa que en general, ni los profes te piden nunca que lo expreses así, ni lo expresan ellos tampoco nunca así.

A.03: Es muy formal.

A.01: Yo a mí me ponen esto así en 4º de la ESO e incluso en Bachillerato, tal cual, y no sé leerlo, a no ser que el profesor te explique paso a paso qué narices significa.

A.03: Qué significa cada cosa.

A.01: El fragmento A. El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno...

A.02: Pero así, aparte ¿para qué serviría, sabes?

A.01: En realidad, es la misma definición en todos.

A.02: Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor?

A.04: Porque es mucho más sintético.

A.02: Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no?

A.04: Porque es menos ambiguo. Yo si el nivel general...

A.03: Presentaría muchas dificultades. De comprensión.

A.04: Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta.

A.02: No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.

A.01: Sí, sin duda.

A.02: Porque aparte de entender el lenguaje, aunque yo te lo traduzca, este símbolo significa tal, este significa tal y este significa tal. Aun así, requiere de un nivel de abstracción importante como definición.

A.04: Estamos hablando de distintos niveles de educación, pero nosotros lo hacíamos. Ahora no sé si los niños, si los chicos lo hacen.

A.02: Que lo hagas no significa que sea lo mejor ¿no? O sea, yo lo que quiero decir es que tú lo puedes entender y otra es que tú tengas mejor manera de dar la definición a estudiantes de instituto es esta.

A.04: Algo que es después.

A.03: Es para universidad está claro. Yo creo que esto nivel de Bachillerato orientado o bien universidad.

A.01: Exactamente.

A.02: ¿Además para qué se usa? Bueno me han enseñado todas estas notaciones porque yo las llevo utilizar, pero nunca se han utilizado para explicar. Quiero decir, en la universidad se utilizaban, porque tú luego en la universidad tenías que demostrar cosas, tenías que escribirlas, y entonces, como a ti se te iba a requerir que escribieras ciertas cosas con este lenguaje también lo utilizabas.

A.04: Sí, la diferencia es que a ti no te pedían estas cosas.

A.02: ¿Qué lo escribieras así?

A.04: Sí.

A.01: Sí, en Italia se ve de una forma más formal las matemáticas, al menos a nivel de lo que llamaríamos alto ESO o Bachillerato.

A.02: Suponiendo que no lo pides...

A.01: Yo creo que esta definición tal cual sería una definición complementaria a una explicación previa.

A.04: Absolutamente.

A.01: Y a un nivel, ya no te digo de Bachillerato, sino quizás universidad, y sobre todo si quieres enseñar, digamos dar la herramienta del lenguaje matemático para expresar ideas, en este caso expresar límites. Hay otras muchas definiciones que yo las veo mucho mejores, más fáciles, mucho más sencillas de comprender y de asimilar tanto para Bachillerato como para la ESO, de manera previa.

A.03: ¿El B qué tal?

A.01: El B, a mí es uno de los que más gusta.

A.03: A mí también.

A.01: De hecho, sino es el segundo el tercero.

A.03: El análogo sería el I.

A.01: Eso es. No el D. Ah no, que tengo aquí apuntado, el I.

A.03: El I es exactamente igual nada más que para sucesión negativa.

A.01: Hay dos o tres que están emparejados.

A.03: Entonces, yo éste la verdad me ha gustado, quizás el que más de todos. Para introducir lo que es el concepto de límite infinito.

A.04: Sí, yo también.

A.03: De cara a la ESO.

A.04: Sí, sí, para empezar.

A.03: Básicos, eso es.

A.04: Yo tenía la duda entre este y el fragmento K.

A.03: Ah, el K también, sí. Efectivamente, el de la tablita.

A.02: A mí me gusta más con la tabla.

A.04: Yo lo haría a la vez.

A.02: Pero vamos, que son iguales.

A.03: Para mí exactamente, opino lo mismo. Tengo el mismo orden. Sería, o bien usar la tabla y luego poner el caso del ejemplo típico de los números, o bien al contrario, pero sí, en cuanto a dificultad los dos son los más idóneos para empezar a trabajar el concepto de límite infinito.

A.01: A mí, un pequeño apunte, me supone un poco de dificultad el cambio de la sucesión, el C por ejemplo es el mismo que el K en negativo, por verlo aquí directamente. O sea, lo de $n^2 - 1$ no sé por ver la idea de que el número se va haciendo cada vez más grande en lugar de darte un número que lo mismo coincide en centenares, millares, vas viendo que pum, pum, pum.

A.03: Por eso yo trabajaría primero con el B porque lo único que estás haciendo es trabajar con números, o sea, no te molestas en ya identificar lo que es término general de la sucesión.

A.02: Sí lo hacen.

A.03: Sí, pero ya te dan lo que es la sucesión, aunque te diga el término general, pero no te tienes que calcular tú los términos de la sucesión.

A.02: Aquí tampoco, ¿no? Casi igual que este.

A.01: Sí, tienes la tabla con los términos que van alcanzando. Aquí te dan los casos iniciales que vas viendo como crece y te dice esto tiende a infinito, y en el otro te va diciendo oye mira si te vas a un $a_{10\ 000}\dots$

A.03. Es un matiz muy leve porque aquí ya te tienes que fijar en lo que es la sucesión porque para empezar tienes el n por un lado que se pueden equivocar, porque el n va tendiendo a más infinito en el caso del C y sin embargo la sucesión tiende a menos infinito, entonces eso ya puede llevar ya un poco... Para mí, para mí, mi opinión personal, yo empezaría con el D y luego explicaría lo que es la tablita, que sería el K, efectivamente. Pero vamos, eso sería mi punto de vista.

A.02: Desde luego, por orden de dificultades, este es menos profundo que este.

A.03: Claro, y luego ya, los análogos en negativo, para explicar el término menos.

A.02: A mí es que este no me gusta mucho en realidad, el D, no porque os quiera convencer. No, no me gusta mucho, me parece mejor este que especifica el a_n , me parece más explicativo, ¿sabes? Me parece que elegir usar este (C) o este (B), usaría este (B) que es más explicativo. Y si tuviera que ir avanzando, usaría este (C).

A.03: Cuando dices este es el C.

A.02: Sí el B y el C. El C me parece que dice lo mismo que el B, pero mejor. A lo mejor cambiaría el 10 y el 100 por un 2 y un 3. Ahí sí que veo lo que tú dices.

A.01: Al B veo que le falta el término a_1, a_2, a_3 para que vayas viendo que el n , que el a_n , la relación entre a_1 y el 1^2 , el a_2 y el 2^2 , eso es lo que le falta al B desde mi punto de vista. Entonces el C lo complementa, pero con unos términos muy grandes para indicar yo creo va tendiendo a números muy grandes.

A.03: Y sobre todo lo que yo he visto es que a mi incluso me ha llevado un poco... me ha costado un poco entenderlo porque te pone por un lado el n tendiendo a más infinito y luego el a_n que tiende a menos infinito, cuando en realidad tú lo que estás viendo es la sucesión.

A.04: Pero nosotros estamos hablando del K.

A.01: Del C y del K.

A.04: Pero yo trabajaría antes las sucesiones que van a infinito.

A.01: Entonces primero las positivas y luego las negativas. Para mí van unas después que las otras.

A.04: Sí.

A.01. Sí. Primero la positiva y luego la negativa.

A.04: Para mí estas dos representaciones me parecen más o menos equivalentes, pero aquí el fragmento K puedes trabajar con n^2 , y yo haría más una distinción en el nivel o lo que entienden los alumnos. Tú puedes utilizar estas dos definiciones con alumnos que entienden de forma distinta, por ejemplo, a ti (A.01) te gusta más a B, a A.02 le gusta más la K, porque ella entiende mejor la K, tú (A.01) entiendes mejor la B, pero para mí son más o menos equivalentes dependiendo de cómo la persona aprende.

A.02: Sí que hay un punto que tú has dicho de que esto es confuso, a mí me parece que esto es importante, es importante que tu sepas que mientras n decrece...

A.04: Estamos hablando del fragmento C.

A.02: Ah sí, del propio C, sí perdón, es que no me estoy enterando. A ver, en el fragmento C, a mí sí me parece que es un concepto clave de entender las sucesiones que la n siempre va a crecer y que luego tú, bueno, así en plan, sí siempre va a crecer, pero sin embargo lo otro puede decrecer, que no me parece liso que te digan la n crece y lo otro decrece, o sea, ¿en lo que sucede lo tiene que explicitar no?

A.03: No exactamente, no estoy de acuerdo.

A.02: ¿Y entonces cómo explicas tú las que tienden a menos infinito?

A.03: El límite de la sucesión, el n evidentemente siempre tiende a más infinito. Yo lo que estoy diciendo es, simplemente, que puede llevar a un equívoco poner que n tiende a más infinito, tendría que poner solamente que a_n tiende a más infinito o a menos infinito, porque ya evidentemente se ve por la tabla que n va creciendo, los términos van sucesivos.

A.02: Entiendo lo que quieres decir, lo que pasa que lo que yo quiero decir es que meter dentro de la misma tabla, aquí yo entiendo que lo podrías sacar de la tabla, simplemente como conclusión.

A.03: Alguien que no se entere bien, puede llevarle eso a confusión. Es mi opinión.

A.02: Sí, sí, pero la cosa es que, al estar metido dentro de la tabla, si tú pones dentro de una tabla, aquí tiende a más infinito, arriba tienes que poner a qué se corresponde la n no puedes no poner nada.

A.03: Es que no estás calculando el límite de n , estás calculando el límite de la sucesión.

A.04: Con n que va a más infinito.

A.02: Es cuando n va a infinito, no es para cualquier n . ¿sabes lo que te quiero decir? No es para n un millón, es para n infinito. Igual yo quitaría este trozo de la tabla, dejaría que la sucesión tiende a más infinito.

A.01: Conforme va creciendo n , a_n tiende a infinito.

A.03: La idea de la tabla me gusta. Simplemente, a mí me ha llevado a equívoco el fragmento C, porque he visto por un lado tiende a más infinito y me he tenido que fijar bien porque digo ¿tiende a más infinito? Si debería tender a menos infinito, y entonces me he dado cuenta que abajo es cuando a_n pone que tiende a menos infinito. Entonces si tú a un chico le pones esta tabla se puede hacer un lío. Sobre todo que ponga tiende a más infinito y luego tiende a menos infinito.

A.02: Claro, pero yo creo que tú te has hecho un lío porque ya sabías lo que tenía que dar, ¿no?

A.04: Puede ser, puede ser que haya problemas.

A.03: Yo te digo lo que yo opino.

A.02: Que sí, y esto lo que opino yo, que no pasa nada, jajaja.

A.03: No, es que no me he hecho un lío, simplemente es que para mí sobra el tiende a más infinito del n .

A.04: No peleamos.

A.01: Venga, si luego cada uno va a decir su lista, no hay que empezar a discutir. No tiene por qué haber solución común. Al final de la grabación vamos a decir la lista, el orden, la

justificación, el porqué, uno a uno. No es un debate para llegar a una conclusión común, sino que simplemente digamos. Venga, fragmento D. Cosas del fragmento D. Lo primero en la gráfica está, como decirlo, a mí me supone esto siempre una representación errónea.

A.03: (Afirma)

A.01: Porque no va creciendo igual, es una gráfica contraída.

A.03: Efectivamente.

A.01: Y contraída no de igual manera en cada fragmento de la contracción.

A.03: A mí no me ha gustado los ejes, cómo están puestos.

A.04: A mí no me ha dado ningún problema, en general.

A.01: A mí eso de que la distancia entre el 1 y el 2 sea la misma que entre el 2 y el 10, y que entre el 10 y el 1000, y que el 1000 y el 1000000.

A.04: Estoy acostumbrada a este tipo de ... (no termina la frase)

A.01: Claro, pero yo creo que este tipo en un nivel de la ESO en general puede chocar bastante.

A.03: Es complicado.

A.01: Puede chocar que una gráfica se contraiga en cierto fragmento y además aquí se contrae 8 puntos, aquí se contrae 990, aquí se contrae novecientos mil no sé cuántos, ...

A.03: Da la sensación qué es una recta.

A.04: Sí, no lo había pensado.

A.01: Que en realidad, la forma de la gráfica, si lo quieres ver así, no es una parábola tal cual sino que está muchísimo más estirada, porque los términos van surgiendo, por eso esa contracción creo que puede suponer un problema a la hora de enseñarlo en ciertos niveles, si haces hincapié en la contracción de la gráfica exactamente y te centras en la sucesión como una gráfica y de cómo esa gráfica va tendiendo hacia un número muy grande conforme el eje va aumentando cada vez más puede ser una forma bastante visual de enseñar lo qué es el límite.

A.04: Es que además estoy acostumbrada a realizar cortes en los ejes.

A.01: A ver, a mí el D y su análogo con la sucesión negativa no me parece malo, me parece una forma de... no de los que más me gustan, pero sí me gusta y sí creo que tendría

que ir acompañado de una serie de explicaciones como por ejemplo la contracción de la tabla, de que un eje es el n , el subíndice de la sucesión, otro es el término de la sucesión o el orden que ocupa ese término, o sea, yo creo que le faltan cosas que podrían mejorar el ejemplo, perdón, a esta definición de límite, en este caso de esta sucesión.

A.03: Es que una definición yo la usaría como auxiliar, como una especie de introducción, pero de ahí a usar ya directamente esto para definir el límite, o sea, lo usaría como una especie de introducción antes de meterte ya con algo más concreto, como algo auxiliar.

A.01: En general, yo al menos me quedaría con parte de cada uno de los fragmentos, o sea, por ejemplo, la sucesión más básica posible la n^2 del fragmento B añadiría una tablita viendo que efectivamente se va haciendo muy grande, cada vez más grande, y también pondría la función n^2 , que es la parábola, y viendo que efectivamente va yendo hacia la derecha cada vez va subiendo muchísimo más.

A.03: Quizás trabajar también con un término general más sencillo si quieres apoyarte con una gráfica.

A.01: Sí, quizás esta función no es la mejor.

A.03: Porque el término general escogido es bastante complejo para eso, para introducirlo de la manera gráfica. Por eso esto sería más bien como un algo auxiliar, como una especie de ejercicio.

A.01: A ver, el E. El E tiene un elemento que se dice en el primer fragmento, en el fragmento A, de la definición matemática, que es ese M , ese H creo que lo llaman aquí, ν , a partir del cual siempre existe un término tal que la sucesión la pasa por encima, ¿vale? O sea, la definición del límite tal cual es así y en el fragmento B, en el fragmento C o en fragmento D no se hace hincapié en ese concepto, en el concepto de límite. En el fragmento E sí se dice, existe un H , está un poco liso, la redacción, dentro del fragmento E, al lado de la gráfica, el cuadrado que viene lo considero un poco liso, no termina de quedarme claro.

A.03: Yo no lo he entendido bien.

A.01: Pero en esencia lo que quiere decir es que existe un término a partir del cual, perdón, un término para el cual tú puedes encontrar un índice tal que el término de la sucesión que le corresponde a ese índice va a superarlo, y a partir de ahí van a superarlo todos, porque va siendo creciente, en el caso de este que es una sucesión que tiende a más

infinito, que es positiva. Entonces ese concepto sí es cierto que es bastante lioso para enseñarlo, este no solo la redacción, sino también a la hora de introducir ese toque de definir el límite de una sucesión cómo tú dame el término que quieras que yo te voy a encontrar, perdón el número que quieras, que yo te voy a encontrar un término de mi sucesión que lo supera. Ese punto yo creo que le añade bastante dificultad a la comprensión de lo que es el límite. De decir simplemente la idea intuitiva de a lo que tiende una función, es decir, conforme esto se va agrandando, ¿hacia dónde va esta sucesión? Perdón, estoy hablando siempre de funciones cuando son siempre sucesiones.

A.04: A mí me parece más simple entender el límite con el fragmento C o K, más que con el E.

A.01: Por ir un poco más a lo que nos han dicho que teníamos que decir, yo los fragmentos...

A.03: Yo el fragmento E lo descartaría.

A.01: Yo no digo descartarlo, un momentito. El fragmento B y el fragmento C yo creo que son explicaciones del límite bastante básicas o iniciales, y la introducción tanto en el fragmento A que dijimos que era un lenguaje muy matemático, bastante complejo, o el fragmento E añaden un toque a la definición que es mucho menos intuitivo, que cuesta más comprender, por lo tanto, yo lo situaría en niveles bastante superiores, yo diría incluso Bachillerato.

A.04: O al final de la lista.

A.01: O sea, no quiero decir que no me gusten, tienen su punto que mejoraría y tal, pero creo que tiene el toque de añadir un término para que luego siempre existe uno que lo supera. Por lo tanto, yo para mí en Bachillerato, mientras que el B o el C, en la ESO se puede explicar, con la tablita o con las sucesiones. ¿A.02 quieres decir algo de estos?

A.02: No, no; si no estoy de acuerdo para que voy a decir nada, me apunto lo mío y ya está.

A.03: Pero puedes decir tu opinión, o sea si lo usarías, sino...

A.02: No hace falta.

A.01: A ver, el F, ¿alguien sabe aquí qué es un cuerpo ordenado?

A.03: No, este yo he puesto aquí ya directamente universidad.

A.01: Es que son conceptos, que se dan en álgebra de universidad. Un cuerpo ordenado es una estructura algebraica que tiene una serie de propiedades.

A.03: Incluso en 2º de Bachillerato, tú dices esta definición y flipan en colores.

A.01: Yo éste (F), creo que lo he puesto el último, o si no, lo voy a poner el último.

A.03: Yo estaba entre éste (F) y el E, pero sí están ahí, ahí.

A.01: Porque, porque sí, o sea lo que son grupos, anillos, cuerpos se dan en la universidad. Esta es la definición matemática, un desarrollo...

A.03: La de un matemático.

A.01: Sí, sí. Sería una mezcla entre ésta (F) y el fragmento A.

A.03: Pero ésta es mucho más compleja que el A, porque yo el A sí que lo he visto, como dice A.04, en algún libro de, incluso de Bachillerato.

A.03: Yo creo que no; yo creo que ésta es más sencilla solo que te introduce términos que no sabes lo que son; pues claro, tú te estás hablando de algo sencillo, y te dicen de repente sea K un cuerpo ordenado, y ahí ya te quedas como, qué “ $\$ \&$ ” es K , qué “ $\$ \&$ ” es K , yo para mí era... pero claro da una definición lo que se diría conjuntista, ¿vale?; da una definición conjuntista, la otra es más analítica. Entonces ésta, para mí, la F, y la A irían casi a la par, nivel de universidad; más ésta que la A, o sea más el fragmento F que el fragmento A. Sí. Fragmento F lo veo más de universidad.

A.01: Porque necesitas definir conceptos previos.

A.03: Ya lo puedes trabajar incluso en Bachillerato tecnológico que sea más orientado hacia la universidad, pero el F, vamos, no; porque es muy, demasiado complicada.

A.01: Vale, ya casi estamos terminando porque el resto están todos emparejados.

A.03: Y el fragmento G, sí, es la pareja de, no el fragmento G no, no, a ver, a ver.

A.01: El fragmento G es el mismo que el E, y que el A, bueno parecido, solo que en lugar de utilizar M , y en el E, en el fragmento E le llama H y aquí le llama K .

A.03: Sí, pero aquí lo explica mejor, porque explica lo del listón, y eso para mí es muy importante, porque cuando lo he leído, con esa palabra ya te situas. En cambio, en el E no entiendes nada, pero solamente usar esa palabra ya establece lo que dices tú para un término por muy grande que sea, siempre va a haber un término de la sucesión para cualquier número que escojas que lo va a superar, es decir, el listón lo rebasa. Entonces

éste sí que lo veo yo también interesante, incluso en introducción, he puesto yo también, porque una forma de introducir los límites infinitos es ver eso, que no hay posibilidad de establecer un tope.

A.01: Una cosa, que quizás deberíamos haberlo dicho al principio, ¿dónde se dan sucesiones o límites? ¿3º de la ESO?

A.02: En 4º y en 1º.

A.01: Ah, en 4º; en 3º de la ESO, ¿no se da nada de límites?

A.02: Pero de funciones, no de sucesiones; en 3º no, que va: no saben ni lo que es una sucesión, yo creo.

A.01: 4º de la ESO y 1º y 2º de Bachillerato.

A.02: Es que 2º de Bachillerato se ven límites de funciones, no de sucesiones. A mí estas explicaciones no me gustan, éstas, esta redacción está muy repetida además porque me parece que luego es confusa con los límites de las funciones; o sea, no me gusta ni la representación gráfica de las sucesiones porque me parece que es confuso con las funciones, que es lo único que representan, y esta redacción me parece que es confusa con las funciones porque el hecho de que, el $n + 1$, por ejemplo ¿no?, el $n + 1$ sea $> n$, que es lo que te dice aquí, no implica que el límite de una función, por ejemplo, sea menos infinito; de una sucesión sí, pero de una función no.

A.01: Estamos ya en el fragmento H.

A.02: ¿Me explico?

A.01: Sí, sí, sí.

A.02: Entonces me parece que causa confusión, que puede causar confusión a no ser que ellos tengan clarísimo, clarísimo, clarísimo en todo momento lo que es una sucesión y lo que es una función.

A.01: Aparte de que directamente, o sea, te introduce una sucesión, pero luego te da una función que es la $n(H)$ que la define como la parte entera.

A.03: Y la inecuación.

A.02: O sea que, es $v + 1$ en realidad, es simplemente $v + 1$; es $n + 1$, es como si dijeras tengo un a_n y un $a_n + 1$, entonces toda esta redacción me parece que sobra y es mazo confusa, ¿sabes? En plan, o sea, no entiendo.

A.01: Yo éstas del fragmento E y el fragmento H no me..., quizás.

A.03: Ésta para mí sería la última, el fragmento H.

A.01: Probablemente.

A.03: El fragmento H para mí es el último, o sea, y luego... y ya hemos acabado, ¿no? Entonces ¿tendríamos que decir el orden que da cada uno o cómo?

A.01: El fragmento I es lo mismo que el B en negativo; el fragmento J es el D, pero en negativo.

A.03: Efectivamente, que serían los del principio.

A.01: Y el K es el C en negativo, y no sé vosotros, pero yo para mí estos tres que están emparejados, yo creo que más o menos ocupan la misma posición de dificultad, solamente primero explicaría el positivo y luego el negativo.

A.03: Pero a la par, porque hay gente que explica solamente más infinito, y luego lo mismo con menos infinito, pero yo explicaría a la par: o sea, el fragmento B con el fragmento I después, el fragmento D con el fragmento J después; es decir, no solamente centrarme más infinito y luego menos infinito, sino ya ver a la vez los dos. Y yo creo que estamos de acuerdo que el H, el F ... el F y el H serían de los últimos, y el E; quizás el último el H, para mí: como ha dicho A.02, es que yo he dejado de leerlo directamente, sí, sí, ha habido un momento que ya, he perdido el interés, o sea no, me ha parecido demasiado rebuscado.

A.04: ¿Qué os parecería utilizar el fragmento G para introducir la, el lenguaje matemático del fragmento A? ¿Sería demasiado pronto? Es solo, es de ver la realidad, es una pregunta.

A.01: Utilizar, hablar del listón a la hora de desarrollarlo el A en el lenguaje matemático; así es como se tiene que explicar, porque si tú lo explicas tal cual, leyendo lenguaje matemático el límite tiende a infinito para todo $n > 0$ existe tal.

A.03: Yo lo usaría después del K, porque el K lo que haces es construir la tabla, y luego ya decir pues hay un listón que, ... por alto que sea el listón, sí, sí, el orden sería ese: o sea, primero trabajar con el B, luego pasar a la tabla que sería el K en el caso de más infinito, y luego el G para establecer la, para que se vea claro que aparece.

A.04: Pero ¿tú harías, cómo se dice, el límite que va a menos infinito, el límite que va a más y menos infinito en la sucesión, a más infinito en la sucesión a menos infinito al mismo tiempo?

A.03: Sí, sí, sí.

A.04: Yo lo dividiría, pero yo creo que depende, creo que depende de la clase, de cómo van.

A.03: Sí, se podría dividir, primero más infinito y luego menos infinito, sí, estoy de acuerdo, o sea eso tampoco, y...

A.01: Si queréis, cada uno vaya hablando su orden, sus razones, dificultades o beneficios de cada definición, fragmento.

A.03: Bueno, pero el orden ya lo hemos dicho, ¿no? o bueno

A.01: Lo hemos ido diciendo un poco por encima.

A.03: A.02, tú ¿qué orden crees?

A.02: Yo lo voy a redactar y ya lo leo entero; si alguien lo tiene claro que lea entero el suyo.

A.03: Pues yo lo que acabo de decir; sería primero el B, luego el I, luego el D, luego el J, luego el K, luego el G, el C, y dejaría para el final, que no estoy seguro porque, dejaría para el final el F, el E y el H, el último el H, o el E, F y H, es que eso no estoy seguro, pero está claro que el H, para mí, es el más complicado.

A.04: Vale, yo empezaría con el fragmento K y el B, o al revés dependiendo de la clase; seguiría con las sucesiones que tienden a menos infinito, con los fragmentos C e I; no sé si utilizaría los fragmentos D y J, sinceramente porque yo pensaba que sí pero es verdad que puedes tener problemas de comprensión con, como se llama, contracción, tendrías que explicarlo mucho mejor; utilizaría el G para explicar el lenguaje matemático, eso sí, también, un nivel más bajo, en Bachiller porque al final es algo que se puede desde mi experiencia personal, ya se puede trabajar a edades más tempranas pero eso depende del nivel de la clase, del nivel de todo, y al final ya en la universidad el F, J y A y ya está.

A.01: Vale, yo distinguiría algo así como una definición básica, una intermedia y una avanzada. Las básicas, en orden serían, la B y la I, el fragmento B y el fragmento I, son bastante sencillos, simplemente te dicen que la sucesión tiende a infinito; después los

fragmentos K y C, que ya introducen las tablas y lo que es el n , el orden del término y el término en sí; después las gráficas, modificando algunas cosas como hemos dicho el tema de la contracción y de utilizar una gráfica donde hay la misma distancia entre 10 y 100 que entre 100 y 1000, pues me parece un poco lioso pero sí creo que una visualización de la definición del límite podría ayudar a la comprensión de los chicos. Estos tres fragmentos, emparejados, el B y el I, el K y el C, el D y el J, yo creo que sí se podrían explicar a un nivel de 4º de la ESO. Y luego ya en una definición, en un nivel digamos más intermedio sí entrarían aquellas definiciones que hacen hincapié en lo del listón: el M , el H , el K creo que lo llamaba en otro sitio, o sea todas aquellas definiciones que intervienen en este tema; en ese sentido, lo ordenaría, este nivel intermedio introduciendo lo que es el listón pues me gustaría para un nivel de Bachillerato el fragmento G, que creo que introduce bastante bien el tema este del listón, del número a partir del cual siempre hay un término que lo supera; después el A, como dice A.04, también para que sirva a la hora explicar el lenguaje matemático o cómo se podría representar eso en lenguaje formal, vale, que no tiene porqué ser la explicación de la definición del límite, pum, te ponen esa limita con el “para todo”, la “la A del revés” y tal, sino apoyarse para decir mira esto se puede representar así, y la idea es la misma: o sea, el fragmento A, en un línea, te está diciendo lo mismo que el fragmento G en un párrafo entero, entonces, y es el tema este del listón. Después, a un nivel de universidad, a un ya nivel más avanzado, pues sí, tanto la definición A matemática como la definición del fragmento F, que ya utiliza pues estructuras algebraicas como el cuerpo ordenado, que ya necesitarían pues de la explicación previa de grupos, anillos, cuerpos. Y por último, y no sé si me he dejado alguno, los dos últimos o para mí los dos peores, que casi ni utilizaría: el E porque me parece liosa su redacción y no me he enterado muy bien del concepto del listón con esta definición; y por último el H , que directamente el tema de introducir la parte entera, de definir el n como una función $n(H)$ que es la parte entera de la raíz cuadrada de $H + 1$, en general me ha parecido bastante complejo y yo lo dejaría para lo último, tanto en complejidad como en beneficio a la hora de explicar la definición de límite de una sucesión.

A.02: Yo solamente utilizaría el B, el I, el C, el K y el G; creo que utilizaría previamente el B y el I, que son más simples porque como que solo presentan el concepto y ya está; me gustan más, en realidad, para explicar un poco el mismo concepto, el C y el K, pero es verdad que utilizaría todos -ninguno diría no lo utilizo ni de “\$%&”- el C y el K me

parece que son los más claros, me parece que la tabla es el mejor formato para ver estas cosas igual cambiaría los n para que en vez de ser 1, 10, 100, 1000, bla, bla, fueran 1, 2, 3, 4 etcétera, etcétera, pero creo que se ve bien también con 10, 100, 1000 y así, y ... o sea, igual pondría el 1000 y todo eso para llegar a números muy grandes al final pero igual sí que empezaría con 1, 2, 3, 4, pero vamos, yo creo que así se entiende “dabuti”, en realidad. Y el G también lo usaría, quizás cambiaría algo de la redacción, igual lo redactaría un poco diferente, o sea que no podría para redactarlo yo pero si lo redactara yo igual lo redactaría un poco diferente pero sí que me parece que conceptualmente está claro y que no dice así nada que no se pueda entender o que no pueda entender ningún nivel; igual sí que lo utilizaría antes: si 4º de la ESO es el primer curso que lo da pues sí que lo utilizaría igual más delante de 4º de la ESO porque sí que es más lisa que las otras definiciones, pero vamos, porque tiene más chicha teórica por así decirlo pero en verdad yo creo que también se entiende. Y no utilizaría, no utilizaría directamente ni la A, ni la E, ni la F ni la D, ni la J. La A porque es todo lenguaje matemático y entiendo, que a no ser que hayas entendido previamente el concepto y lo que se quiera es expresarlo en lenguaje matemático, tampoco sirve para mucho y ya está, y además el lenguaje matemático en el instituto no lo sabe nadie, entonces a no ser que sea también como para practicarlo o para explicarlo en sí mismo, una vez que ya has entendido el concepto, venga pues ahora ponlo con lenguaje matemático, pues no lo usaría. El E y el F, bueno el D y el J simplemente porque no me convence cómo cual es la gran ventaja de representar gráficamente una sucesión; me parece que es liso con respecto a las diferencia entre sucesiones y funciones, y no le veo la ventaja; creo que en una tabla se ve el crecimiento guay y creo también que lo de la gráfica contraída es raro, o sea como que si no lo han visto nunca, es raro, y eso, que no le veo ninguna ventaja ¿sabes? porque no veo que sea positivo aquí la representación gráfica. Y luego la E y la F; bueno el E no lo usaría porque creo que en el recuadro no se entiende nada de lo que dice, o sea a mí me cuesta bastante entenderlo –lo entiendo también porque lo contextualizo y así, pero me parece complicado de entender- y luego lo otro es una representación gráfica que ya he dicho que tampoco le veo mucho el punto a representarlo gráficamente. Y la F no la usaría –a ver por qué no la usaría- porque también la definición que da que es prácticamente, por lo del cuerpo ordenado, sí porque utiliza lo del cuerpo ordenado, que yo es la primera vez en mi vida que lo oigo, y también yo no sé qué matemáticas, sí, me parece que es una cosa bastante avanzada, y ya está.

Fase inducida

A.03: El fragmento A, he decidido que se corresponde con ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.); el fragmento B, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.); fragmento C, decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.); fragmento D, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.); fragmento E, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.); fragmento F, también ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.); fragmento G, lo mismo, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.); fragmento H lo mismo también, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.); fragmento I, decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.); fragmento J, decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.); y el fragmento K, el último, crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.). ¿nos hemos puesto de acuerdo en todo?

A.01: Yo creo que sí; o sea, en principio todos se corresponden con un fenómeno, yo creo, y los que solamente son crecimiento intuitivo ilimitado o decrecimiento intuitivo ilimitado y los que no, la mayoría de ellos hacen hincapié en el listón ese, en el K , lo llaman H , lo llaman M , pero básicamente es la ida y vuelta entre un H , a partir del cual localizas un término, perdón un subíndice, el orden de un término que existe otro subíndice inmediatamente superior a ese, tal que su término en la sucesión es superior a tu H inicial, a ese listón, es decir, dicho de manera general que cualquier elemento que me des te voy a poder encontrar un índice a partir del cual todos los elementos de la sucesión son superiores a ese término o a ese ..., el listón o ese elemento inicial. Entonces, creo, si nadie opina otra cosa, en principio todos los he englobado o bien en ida y vuelta, o bien en crecimiento intuitivo ilimitado o decrecimiento intuitivo ilimitado. Fragmento A, dije ida y vuelta porque, yo creo que bueno, la ida y vuelta está en el término M , en ese M que para cualquier M se le puede encontrar un índice, tal que, vuelta para atrás, pues existe un término de la sucesión, existe un n mayor que es n_0 , perdón, que el término de la sucesión es superior a ese M . En el fragmento B, ¿quieres decir algo? Perdón.

A.04: No, no, que la ida, yo lo identifico en que para cada $M > 0$ y en la vuelta, entonces a_n es mayor que M .

A.01: Vale, fragmento B, crecimiento intuitivo ilimitado. Simplemente la sucesión tiende a infinito, sus términos se hacen tan grandes como se quiera ... bueno ahí, se podría entender casi como ida y vuelta, ... no, bueno, no sé.

A.03: No, porque no se especifica el valor del número que tienes que superar.

A.04: Exactamente.

A.01: Vale, vale, vale, pero eso de que sus términos se hacen tan grandes como se quiera.

A.04: Pero, tú puedes decir que para ti es ida y vuelta.

A.01: Detrás de eso. Es que nos tenemos que poner de acuerdo, ha dicho.

A.04: Ah, vale.

A.01: No, no, creo que es crecimiento.

A.02: No, no, no, ha dicho que si había discordia que le diéramos dos papeles y ya está.

A.01: Creo que es crecimiento, en eso estoy de acuerdo, simplemente que los términos se hagan tan grandes como se quiera lo que está diciendo detrás, es que, dame un número que yo te voy a dar uno superior a ese, que es la idea del otro, pero vale, sí.

A.04: Yo no lo veo.

A.03: Yo tampoco lo veo eso. O sea, leyendo esto solo, yo no veo la vuelta, o sea yo no veo la vuelta, la ida sí.

A.01: Soy yo el que está dando más vueltas de lo normal.

A.04: Eres demasiado matemático.

A.01: Fragmento C, decrecimiento intuitivo ilimitado, bueno el decrecimiento intuitivo se ve en la propia tabla, conforme el n va tendiendo a infinito se va haciendo más grande por el término de la sucesión va a tender a menos infinito.

A.03: Claro, mayor en valor absoluto pero negativo.

A.01: Fragmento D, crecimiento intuitivo ilimitado; bueno, la propia gráfica te va diciendo que el término va creciendo cada vez más, conforme el n , el *Eje X* va tendiendo a infinito, números cada vez más grandes, un millón, cien millones. Fragmento E, bueno, fragmento E, tenemos, yo creo, la definición que nos han dado directamente de ida y vuelta, que es pues, cogemos un H , en este caso creo que aquí es el 9 en la gráfica, del 9 te vas al término n -ésimo, en ese caso el tercer término, avanzamos al siguiente que es el cuarto, y efectivamente sus términos sucesivos que es 16...

A.03: La fecha de vuelta apunta al 16.

A.01: Y hemos vuelto, así que en la propia gráfica, y ya en la definición del cuadrado de lo que es.

A.03: Éste yo creo que es el más claro de ida y vuelta de todos, porque se apoya con la gráfica.

A.01: Más, fragmento F, fragmento F, tenemos ida y vuelta también a partir del H , es decir, necesitamos identificar un elemento H , que es el cuerpo ordenado este, a partir del cual existe un natural v , tal que el término de la sucesión supera ese H para todo índice superior a ese índice v ; entonces en ese término que supera el H y luego nos vamos al n , que supera al v , entonces el a_n supera al H , tenemos la ida y vuelta. Fragmento G. El fragmento G, el listón lo llaman K , y dicen si fijamos un valor muy alto, por ejemplo, K , entonces para cualquier valor de $n > n' = 10000$, los términos siguientes son...

A.03: La ida sería si fijamos un valor muy alto, y pone un ejemplo. Entonces esa sería la ida, y entonces la vuelta sería para cualquier valor de n mayor que tal, los términos siguientes son mayores que el valor previamente fijado.

A.01: Eso es.

A.03: Luego ahí estaría identificado claramente ida y vuelta.

A.01: Fragmento H, la ida, pues lo mismo, partiendo del dado $H = 9$, existe un número natural $v = 3$, tal que, a partir de ahí ya sería la vuelta.

A.03: Efectivamente.

A.01: A partir de ahí cogemos el v .

A.03: Con $n = 4$.

A.01: Cogemos un índice superior que dé inmediatamente sería el 4, y la vuelta sería justamente eso: el $a_n = 16$, que es superior al listón, ese 9 que hemos dicho.

A.03: Sí.

A.01: Por último, o casi último, el fragmento I, al igual que su pareja, que era el fragmento B, es decrecimiento intuitivo ilimitado, tal cual, tiende a menos infinito, se van haciendo los términos negativos tan grande como se quiera. Fragmento J, lo mismo también que su pareja, el fragmento D, lo mismo, tiende a menos infinito, ahí vemos claramente el decrecimiento intuitivo ilimitado en la gráfica: como término va tendiendo a infinito conforme los términos de la sucesión, a menos infinito, perdón, conforme los términos de la sucesión van haciéndose cada vez más grandes, 100 millones. Y, por último, el

fragmento K, crecimiento intuitivo ilimitado, la tablita, conforme el índice tiende a tiende a infinito, el término de la sucesión de la tabla tiende a infinito, a más infinito.

A.03: Los valores de la tabla son cada vez mayores.

A.01: ¿Estamos todos de acuerdo? ¿Unanimidad?

A.03: Sí. Unanimidad.

A3.3.2. Transcripción. Grupo B.

Fase espontánea

B.06: ¿Qué os parece el primero, el fragmento A?

B.05: A ver, A.

B.06: Empezamos, ¿no? ¿Os parece si vamos a hacer la lista, como dice ahora pues, cuando ya tengamos dos, lo metemos encima o debajo del anterior, algo así?

B.06: Sí, ir actualizando vamos, claro.

B.08: Cuando vayamos teniendo, con lo que nos quedaríamos.

B.06: Eso es, o sea, por ejemplo. Sí, sí; lo vamos poniendo arriba o abajo.

B.07: Vale, el primero el A, ¿qué os parece?

B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.

B.07: Sí, está chunguillo, ¿no?

B.08: Sí.

B.06: O sea, no, no es chunguillo, pero es que yo me acuerdo de los límites, lo vi en la ampliación de matemáticas en 4º de la ESO y ya fue una cosa... no sé, no sé,

B.07: Sí, sí.

B.06: Sí, a mí esto me cuesta.

B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo... en Bachiller.

B.05: Pues yo lo veo como muy en lenguaje matemático. Yo nunca vi lenguaje matemático en Bachillerato, me parece super...

B.06: Y además hay otros con lenguaje matemático que son por lo menos, un poco más, un poco más, aquí es que te cuesta “\$%&” entenderlo.

B.05: O sea, yo en COU, o sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...

B.07: No se va a enterar de nada. Yo creo que en 2º de Bachillerato.

B.05: Intentar explicarla después con ejemplos, es que esto es supertécnico.

B.06: Yo sí, yo sí, yo sí lo vi eso.

B.05: ¿Lo viste tú este lenguaje?

B.06: Sí, los límites, sí, sí, pero era ampliación de matemáticas, era una optativa, o sea era ya, cómo...

B.07: Que lo pones esto en una pizarra y los chavales se quedan flipando, ¿no?

B.08: ¿En qué curso lo diste tú?

B.06: 4º de la ESO.

B.08: ¿4º de la ESO? Entonces...

B.05: Sí, pero una optativa que era ampliación.

B.06: Perdón, ¿la lista tendrá que ser acorde a un curso o no?

Mónica: No, no tiene porqué, va en función del establecimiento de una propuesta.

B.06: Vale, pues esto va a ir para la cola.

B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato, pero por poner algo.

B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.

B.06: Ah vale. Por la cola.

B.06: Complicado, va, va. Yo creo voy a poner una dificultad 8.

B.05: ¿8? ¿Y qué es un 10? O sea, no os riais, a ver, no, no es que sea difícil, pero es que no están acostumbrados a ver esto así y no lo van a entender si se lo ponen así.

B.06: Eso sí que es verdad.

B.05: Y no lo van a entender si se lo ponen así.

B.07: Bueno éste va a ir para la cola, el siguiente.

B.06: Fragmento B.

B.07: 1, 4, 9, 16, 25. Fragmento B.

B.05: A ver, vale el B.

B.06: Esto se ve en 4º o en 1º ¿también?

B.07: Esto es muy fácil.

B.05: Sí, sí, sí.

B.08: Yo creo que era más fácil.

B.06: Sí, sí, similar al de arriba, y viene más explicativo, ¿ves? Similar.

B.06: Claro, porque con el a_n y eso.

B.07: Similar al de arriba; tú, a un chaval si le das solo letras no se entera de nada.

B.06: Pero ¿lo de las letras y la pertenencia no os lo enseñaron en el instituto?

B.05: Pero no, pero no es por lo que significa.

B.06: Números naturales, la letra.

B.05: Sí, claro, eso sí pero no a entender lo que significa la definición completa.

B.06: Vale, vale. Es que esto es muy formal, la parte del A.

B.05: Pues sí, yo lo pondría en 4º, éste.

B.06: Sí, yo creo que 4º.

B.07: Arriba del A, seguro.

B.05: Espera, ¿qué más teníamos que decir?

B.07: ¿Esto va a ser para ti, esta hoja, esta hoja va a ser para ti?

Investigadora: Sí, esa (datos de cada persona) va a ser para mí, y ésta (fragmentos) va a ser para vosotros.

B.06: Sí eso aquí se puede escribir sin más.

Investigadora: Podéis escribir lo que queráis, va a ser para vosotros.

B.07: Divinamente.

B.06: Bueno, la B va a ir...

B.05: A ver.

B.06: Sí, éste en 4º de la ESO, yo creo.

B.05: Dificultades que puedan encontrar.

B.07: Tú ves que...

B.08: Yo ese lo veo.

B.06: Se ve fácil, sí.

B.05: Vale, ¿no?, pero espérate. Dificultades que puedan encontrar. Aquí en este.

B.06: En B.

B.05: Sí.

B.06: Es que no sé, ... que la n de la izquierda es igual que la de la derecha.

B.05: Pues sí, es verdad.

B.06: Que el subíndice no lo consideran igual que el esto, porque yo me acuerdo que a_3 , y ¿dónde?, el 3 ¿cómo da igual?, y luego ¿no? o algo así.

B.07: Claro es que ...

B.05: Sí, sí

B.07: Porque no te dice cuál es el a_1 , a_2 , a_3 , que se vería más fácil.

B.05: Sí, y ya está verdad que.

B.06: Claro, para saber, para entender el a_n , te debería decir a_1 igual, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. Ah vale, había leído el 1 mal, éste es muy difícil.

B.05: ¿Y qué habías leído?

B.06: Otra cosa.

B.07: ¿Qué habías entendido?

B.06: Nada, como una definición.

B.05: Es la definición; es que es la definición.

B.06: Ya, ya, sí, sí, el A, rectifico, rectifico.

B.07: B.06 rectifica cosas, ten mucho ojo.

B.05: Vale, pues el B está bien para darles una idea de lo que es tender a infinito.

B.06: Sí, se ve como se eleva.

B.07: Pues es verdad que tiene complicación esa, pero tal.

B.06: Sí, sí.

B.05: ¿Cómo?

B.07: Es verdad que tiene la complicación que habéis dicho, lo de...

B.08: Que se podría mejorar, pero se entiende.

B.07: Se entiende bien. El C, fragmento C.

B.08: Creo que le falta lo que a éste, por ejemplo, que aquí sí te da a_n y bien.

B.06: Pero todos los que tienen éstos, es que hay varios yo creo que tienen un signo negativo, yo creo que para los chavales es más fácil verlo sin el signo negativo. ¿Sabéis lo que os digo? Este le da igual, pero con un signo positivo.

B.05: Sí. Pues eso está al final de éste.

B.06: Sí, también, son iguales.

B.05: Pero vamos, pero que después de ver los positivos, poner los negativos, y esto es bastante fácil, yo lo pondría también en 4º de la ESO o así.

B.07: ¿Más fácil que el B creéis? Por ejemplo...

B.05: No, no.

B.06: No, no, no, no.

B.05: Más fácil que el B no, bueno...

B.07: No, más fácil que el B, porque el B es decir cojo un número y hago el cuadrado.

B.08: Pero es que este sí te va diciendo, te va diciendo n , el valor de n y el valor de a_n .

B.07: Está mejor explicado pero la explicación es más complicada.

B.06: Yo creo que es más difícil éste, más que nada por lo de tiende a infinito.

B.05: ¿Más difícil?

B.06: Más difícil.

B.05: ¿Tiende a infinito? ¿Dónde? ¡Ah!

B.06: Porque eso ya, a lo mejor, le haces pájaras en la cabeza.

B.05: Claro, porque n va a infinito y la sucesión va a menos infinito.

B.06: Claro.

B.05: Vale, a ver.

B.08: Sí, sí, que el contenido es más difícil pero el planteamiento lo hace más fácil, ¿no?

B.06: Sí.

B.07: Sí, o sea, está mejor explicado, y eso, y además con la tablita se ve muy bien, si pusiesen la tablita en el B, estaría explicado.

B.05: Igual cuando desarrollan el a_n podrían poner, al menos en el primero, $-10^2 + 1 = -99$, yo que sé, para que sepas que se está sustituyendo, pero vamos que digo yo, que es lo único.

B.08: Sí, es todo una explicación detrás de la otra, para 4º.

B.06: Sí, es lo que dices tú, explicas aquí, explicas un poco los límites de las sucesiones y luego coges la ...

B.05: No, no, primero n , cuando n no tiene un menos delante, y después, después usar éste, el C para darse cuenta de que ...

B.06: A mí me sigue pareciendo más fácil la B.

B.05: Sí.

B.08: Sí, la B es más fácil.

B.05: Sí, sí, por eso primero.

B.06: B, C, A, de momento vamos, ¿no?

B.06: El A es muy difícil.

B.07: Y ¿las complicaciones ya las hemos señalado en esto?

B.05: Vale.

B.06: Fragmento D.

B.06: Sí, es gracioso.

B.05: El D, es que es un poco lo mismo, es cómo ver, es cómo hacer ver que la sucesión va a infinito de distintas maneras.

B.06: Yo ese lo metería después del C, más que nada por la división.

B.05: Yo, no.

B.07: Claro, es una tontería.

B.06: Que luego para que entiendan, por ejemplo, si esto es el cuadrado va a 1.

B.05: Es verdad que tiene, es verdad que tienen una división, sí, sí.

B.06: O una de dos. Espérate.

B.05: Totalmente de acuerdo, vale.

B.07: Los gráficos están muy bien, pero la sucesión es más chungu.

B.06: Sí.

B.06: Los gráficos están muy bien para verlo gráficamente.

B.05: Es que... O sea, sí, pero es que un gráfico así dos puntos, sin más, ah, igual es lo mismo igual que hacer una tabla.

B.06: Eso te iba a decir, la gráfica de puntos es a lo mejor $x = y$, y ya, eh...

B.05: Sí.

B.07: O sea, después de la C, o sea, es más complicado éste.

B.08: Yo es que estos 3, en el mismo curso, uno detrás de otro, ¿no?

B.06: Sí.

B.08: Esto son explicaciones.

B.06: El B en 2º ESO lo ves.

B.05: A ver no sé, igual éste.

B.07: ¿El B en 2º de la ESO no lo ves?

B.05: ¿En 2º?

B.08: En 3º, ¿no?

B.05: En 2º estás aprendiendo a resolver ecuaciones, ¿le vas a meter un límite?

B.06: En 2º de la ESO están con $x = 2$ y ya, buh...

B.07: A ver, ¿qué tiende a infinito eso?

B.06: No, ni de coña, ni de coña.

B.05: No, no.

B.06: Y los cuadrados, bueno, bueno, los cuadrados...

B.07: ¿Las potencias no se ven en 1º?

B.06: Se ven, se ven.

B.07: A un chaval tú le puedes decir, mira o en una gráfica, si me puedes poner en un ejemplo gráficamente el B, en esto, que se va, se va, que no va a perder.

B.06: Sí, pero que...

B.08: Yo creo que no.

B.07: No el, no el límite, pero decirle esto tienes, esto se va a infinito.

B.05: Lo hemos dado igual.

B.06: Sí, claro.

B.05: Sí, a lo mejor sí entiende que sea infinito, pero no tiene ni idea de lo que es una sucesión.

B.06: Claro.

B.05: No sé.

B.07: Vale.

B.05: Vale.

B.07: O sea, el D después del C, un poco más fácil.

B.05: El D después del C, incluso igual en otro curso, porque es que ya son nociones, ya es más difícil, ya cuando.

B.06: Claro, ya es que son nociones, por eso digo.

B.05: Hacen el límite ya no es tan fácil.

B.06: El límite ya pues que no, que no te salga límite, o bueno, y el Hôpital ya ni te cuento, que hay un aplicable que empeña... pues eso...

B.05: Sí, yo lo pondría más adelante, igual en 1º o 2º.

B.07: El Hôpital en 1º de Bachiller se empieza a hacer, ¿no?

B.06: El Hôpital, claro, eso lo tienes que aprender a derivar primero.

B.07: Primero derivar.

B.05: Que no, no, l'Hôpital. Yo aprendí a derivar a finales de 1º Bachillerato, o sea, supertarde.

B.06: Yo, en el curso este de 4º de la ESO.

B.05: Pero a ver, que no hace falta l'Hôpital tampoco.

B.06: Pero yo me refiero al haber ya divisiones, que no si hasta dónde.

B.05: Ah, esto yo, 1º o 2º de Bachillerato.

B.06: En 4°.

B.08: Yo empecé.

B.05: ¿Sabes lo que deberíamos hacer? Intentar no hablar todos a la vez.

B.06: Sí, si no la señora esta ...

B.07: Fragmento E.

B.06: Un poco raro.

B.07: Fragmento E.

B.05: Espera, espera, vamos a comentar, dificultades, ha puesto ahí la división.

B.06: Ah, dificultades sobre todo es la, la definición, claro, o sea es similar a lo de antes, se va sumando, el fragmento D se va sumando a lo anterior, pero tiene una división, ya.

B.05: Y hay que tener cierta base para ver que se va.

B.08: De éstas, la B es la más fácil pero la C y la D se sostienen, ¿sabes?, tiene mejor lo de la tabla y la otra tiene...

B.06: La gráfica.

B.08: La gráfica, pero sin duda el contenido de la B es más fácil.

B.05: No, no, pero quiero decir que el C y el D tienen una gran diferencia porque el D tiene una... una fracción y además que te ponen una gráfica, pero como le pidas a los alumnos dibujar la gráfica igual no saben, bueno la gráfica, los puntos.

B.08: No, no, que por eso, que el B es más fácil porque estos te ayudan visualmente porque tienes la tabla y la gráfica.

B.05: Que sí, que sí, yo no he dicho que no, pero digo que...

B.06: Serían el 1, el 2 y el 3, el 4 y el 10, serían...

B.06: Sí, sí, la gráfica, sí.

B.05: Venga pues el E.

B.07: Fragmento E.

B.06: Fragmento E.

B.05: Esto para mí es una locura.

B.06: A mí también.

B.07: ¿Qué éste?

B.06: Es un lío ... del “\$%&”, lo de los rectángulos está bien, pero es que lo hace superlioso.

B.05: Este yo no entiendo nada, porque te dice dado $H = 9$, por la cara H , y después te dice existe un número natural, por ejemplo $v = 3$, por ejemplo... o sea, por ejemplo no, qué casualidad que sea $=3$

B.06: Sí, está fatal explicado.

B.06: Pone $n \geq v$, ejemplo $n = 4$, tenemos $a_n > v$.

B.05: Sí, después es como que va cogiendo, H es el anterior, que encontró que era mayor.

B.07: $H = 16$, $n = 5$, $a_5 = 25$, que es mayor que 16, $H = 25$, $n = 6$, a_6 , mayor, vale

B.05: Y ahora...

B.07: Hace la raíz de H y le suma 1, entonces con ese número que obtiene pues hace el cuadrado o algo así.

B.06: Sí, pero el otro siempre va cogiendo como H , el anterior.

B.08: Sí, sí.

B.06: Bueno, da como el cuadrado de v , vaya.

B.07: Y es un lío.

B.08: Sí, sí, va cogiendo v como anterior de n , ¿no?

B.07: Sí.

B.06: Y H como cuadrado de v .

B.08: Claro.

B.06: Bueno, que, ¿esto qué es diferencia de gerias? Hombre, más fácil que la A es, pero...

B.05: Yo este, no, no, no, es que yo éste pondría directamente en ningún curso, me parece superlioso, que no aclara nada.

B.06: Vale, tienes razón, sí.

B.05: Yo.

B.08: Visualmente, con esto, de primeras.

B.05: No, no, pero es que el A, el A es la definición y puede costarles entenderlo por el lenguaje, pero es que esto...

B.06: Sí, sí, tienes razón; lo del A es eso, es lenguaje, porque a lo mejor no están hechos, o sea, pero ...

B.05: Bueno, y en verdad, porque no me he fijado en la gráfica ésta, pero igual ayuda más.

B.06: No, la gráfica está bien, lo que pasa es que está diferentemente compensada.

B.08: Pero, claro, si ahora...

B.06: Aquí los valores van de 2 en 2, es una dificultad esto, lo de la gráfica.

B.07: Te está diciendo coges el 9, que es el H , haces la raíz, te queda 3, le sumas 1 y le haces el cuadrado, y otra vez, ¿sabes?

B.06: Vale, y ahora aquí, ¿de dónde va eso?

B.05: Vale y además que es un procedimiento que te vale para esta sucesión.

B.07: Y ahora sería igual el 16, te haces la raíz, llegas al 4, sumas 1, a 5, y tal.

B.06: Sí, pero ¿qué te aporta eso?

B.05: Es que es solo para ver que va a infinito. Es que es un rollo.

B.07: Y después esto es para ver el área, bueno los puntos, está fatal, está fatal.

B.06: Sí, sí.

B.07: Éste es adidáctico, éste a la cola, el último.

B.05: El último, ¿es que no está en la lista?

B.07: Sí.

B.06: Yo he puesto no.

B.05: Dijo que no teníamos que hacer los 11.

B.06: No, no, ese.

B.07: Ah, ¿no lo ponemos en la lista? Vale.

B.05: Bueno, yo no.

B.06: Sí, me parece, tienes razón, tienes razón.

B.07: Pasa por aquí, luego por ... El E a la calle.

B.06: Esto es para ver diferencia de áreas. En los objetos ... el cuadro de la derecha.

B.05: En consecuencia, el límite es más infinito, es para ver que el límite es infinito.

B.07: En el cuadro de la derecha, no en ...

B.06: Ya, ya, ya.

B.07: Sí, está fatal. El F.

B.06: Fatal, fatal, éste fatal.

B.05: A ver, espera.

B.07: Este también, una definición formal que te “\$%&”.

B.05: No vayamos tan rápido.

B.06: Fragmento F.

B.05: A ver, ¿estamos con el F?

B.06: Sí, vamos a empezar con el F.

B.05: Vale. Vale. El F me parece como la teoría del E.

B.06: Sí.

B.05: Así que, para mí...

B.06: Es que lo de un cuerpo, lo del cuerpo yo es que sí que no lo vi, vamos hasta ...

B.05: Olvídate, y además ...

B.06: Hasta la facultad yo no vi nada de cuerpo.

B.05: Y esta definición yo no la he visto nunca.

B.07: Venga, sí.

B.08: Sí, sí.

B.06: Sea su límite un elemento H un cuerpo K (leyendo).

B.05: Siendo K un cuerpo ordenado.

B.06: Ordenado, existe un número natural v tal que $a_n > h$ para todo $n > h$

B.07: Buah, si para explicarle esto, es que hay que explicar también...

B.06: Le explican un cuerpo, y luego un cuerpo ordenado, que te dicen así, y el que viene dirá tú eres tonto.

B.05: O sea es que eso, a mí el F me parece ...

B.06: Ese está fuera.

B.05: Eso, me parece la teoría del E, y es la teoría, que es cómo formal, que te va a costar un montón.

B.08: Sí. Yo pondría los 2, y pondría “no”.

B.05: Yo tampoco lo pondría.

B.07: Vale los dos fuera, me parece bien.

B.06: Yo creo que es eso. Este lo leen y piensan que no es matemáticas, ahora te dicen qué es un cuerpo en matemáticas, ¿qué te has fumado?

B.08: Sí, sí, tal cual.

B.07: Éste fuera, venga va, el G.

B.05: A ver, sí, pero es que de verdad.

B.07: Vale, vale, tómatelo con calma, B.05.

B.05: No, no, no es por eso, sino que no estamos debatiendo nada.

B.07: A ver esas dificultades, ¿no?

B.06: Si lo estamos señalando continuamente las dificultades.

B.05: A ver, dificultades todo, en este.

B.06: Claro, ya lo hemos señalado.

B.07: Y ventajas, que te dice procedencias, hacemos uno o dos fragmentos... de éste ninguna, del anterior... buf...

B.08: Es lo que dice B.05, es que juntarlos los dos, me parece que venían juntos y está separado.

B.05: A ver, juntarlos tampoco, esto es como un ejemplo, pero...

B.08: Ya, ya, pero me refiero que éste sí que...

B.05: ¿Éste cuál?

B.08: Que se entienden mejor los 2 si los juntas que por separado.

B.07: Éste no, di fragmento.

B.08: El fragmento E y el F.

B.05: No sé, que además en el F el concepto de cuerpo es muy abstracto.

B.06: Y tanto, y además cuerpo ordenado, o sea que luego lo ves y sí, pero ...

B.05: Ya, ya, otra vez esto.

B.06: Bueno, que no.

B.07: Que tampoco hay mucho que decir, que ya lo hemos dicho todo.

B.08: Éste no se salva.

B.05: A ver el G.

B.06: Fragmento G. A ver, empieza bien pero después, ¿no? Te hace una tablita como una gráfica como ... Los siguientes son mayores que el valor previamente fijado. O sea que quiere decir que siempre vas a poder subir el listón.

B.05: Sí.

B.06: Sí, es una otra manera de ver el límite.

B.07: Pero me parece un poco enrevesado.

B.06: El límite va a ir a más infinito, también puede aquí que ver que le sumes 1 a que no se lo sumes te va a dar igual.

B.07: Porque va a infinito.

B.06: Es lo que se puede sacar de ahí, pero vamos.

B.05: A ver está bien, que dice dado cualquier número siempre podemos encontrar un término mayor de la sucesión, pero es que se lía un poco explicando.

B.06: Sí, sí. Las 3 últimas líneas sobran.

B.07: Sí, sí.

B.05: No es que sobren.

B.07: En lugar de eso, hazlo como antes con a_1, a_2, a_3 , una tabla, una gráfica, tío.

B.08: Sí, sí, sí.

B.05: No sé, igual con esto le das un concepto, o sea no es tan concreto, sino que le puedes ayudar a tener una idea como más global de lo que es tender a infinito, o sea de... para aproximarse a la definición formal pues ésta es una mejor manera que el fragmento al que te estás refiriendo, que ¿cuál es?

B.06: ¿El A?

B.06, B.08: El B.

B.05: El B, el B.

B.07: Sí, el A, éste, éste, vale que es más formal, pero ...

B.05: Exacto, que es para aproximarse a lo que es la definición formal, creo yo.

B.07: Sí.

B.06: Sí, pero ...

B.05: Lo que pasa que está raro explicado porque el n^* este, que coge así, a lo loco.

B.07: Con el listón me parece bien porque me parece como gráfico.

B.06: Pero aquí, claro, falta, que no pone $n^* = \sqrt{K}$.

B.05: Claro, exacto, es que no lo explica, exacto.

B.06: O sea, tú igual lo sabes, le das esto, y porqué n^* es 10 000 y no es 3.

B.07: Ya, te está poniendo un ejemplo...

B.06: Hay que indicar que $n^* = \sqrt{K}$

B.07: Si eso, pasa el papel y anota las filas.

B.05: O directamente saltar, saltarte eso, es decir si fijamos un valor muy alto, por ejemplo K encontramos este término de la sucesión, que no sé cuál es, que lo verifica, no sé. Bueno, éste ¿en qué curso lo pondrían? Esto ya más adelante.

B.06: Esto 1º o 2º de Bachiller.

B.05: Sí, 1º o 2º, sí.

B.07: Y, ¿lo ponemos más difícil o más fácil que el A, por ejemplo?

B.05: ¿Qué el A? Más fácil.

B.08, B.06: Sí, más fácil.

B.07: Pero, ¿qué el C y el B?

B.06: No, no. Más que nada por la definición formal, no por otra cosa.

B.07: Por eso, pues lo pongo entre C/D, que van juntos, y el A.

B.05: Sí, vale, sí, sí.

B.07: Yo tengo, voy a hacer la clasificación esa.

B.08: Sí, sí, sí.

B.05: Sí, sí, después fijamos orden.

B.07: H.

B.05: A ver.

B.06: Fragmento H, a ver cómo va esto; otra vez las H y las n y las v .

B.07: Ya, es que la H y la v , tío.

B.06: Esto, no entiendo esto.

B.05: Están complicando un concepto tan fácil, que es que de verdad...

B.06: Sí, sí. Es complicar el concepto de todo; o sea, tú le explicas esto y huyen, salen corriendo.

B.07: Lo fácil que era, sea la sucesión $a_n = n^2$, y de la tabla, las dos filas de arriba, tío, y ya lo estás viendo.

B.06: No, pero luego puede tener una explicación más normal, no está enrevesación, no sé.

B.07: Ya.

B.06: La H y v se calienta.

B.05: Es que tío, encima es rarísimo, dice dado $H = 9$, existe un v número natural $= 3$, tal que $n > v$, $n = 4$.

B.06: Claro, y por qué v , ¿por qué no existe un número natural $v = 27$?

B.05: No, pero no eso, sino dice existe tal que n , yo aquí estoy entendiendo cómo...

B.06: Sí, yo lo entiendo...

B.07: Ya, es que hace como 4 consideraciones diferentes, cuando no tienes que hacer ninguna, simplemente decir “\$%&”, es que se va a infinito.

B.06: No sé, pero es, yo entiendo, no entiendo lo de dado un $H = 9$.

B.07: Existe un número natural $v = 3$, que es la raíz de H .

B.06: Sí, pero eso hay que indicarlo.

B.07: Claro.

B.06: Porque a los chavales tú le das 3 y se centran en que es 3 porque ...

B.07: Tal que $n > v$, $n = 4$. anda qué no hay números mayor que 3, ¿sabes?, te coges justo el $n + 1$, o sea el $v + 1$.

B.06: Si éste ahora es 15, ¿qué pasa con éste?

B.08: Que no tiene raíz entera.

B.07: Claro. Es que, éste fuera. El H .

B.05: El H , el H .

B.06: El H , fragmento H . También con el E y con el F .

B.05: Y después te explica todo esto y te dice donde $n(H)$, pues donde no, porque antes no ha nombrado ningún $n(H)$, ¿sabes?, sabes aquí te pone $a_n = 16 > 9 = H$, donde $n(H)$.

B.06: Es que $n(H)$ no lo puedes poner nunca porque, o sea estás poniendo n como índice de una sucesión.

B.05: Sí, sí, como una sucesión.

B.06: De una sucesión o una función.

B.07: Ahí, ahí sí que lo hemos expresado n , $n(H) = \sqrt{H + 1}$. “\$%&” es que no se va a enterar de nada, chaval.

B.06: Si tú antes le dices, como hemos dicho antes en el fragmento, cuál era, en el fragmento B que el subíndice es lo que pones, o sea el valor es el mismo.

B.07: El B que nos hemos puesto tiquismiquis es el, el más facilón, ¡eh!

B.06: Sí, es fácil.

B.05: Nada, que aquí se está complicando mucho el concepto este y no ayuda nada.

B.07: Yo básicamente lo quitaba, como el E y el F, lo de H y v estos. ¿Podemos pasar al I, o todavía tenemos consideraciones? No sé, pregunto. Es que al final, encima te hace la explicación después, tío, cuando podría hacerlo sobre la marcha, y está tomada la parte entera de la raíz de H para que n sea un número natural y será sumado 1 para que sea mayor que el H , que el v , fíjate.

B.06: Claro.

B.07: Encima la tabla te la pone al principio y la explicación de donde está $n(H)$ se obtiene, resumiendo tal, tal, tal, es la explicación de la tabla.

B.05: Yo no entiendo nada.

B.07: Bueno, que lo deseamos, ¿no?

B.08: Sí tío.

B.07: Bueno y ahora, como hay muchos que se repiten, pero con signo diferente, de hecho, los 3 que quedan.

B.05: A ver, éste, ¿pasamos o no pasamos?

B.07: ¿Algo más del H?

B.05: No, no, no.

B.06: Yo no lo pondría.

B.05: Lo dicho.

B.06: Esto de poner n , como nombre n de función...

B.05: Que no, que no, no ayuda a...

B.07: Ya, que no.

B.05: Vale, venga.

B.07: Venga pues al pozo, lo que hemos dicho. El fragmento I, que es como el B, pero con el signo cambiado.

B.08: El C, ¿no? como.

B.06: Dificultad, lo único, los paréntesis.

B.05: Lo mismo.

B.06: La incógnita que sepan que el menos va fuera, y luego no, como es negativa la raíz cuadrada, el cuadrado es negativo, es positivo, que entiendan esos paréntesis.

B.05: Es verdad.

B.07: Eso que eso pasaba con todos los números negativos.

B.06: Una posible dificultad, pero vamos.

B.07: Más lo que hemos dicho antes del B, que lo del a_n , lo que no se ve claro que el a_n , cómo tienes que sustituirlo.

B.05: Vale, pero éste está bien.

B.08: Sí, sí, sí.

B.05: Éste prontito.

B.07: En la clasificación lo pongo justo después del B, que es el mismo con el signo positivo.

B.05, B.06: Sí.

B.07: ¿Pasamos al J?

B.05: Ya. A ver, espérate. Entonces, vale más o menos 4º de la ESO.

B.06: Yo creo que sí, es que juraría que se ve sobre esa, ese.

B.05: Yo empecé a ver sucesiones y tal en 3º de la ESO.

B.06: O en 3º, es que no sé.

B.05: Bueno empecé no, solo las vi en 3º de la ESO porque en 4º no vi nada.

B.07: Pues a lo mejor, no sé, no sé; es que me suena por ahí, pero no te puedo decir.

B.05: No, no sé, vale, pero bueno.

B.06: Vale, por ahí, 3º o 4º.

Mónica: Sí, en 3º aparecen sucesiones, pero todavía no con límite.

B.05: Ah, vale.

Mónica: Sucesiones aritméticas y geométricas.

B.06: Eso, sumar, multiplicar.

B.05: Vale puede ser. Bueno, pues nada, lo dicho, está bien para ver el caso menos infinito.

B.07: El J, fragmento J.

B.08: Es el D, ¿no?

B.06: Sí, similar.

B.07: Es el D.

B.05: Lo mismo, complicar cuando el límite es menos infinito, poniendo una fracción.

B.06: Esto, se iría a continuación del otro, del, D.

B.08: Sería el siguiente al D.

B.07: Sí, a la vez es verdad que la complicación si tú lo explicas después del D, es como reforzar un poco el concepto, ¿no? en estos que cambia el signo.

B.06: Claro.

B.07: Es igual que puede tender a más infinito, también puede tender a menos infinito.

B.06: Sí, pero ya estás metiendo, a ver, estamos en ... Estamos en el J, ¿no?

B.07: Sí, tanto el J como el I todos los que le cambian el signo.

B.06: Claro, claro.

B.07: Poniendo el signo negativo añades una complicación.

B.06: Sí, pero esto, que a lo mejor lo tienes que meter cuando metes ya fracciones.

B.07: Después el otro, ah vale.

B.06: Porque si no metes fracciones, es por meter el símbolo negativo.

B.05: Claro, claro.

B.06: Pues sí.

B.07: Bueno, lo pongo después del D, ¿no?

B.06: Sí.

B.05: De hecho, todos los que hemos dicho 4º de la ESO, los daría después también en 1º de Bachillerato.

B.06: Sí, sí, claro.

B.05: Para reforzar.

B.06: Sí, a todos estos.

B.05: No que lo den por hecho y ya.

B.06: No, claro, esto luego pues se ampliaría, por eso cuando se aprende a derivar, y todo el rollo ya...

B.05: Pero no que se amplía, sino que después cuando se pasa a 1º de Bachillerato no van, o sea no van a aprender límites hasta un punto, y después, a partir de ese punto aprender lo siguiente, sino que en 1º Bachillerato vuelven un poco atrás y repiten.

B.06: Sí, sí, claro.

B.05: Otra vez esto, vale, es así. Vale, solo queda el K, ¿no?

B.05: Vale pues lo mismo que el C.

B.07: Lo mismo que el C.

B.06: Sí.

B.05: Lo mismo que el C.

B.06: Sí.

B.07: El C era el más difícil, que tenía el signo negativo, ¿no?

B.08: Sí.

B.07: Éste es positivo.

B.05: Eso es, ese lo he explicado yo.

B.06: Éste por delante del otro.

B.07: Sí.

B.06: O sea, siempre se explica lo positivo antes que lo negativo, ¿no? Siempre cuando explican es lo positivo y luego lo negativo, vale, vale.

B.07: El caso estándar, y después.

B.08: Entrar para adelante y para detrás, ¿no?

B.05: Vale, pues lo dicho, que se ven bien los términos, y nada que está mejor explicado que el B.

B.06: Sí.

B.07: ¿El B no?

B.05: ¿Qué el D?

B.08: Que.

B.07: El C.

B.05: No, que está mejor explicado que el B, no es que sea más fácil.

B.07: Ah vale, vale.

B.06: Que la tabla es más explicativa; tú aquí ves ¿cuánto vale n ?, no sé qué, sustituyes, ¿cuánto vale n ?, 100, $100 + 1$, 101.

B.07: Vale.

B.05: Vale, 4º de la ESO.

B.07: ¿Doy la clasificación final o qué?

B.06: A ver quién desciende a segunda.

B.08: Sí.

B.05: A ver.

B.07: Entonces, los que comentaríamos en clase y en este orden sería, el B.

B.05: El B.

B.07: Primero.

B.05, B.08: Sí.

B.07: Después el I que es el mismo, pero con un signo negativo delante, después el K, que es el que acabamos de ver de la tabla.

B.05: Yo no lo pondría así, yo pondría igual el B y el K juntos, y después los negativos.

B.07: Ah, vale.

B.05: No yo, yo.

B.06: Yo también.

B.07: Sí, sí, por eso yo preguntaba ahora lo de los símbolos, por eso lo decía.

B.06: Y, por ejemplo, el D.

B.05: ¿Y cuál?

B.06: El D que también es con fracción, pero con el signo negativo.

B.05: Ese ya.

B.07: Ese ya paso, ese con números negativos.

B.06: Con fracción.

B.05: Ese lo pondría yo.

B.07: Entonces el B.

B.05: Y, además, a ver si acabo.

B.07: El K.

B.05: Pero espera una cosa, porque yo creo que el K lo explica mejor que el B, entonces igual pondría primero el K antes que el B, yo, a ver, lo estoy pensando todavía.

B.07: ¿El K antes que el B?

B.05: Aunque la sucesión es más fácil.

B.06: Claro, yo más que nada para que entiendan, pondría esto, le doy la sucesión y le diría que es esto, porque hay gente que ya sabe qué son exponenciales, que se den cuenta de que éste es el 1^2 , éste el 2^2 , éste es el 3.

B.07: Claro, es que es verdad que en la tabla viene muy bien la del K pero ...

B.06: Sí.

B.07: No te pone, te, te estás yendo al 1, al 10, al 100.

B.06: Claro, por eso lo digo porque esto es más intuitivo, porque en cuanto lo ven, siempre, o sea hay alguien sabe que es el cuadrado de no sé qué, pues pon el numerito, poned un numerito, 1, 1^2 , 2, 2^2 .

B.05: Vale pues sí, sí.

B.06: O sea, yo dejaría el B.

B.07: Vamos a poner $n^2 + 1$, con el 10, 100, 1 000, puede ser un poco más enrevesado.

B.06: El concepto de límite, de sucesión, sucesión.

B.07: Vale, entonces el B el 1º, después el K, y después los negativos de estos 2, que serían el I y el C, después ...

B.05: Y, ¿todos esos los pondríamos en 4º de la ESO?

B.07: Sí.

B.05: En 4º de la ESO y en 1º también, pero en 4º.

B.07: Sí, exacto.

B.06: Luego, el comenzar en 4º.

B.07: Después el D, en 1º de Bachiller, hemos dicho que es el que introduce la fracción, ¿no?

B.08: El D y el J.

B.07: Fragmento D de Dinamarca y el J, que es el mismo con signo negativo.

B.06: Fragmento D, fragmento J, de B.07.

B.07: Y después, por último, los que son más formales que son el G, que empieza bien y se enrevesa después.

B.05: Sí, y ya está.

B.07: Y el A; el A hemos dicho también que era el concepto de límite.

B.05: El A, quizás.

B.06: El A, ponlo a modo de visualización, un poco para que vean, mira, esto es matemáticas.

B.07: Es como la expresión formal de lo que ya han visto.

B.08: Claro.

B.06: Se ve que es una expresión formal.

B.05: No sé, y después poner algún ejemplo, o igual retocar los fragmentos de éstos para que lo entiendan, o yo que sé, por lo menos que los más avanzados lo entiendan.

B.06: Sí, sí.

B.07: Y después hemos desechado el E, el F y el G.

B.08: No.

B.07: E, F y H.

B.06: Yo es que el H ni lo ponía, es que lo borraba de la hoja.

B.07: Hemos dicho que no lo ponemos, porque H y v le complica la vida a los chavales.

B.08: Exacto.

B.06: Lo del H si alguien no le complica, que me lo diga.

B.07: Es un sinsentido.

B.05: Con sinceridad, no lo he visto en la carrera, ni en nada.

B.06: No, pero es que no lo haya visto, es que es un lío de todo, tienes que indicar dado un $H = 9$, existe un número natural tal que $v=3$, bueno pues, ¿y por qué?

B.07: Gracias.

B.06: Claro, a un chaval te coges y dado un $H = 10$, hay un número natural tal que $v = 7$, y ahora ¿cómo haces eso?

B.05: Que no, que no.

B.06: $n > v$, $n = 4$, $a_n = 16 > 9 = H$, donde $n(H)$, porque ahora n se convierte en una acción de sucesión, que es el valor absoluto de la raíz $+ 1$, sí, $H > 0$.

B.05: Me cuesta mucho creer que a alguien le vaya a facilitar este procedimiento ver que el límite es más infinito.

B.07: Imposible.

B.06: Sí, sí, es que ven cuentas, tú a un niño le dices qué pasa, pues si cuenta, está sumando y ...

B.07: Esto creo, podría llegar a meter un momento como problema cuando ya tenga su mezclado todo lo de sucesiones, y tal.

B.06: Ni eso, ni eso.

B.05: Ya ni eso.

Fase inducida

B.05: A ver, venga, el A , fragmento A .

B.07: Es formal, ¿no?

B.08: Es formal.

B.05: Ninguno.

B.06: Yo creo que no es ninguno de ellos.

B.05: De éstos, el de ida y vuelta.

B.07: Claro.

B.05: Yo entendí que era, o sea.

B.07: ¿Qué oscila?

B.05: Era... No, no que oscila.

B.08: El caso es...

B.05: No, no, no que oscila.

B.06: No el caso es...

B.05: ¿No me dejas?

B.06: Perdón, perdón.

B.05: No.

B.06: Nada.

B.05: El de ida y vuelta es formal porque el proceso que se hace toma la definición, pero es un proceso, pues de ida y vuelta, esto es la definición.

B.06: Claro.

B.05: No es...

B.07: Vale, entonces, ¿ninguno de ellos o qué?

B.05: Para mí, ninguno de ellos.

B.06: O sea, pues sí, lo que dice ella, la definición.

B.05: Si es otra cosa, imagino otra cosa.

B.06: Verás, es una definición plana.

B.07: Sí, sí.

B.06: Te pones aquí te define esto, sabes, define el límite.

B.07: Vale, éste es el punto de partida.

B.05: Para mí es ninguno, ¿para ustedes?, yo en el mío va a ser ninguno.

B.07: Vale, vale, no, estoy de acuerdo, estoy de acuerdo, dale ahí y ponemos los nombres después o ¿qué?

B.05: Ah ¿en el mío? Vale, vale, eh... ¿nos replanteamos algo? Era eso lo que...

B.06: Bueno, yo creo que es igual que antes ¿no?, un poco avanzado para alumnos de Bachiller.

B.07: Decía que hacía falta conocimiento avanzado de mates.

B.06: Claro, claro.

B.05: Por eso, que no nos replanteamos nada.

B.06: Con conocimiento avanzado, pensamiento matemático avanzado, PMA.

B.05: Total, que igual que antes; no nos replanteamos nada.

B.07: “\$%&”, saca la guía ahí, y tacha esto.

B.06: Sí, sí.

B.05: Venga. En el fragmento B.

B.06: Fragmento B.

B.05: Pues ... fenómeno ... ¿el que es intuitivo hacia arriba no? Yo creo.

B.07: Sí.

B.05: Éste, crecimiento intuitivo ilimitado.

B.06: c-i.i., crecimiento intuitivo ilimitado.

B.05: Sí.

B.06: Ah vale, ¿y eso por qué?

B.05: El crecimiento intuitivo ilimitado es cuando ves que los términos van creciendo.

B.07: Hacia infinito.

B.06: Crecimiento intuitivo, ah vale; vale, vale, muy bien.

B.07: Sí, ¿no?

B.06: Sí, sí, sí.

B.05: Sí, y sin más.

B.06: Pues éste.

B.07: Y ¿podemos pasar al C?

B.05: El A, igual que antes.

B.06: Yo me reafirmaba, igual que antes.

B.05: Sí, yo también.

B.06: No creo que haya cambiado ninguna, ninguna cosita.

B.05: Vale.

B.07: El C.

B.05: El C.

B.06: Fragmento C.

B.05: Espera, había que decir todo esto ¿verdad?, es que cómo no se ve ahora el PowerPoint.

B.06: Yo juraría que sí.

B.05: No sé, no me acuerdo.

B.06: Esperaros un momento, a ver si.

B.05: Bueno, que.

B.07: Claro, se aproxima a_n . Éste es el decrecimiento ilimitado, decrecimiento intuitivo ilimitado.

B.05: Sí, sí, sí.

B.07: Vale, pues d-i.i.

B.06: Sí, sí; es todo lo contrario.

B.07: Estamos de acuerdo.

B.07: Y que no ha cambiado tampoco nuestra aportación ¿no?

B.08: No.

B.06: El negativo, después explicar el positivo.

B.05: Pero, ¿hay que poner algo de sistema de representación? Es que no sé. No, ¿verdad?

B.07, B.08: Yo creo que no.

B.05: Es que no sé, no sé.

B.06: Yo juraría que no, o sea...

B.05: Es que antes lo ponía ahí, pero.

B.06: Fenomenología, Freudenthal, bueno esto, ... bah.

B.05: Bueno.

B.07: Esta sucesión, c-i.i., que crece a infinito.

B.08: Fragmento D.

B.06: Fragmento D.

B.05: Fragmento D, ... es, pues lo mismo, el crecimiento intuitivo ilimitado.

B.07, B.06: Sí.

B.05: Pero la diferencia es que usa una gráfica.

B.07: Sí. Y el E también c-i.i. pero, vamos, de intuitivo tampoco tiene mucho.

B.05: No, no, el E es de ida y vuelta.

B.07: Ida y vuelta, sí.

B.05: No, no... el E, el I, el E perdón, para mí es ida y vuelta.

B.07: A ver, es que yo no me he enterado muy bien de lo que se dice, si te soy sincero.

B.06: A ver, ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, ida y vuelta ¿por qué?

B.05: Pero si es un dibujo, y es lo, el mismo.

B.07: Es que yo no me he enterado lo que quiere decir con ida y vuelta.

B.06: Es que yo no sé, es como si algo.

B.07: Es cíclico, ¿no?

B.05: Ida y vuelta es esto, es que puso este ejemplo.

B.07: Ah vale.

B.05: Tomo un n mayor, no sé qué, ... éste es ida y vuelta.

B.07: Vale, entonces ahora entendemos porqué está aquí, porque...

B.06: Esto es ilegible.

B.07: Porque es diferente, a los demás, pero vamos, es una gran bazofia éste.

B.08: Como el concepto de F, ¿no?

B.05: Yo, pues para mí, lo único que cambia es, vale ... pues que sí, que está tomado de la definición directamente, pero...

B.06: Sí, pero es muy...

B.05: Difícil ponerlo.

B.06: Tomado está, pero es muy antiexplicativo, o expositivo vaya... tú lo puedes usar, pero...

B.05: Yo seguiría sin ponerlo.

B.07: ¿Seguirías?

B.05: Sin ponerlo.

B.07: Yo igual también.

B.06, B.08: Sí, sí, total.

B.07: El F.

B.05: Pues lo mismo.

B.06: Sí, tal cual.

B.07: ¿Éste también iba a la calle?

B.05: ¿O no?, a ver ...

B.07: Y éste. Es ninguno de ellos, ¿no? Bueno el formal.

B.06: ¿Formal?

B.07: Hombre, es la expresión formal del anterior.

B.05: Yo creo que ... Ahora no sé.

B.07: Esta es la expresión formal del anterior.

B.06: Sí, pues sí, sí...

B.05: Pero éste. Es de ida y vuelta o el mismo, ¿no?

B.08: Ida y vuelta. Puede ser, ¿no?

B.07: Hombre, en teoría es ida y vuelta porque es como el anterior, sería la expresión formal.

B.05: No sé, no sé.

B.07: Lo que pasa es que ahí, también formada, a ver, entonces.

B.06: Pero.

B.07: Formal ella ha dicho, o formal, formal se supone ¿qué es ninguno de ellos lo que tienes que poner?

B.05: No formal es éste.

B.06: No, formal es el i.v.s.i.

B.07: Ida y vuelta.

B.05: El ida y vuelta es formal.

B.06: Ida y vuelta es el formal.

B.07: Pues entonces está claro, formal y de ida y vuelta, ¿no?

B.05: Sí, bueno no sé.

B.06: Yo diría eso o ninguno de los dos.

B.05: Venga, yo pongo de ida y vuelta.

B.07: Y, ¿en el primero que pusimos, en el A?

B.05: Ninguno.

B.06: Ninguno.

B.08: Ninguno de momento.

B.05: Yo voto por ida y vuelta.

B.07: Yo ida y vuelta también.

B.08: Ida y vuelta.

B.05: También, pero...

B.07: O sea, yo es una expresión formal, y encima una expresión formal de uno que hemos dicho que es de ida y vuelta. Éste ya, por lo menos es otra cosa, el G.

B.05: A ver, yo.

B.06: Es que el G.

B.07: El G es ¿ninguno de ellos o no?

B.06: No, pues también tengo bastante...

B.07: Bueno, formal también, claro.

B.06: Formal yo no lo veo mucho; sería un crecimiento intuitivo ilimitado, o sea, no sé.

B.05: Yo lo veo, no, intuitivo no, porque intuitivo es cuando tú ves que los términos son ... o sea cuando miras los términos de la sucesión y ves que son cada vez mayores.

B.07: Aunque bueno, sí que te pone un ejemplo, pero es que es más fuerte.

B.06: Claro, claro, por eso, bueno por eso decía.

B.05: Pues por eso, yo este ejemplo no sé si es de ida y vuelta o es otra cosa, porque realmente si ahora vuelvo a hacer esto, o sea vamos a ver, cojo el K , del K voy al n , del n vuelvo a otro K .

B.06: Sí, sí.

B.05: Ahora cojo este otro K , puedo coger otro K , y así.

B.07: Igual es ida y vuelta.

B.08: ¿Ninguno?

B.07: Bueno damos entre ninguno de ellos, ida y vuelta, y nos decantamos ¿por?

B.05: ¿Qué están esperando a que diga yo?

B.06: Yo, ninguno de ellos.

B.07: ¿Ninguno de ellos?

B.05: ¿Por qué? Razones ¿Por qué no es ida y vuelta?

B.06: No lo veo de ida y vuelta, o sea no lo veo formal.

B.08: Si hemos puesto como de ida y vuelta el anterior, yo éste.

B.05: Se toma de la definición.

B.07: Éste es como el del rectángulo, que dice coge un número K , 100 millones, baja hasta el 10000 y vuelve al de 100 millones y 1, ¿no?

B.05: Sí, es que yo lo veo un poco así.

B.06: Sí, sí.

B.05: Como que parte de la definición, y lo que intenta es explicar es la definición.

B.06: Sí.

B.07: Sí, lo que intenta explicar es la definición, pero tampoco lo tengo muy claro, así que ... Mira, en lugar de poner un aspa en una casilla, ponemos...

B.06: Pero es que el punto este.

B.07: Una aquí y otra aquí.

B.05: Si no le entregamos dos hojas y lo que no quiera.

B.07: No, es que me da igual, es que podrían ser los dos, no lo tengo claro.

B.06: Pero por ejemplo éste es clarísimo de ida y vuelta, ¿no?

B.07: Sí.

B.05: Claro, clarísimo porque la gráfica que nos puso es la misma.

B.06: Sí, sí.

B.05: No porque lo hayamos identificado nosotros.

B.07: Pues éste, también será éste de ida y vuelta, ¿no? ... para compensar un poco ¿no?

B.05: Yo, diría ida y vuelta.

B.07: Venga, pon ida y vuelta.

B.06: Ponemos ida y vuelta.

B.05: Sí. El H.

B.07: Éste.

B.05: Otra vez...

B.06: Es que éste es un desastre. Ninguno de ellos.

B.05: No, no; esto es ida y vuelta, porque es lo mismo que la gráfica que.

B.06: Sí, sí, claro, claro.

B.07: Pues venga.

B.06: Éste me ha gustado.

B.07: Pues pon ida y vuelta.

B.05: Es la misma que la gráfica, éste ¿no?

B.06: Sí, sí, es tal cual, éste es tal cual al anterior, tal cual.

B.07: Éste, el decrecimiento, y el decrecimiento y crecimiento, ya está.

B.05: ¿Éste? espera, espera, a ver.

B.07: Decrecimiento.

B.05: ¿Estamos diciendo las letras?

B.08: Son los mismos que hemos comentado antes.

B.07: Fragmento I.

B.06: Espera, en el anterior, que es el fragmento H.

B.05: H, ida y vuelta.

B.06: Hemos concluido que es ida y vuelta, vale.

B.07: Y ahora, ¿fragmento I?

B.05: El I, decrecimiento intuitivo ilimitado.

B.07: Decrecimiento, eso es, vale.

B.05: Sí, intuitivamente, claramente.

B.08: Decrecimiento intuitivo ilimitado.

B.06: Sí, sí, decrecimiento.

B.07: Eso el fragmento I, el J, ¿también?

B.06: Fragmento J también. Sí, porque tiene, sí, se ve, además está la gráfica.

B.05: Sí, sí, sí. Y el K, crecimiento intuitivo ilimitado. Pues nada.

B.07: Bueno, ¿algún cambio de opinión?

B.05: No.

A3.3.3. Transcripción. Grupo C.

Fase espontánea

C.09: ¿Qué consideráis?

C.10: La primera definición que daría sería la del fragmento B.

C.09: Coincido contigo.

C.11: El fragmento B, sí, también me gusta el fragmento B.

C.09: Yo creo que, partiendo de una idea intuitiva, o con un ejemplo más concreto, así más numérico al principio, los chicos, los estudiantes se pueden dar cuenta de que, viendo un poco la evolución de los términos, de los primeros términos, se puede generalizar, entre comillas, a la definición de que esa sucesión tiende a infinito.

C.11: Sí.

C.09: Y de igual forma con el fragmento I.

C.11: El fragmento I que es el mismo, pero en negativo.

C.09: Exactamente, digamos que vean esa alternancia entre ir a más infinito o a menos infinito con un ejemplo más concreto; con un caso particular pueden llegar a ver...

C.10: Yo creo que quizás se debería pasar a otro concepto mayor, como por ejemplo el fragmento D.

C.09: ¿El fragmento D?

C.10: El de la gráfica.

C.11: Porque me parece que la sucesión ya es más complicada, yo empezaría con sucesiones más sencillas.

C.09: Tú te refieres...

C.10: Como que la sucesión te da un poco igual y lo que te interesa es la gráfica porque visualmente ... o sea, ves mejor que esto va creciendo.

C.11: Porque te han dado la gráfica, pero no lo ves.

C.09: Tú lo que no estás haciendo ahora mismo es la distinción, tú quieres como hacer todo infinito y luego menos infinito.

C.10: Y luego presentaríamos, ...

C.09: El menos infinito, pues a lo mejor no es mala idea, para que, digamos introducir ese concepto inicial de infinito y luego ...

C.10: Igual es porque me lo han enseñado así, no recuerdo, pero creo que sí, creo que te presentan el más infinito y luego ya, si eso el menos infinito.

C.09: Puede ser, puede ser, yo no me acuerdo, sinceramente, pero si es verdad que se puede hacer una presentación, primero un término infinito y luego ya ir con el siguiente o presentarlo de forma comparativa, a la vez, uno, luego el otro.

C.11: Yo había pensado más, digamos agarrar la misma sucesión, pero una en positivo y otra en negativo, y después ir complicando lo que es la sucesión para no enredarnos demasiado en entender que quiere decir los términos de la sucesión.

C.09: Pues sí.

C.11: Pero...

C.09: Vale, ¿entonces aquí, llegamos a un consenso?

C.11: Esa era la pregunta: ¿tenemos que llegar a un consenso o cada uno?

C.09: No, no, dijo que no, es debatir y ya está.

C.10: Sí, bueno, posteriormente otro concepto...

C.11: Por un lado, está el ir complicando la definición de la sucesión, por otro lado, está el positivo-negativo, y después están estos ejemplos que son como con tablas y ...

C.10: Yo pondría el K, el K luego, ¿no?

C.09: Sí, coincido con C.10.

C.10: La tabla ésta pues ...

C.09: El K, el K y el C, que es justo, los dos iguales. Sí. Yo había pensado, como yo había decidido comparando de infinito y menos infinito había cogido justo K y C.

C.11: O sea, ¿a ninguno nos gustan las tablas estas demasiadas complicadas?

C.09: Es que eso jamás lo había visto en mi vida.

C.11: Vale, vale, el H, estamos, nos referimos al H y al E, ¿nos parecen? A mí es que da un poco hasta de ...

C.09: Es un grado de abstracción que a lo mejor no deberían, a lo mejor ni presentarse.

C.11: En realidad, más que de abstracción, de concreción ¿no?, porque de abstracción me parece en realidad el más abstracto es el F, y el A, que es la definición.

C.09: Sí, pero al fin y al cabo la definición es como lo presentan generalmente en los libros.

C.11: Sí, sí, a mí me gusta ese nivel de abstracción, lo que no me gusta tanto es el nivel de concreción y las tablas que me dan muchísima pereza, hasta leerlas.

C.09: Sí, yo justamente el E y el H los había colocado al final; el E el último porque como digamos que es como una explicación gráfica de lo que hace el H tendrás que introducir primero el H para luego que comparen y vean con el E.

C.11: Lo que pasa que aquí somos más teóricos, yo creo.

C.09: Y luego el A, y el F. O sea, digamos A y F en un nivel superior, como los penúltimos, el A que es la definición y el F como una ...

C.11: Un paso más abstracto todavía.

C.09: Una extensión, sí, exactamente. Entonces, A, mejor no es una forma digamos correcta de presentarlos, pero a nivel educativo, a nivel de que los chicos lo entiendan creo que puede ser más beneficioso para ellos, para que entiendan mejor que no siempre de casos concretos, y luego dar la generalización correspondiente al concepto.

C.11: Estoy de acuerdo, también obviamente depende del nivel de la clase.

C.09: Exactamente, por ejemplo, en nivel de 4º de la ESO yo ni siquiera daría límites, porque yo no los di, das la idea intuitiva.

C.11: Un momento que piense, 4º de la ESO es ...

C.09: 2º de BUP.

C.11: 2º de BUP. ¿No visteis límites?

C.09: Yo en 4º de la ESO no vi límites, vi los límites en ampliación de matemáticas que había una optativa, pero en 4º no se dan o se dan muy de pasada, es decir, pues estas funciones cuando se veía el concepto de función, el $\frac{1}{x}$, pues se decía si la x es muy grande, pues con la gráfica ves que te vas acercando a 0.

C.11: Ya.

C.09: Entonces si trabajásemos como una sucesión, esa sucesión tendería a 0 ... pero el concepto de límite como tal, o hablar de límites, en 4º de la ESO no se dio.

C.11: Y ¿no se dan derivadas?

C.09: No se dan derivadas tampoco.

C.10: Las derivadas en 1º ¿no?

C.09: Las derivadas se introducen en 1º.

C.11: En 1º de Bachillerato.

C.10: Las derivadas yo creo que sí.

C.09: Yo creo que no, por lo menos, yo el libro que manejaba, que era de la editorial Anaya, no tenía límites, no me salía tanto nivel de concreción como viene aquí. No sé qué más decir.

C.10: Coincidimos que el F.

C.09: Coincidimos que el F y el D son los últimos.

C.11: No, el H y el E.

C.09: Perdón, el H y E, sí.

C.11: O yo casi que los pongo, pero bueno.

C.09: Yo era, establecer a lo mejor los niveles, los niveles educativos, pues hasta aquí llegaríamos en 4º, yo sinceramente en 4º.

C.10: Yo el F no lo vería en la ESO, ¿no?, o en Bachillerato tampoco.

C.09: Tampoco el F, yo es que ni el F ni el H ni el E, justo, justo los tres últimos, F, H y E; a lo mejor el F.

C.11: Pero es que ...

C.09: El F, el F, tampoco es digamos ...

C.10: Yo introducir el concepto de cuerpo...

C.11: La definición de cuerpo...

C.09: Claro.

C.11: Hasta ...

C.09: Yo en 2º de carrera la di.

C.11: Hasta primero o así.

C.09: También, también.

C.10: Claro.

C.09: Vale, yo diría que a lo mejor los fragmentos B, I, D y J sí se pueden presentar, a lo mejor, en un curso de 4º de la ESO para que tengan esa idea intuitiva, aunque sí bien es cierto que, por ejemplo, yo cuando estaba en ese curso no me introdujeron la idea de límite salvo en ampliación de matemáticas, no sé si opináis lo mismo de, digamos que en 4º si eso, por, ya introducirles un poco, abrirles las puertas al concepto de límite, yo daría el B, el I, el D y el J, es decir, los que son más esclarecedores, más intuitivos, con ejemplos concretos, o bien con la visualización gráfica... no daría mucho más, no sé si vosotros opináis...

C.11: Hombre, yo, siempre después de introducir los ejemplos concretos, yo siempre me gusta recurrir a la definición formal.

C.09: Pero eso no se lo puedes poner a un chico de 4º, yo creo que no tiene todavía...

C.11: No tiene el lenguaje.

C.09: No tiene todavía esa formación en el cerebro que...

C.11: Bueno, en el cerebro sí, lo que no tiene...

C.09: Que no tiene digamos la ... desarrollado tan...

C.10: Bueno el cerebro está en desarrollo, todavía...

C.11: Bueno, yo lo que yo quiero decir es que si yo lo hice el que hayan cambiado los programas es una cosa, pero yo no me creo que ...

C.09: Claro.

C.11: Que no tengan la capacidad, simplemente que han cambiado los programas y que no se hace.

C.09: Claro.

C.11: De hecho, entonces no conocen el lenguaje.

C.09: Claro.

C.11: Pero la capacidad la tienen porque la teníamos hace 20 años, así que ... pero bueno si no, si no se conoce el parámetro, por ejemplo, pues es que no, o simplemente la notación de esto, pues ...

C.09: Incluso los fragmentos de tablas, los K y el C, que son los de tablas, esos también se pueden dar en la ESO, en 4º de la ESO, pero más allá de la definición, es que no la van, la pueden entender, pero yo creo que es más una memorización por parte de ellos, que se lo tienen que aprender de memoria más que lo lleguen a entender porque...

C.11: El tema de las tablas, ¿dices?

C.09: No, no, el tema de la definición, que las tablas a lo mejor sí se presentan porque eso sí que lo entienden por qué, al fin y al cabo.

C.11: Ya.

C.09: Sucesiones y ecuaciones, particularizar casos, manejar las variables, etcétera, eso sí que están más acostumbrados pero ya saltar de ese nivel, digamos, a un nivel más abstracto, desde mi punto de vista, en 4º de la ESO, no, ya en 1º de Bachillerato se podría dar perfectamente la definición que es el A, el A, y que más tenemos por aquí, el A, y el A y ya en 2º si me apuras, pero vamos yo es que ni lo daría, ni el H, y ¿cuál era el otro?

C.10: El D.

C.09: Ni el H, ni el E ni el F los presentaría en Bachillerato más que nada debido a que en Bachillerato se les está preparando para que realicen la prueba de la EvAU, entonces pues no, no sé si es apropiado por temporización de las asignaturas o por falta de tiempo, pero yo creo que sería meterse un poco en, que sí lo puedes dar pero faltaría mucho, te faltaría tiempo, a lo mejor, para dar otras cosas, y tampoco creo que muchas personas que hacen, a lo mejor, matemáticas, por ejemplo, los de sociales, los de Bachillerato de Ciencias, aplicadas sociales, ven límites super, supersencillos, y vamos, le pones algo de esto y te dicen no, no, yo soy de letras, bueno de letras, las mates no, a mí lo esencial para aprobarlo, o lo esencial poder aprobar la prueba, la EvAU, y bueno, pues eso es todo, de momento. Sí, ¿alguna sugerencia más?

C.11: No, voy a apuntar lo que hemos dicho y ya está.

C.10: Yo creo que igual, como en 2º lugar, antes de la gráfica, que lo he dicho antes, creo que quizás pondría antes las tablas.

C.09: ¿Las tablas?

C.10: Sí, igual convendría.

C.09: Es que tanto las tablas, las gráficas ...

C.11: Yo pondría las tablas antes que las gráficas simplemente porque ...

C.09: Porque la sucesión es más sencilla.

C.11: La gráfica es más complicada de ver y de desarrollar.

C.09: Vale, entonces, yo también opino.

C.10: Es que además en las tablas.

C.09: Se ve más.

C.10: La idea está como más ...

C.09: Se ve mejor, ¿no?

C.10: Sí.

C.09: Vale, pues entonces, tenemos la B y la..., bueno hacemos al final la temporización todo por infinito y luego menos infinito, o ¿hacemos?

C.10: Me habéis convencido.

C.11: ¿Te hemos convencido? Pues estupendo.

C.09: Pues entonces, B e I, ¿no?, después ¿cuál venía? las tablas hemos dicho, que también estoy a favor.

C.11: La G.

C.09: Sería la G. ¿la K primero? ¿la K y la C, no? La K y la C

C.11: La K y C.

C.09: La K es la de más infinito y la C la de menos infinito, ¿me parece?, si no me he confundido, vale, después ...

C.11: La G, ¿dónde la pones entonces?

C.09: No, la K y la C.

C.11: Ya, pero la G, ¿dónde la estás poniendo?

C.09: Ah, la G, ¿dónde la he puesto?

C.11: ¿Por qué la has puesto ahí abajo?

C.09: La he puesto detrás, claro, primero digamos la idea de una sucesión concreta y viendo términos, y viendo la evolución, luego las tablas, luego la gráfica, y luego ya la G.

C.10: Sí.

C.09: Que la G es como más, ya listón, ya, ya introduce un poco como el valor de..., a la definición, te introduce un poco, dices.

C.11: Okey.

C.09: Coges un valor, tal que...

C.10: Estás dando un n.

C.09: Es lo que pasa, estás ...

C.11: Ya, Okey.

C.10: Estás superando ese nivel.

C.09: Entonces B, I, K, C, D, J entonces, D, J, (DJ, DJ) la G y luego A, F, H, E y ahora podemos introducir la definición, yo creo con esa idea intuitiva de la G, meter la A, y luego ya la F, la H y la E, no sé yo la forma en que...

C.10: Yo he puesto antes la E que la H.

C.09: ¿Antes la E que la H?

C.10: La tabla...

C.09: Ya, pues puede ser, pero al fin y al cabo ese cuadro, digamos es como, si hay más ejemplos para que vean luego la idea que se presenta en el H, o sea, la explicación, pues podría ser.

C.10: Yo solo por eso lo pongo antes.

C.09: Vale.

C.10: Lo ideal de donde surge la función esa $n(H)$.

C.09: Vale, vale, vale, perfecto, estoy contigo. Entonces hemos dicho, después de la A, la E, la H y ...

C.10: Y por último la F.

C.09: Por último, la F, que directamente creemos que la F no se presentaría ni siquiera en Bachillerato, vale, pues ya está.

Fase inducida

C.09: Primer fragmento. Bueno, vamos a ir con el primer fragmento. Fragmento A. ¿qué consideráis?

C.11: Yo creo que es el fenómeno de ida y vuelta.

C.09: Vale.

C.11: Pero, estabas diciendo que por ser la definición.

C.09: Sí, o sea, digamos que por el hecho de ser la definición tal cual, eh, bueno sí podría, o sea, digamos que como que el fenómeno de ida y vuelta parte de esa definición, ¿no? Porque es, cogemos el M , bueno, también puede ser de ida y vuelta, tomas el M , pillas el n_0 vas pa' acá y ya luego vuelves para atrás, pues sí podría ser.

C.11: Es que justo...

C.09: Sí, es justo.

C.11: La descripción del ...

C.09: La descripción del ida y vuelta.

C.11: Del ida y vuelta, parece.

C.09: Vale, perfecto.

C.11: Eso es, ..., esto

C.09: Vale.

C.10: El siguiente está claro, ¿no?

C.09: El siguiente, es c-i.i.

C.11: Crecimiento intuitivo ilimitado

C.09: El C, el d-i.i., ¿no?

C.11: Esto se va a menos infinito, pues sí.

C.09: Decrecimiento intuitivo ilimitado

C.11: Eso es

C.09: Porque a partir de ejemplos concretos y de particularizar unos valores de la sucesión se observa que efectivamente crece pa' abajo, como que crece pa' abajo, que el valor absoluto se va haciendo más grande, ¿no?, ¿lo he dicho bien?

C.10: Sí

C.09: El valor absoluto se va haciendo más grande.

C.10: O que decrece.

C.09: O que decrece.

C.11: O que decrece. Simplemente. Ilimitadamente, intuitivamente. Fragmento D. Esto va a crecer también.

C.09: Sí, este es un c-i.i.

C.11: Pues también.

C.09: Sí ¿no? Porque fíjate es de, es de la fenomenología intuitiva, otra cosa es que los sistemas de representación sean verbal, visual, ...

C.11: Ah, ¿no nos está preguntado?

C.09: No nos está preguntando el sistema de representación sino la fenomenología y claro aparece al tomar la sucesión, e ir particularizando en valores se ve a partir de una gráfica, efectivamente, el crecimiento intuitivo ilimitado; vale, yo por mí estoy de acuerdo con C.11.

C.10: Sí, crecimiento

C.09: Pues ya está.

C.11: El fragmento E es otra vez la ida y vuelta.

C.09: Yo es que ahí discrepo, creo que están los dos, yo creo que está el c-i.i. e i.v.s.i., el ida y vuelta porque partes de un ejemplo concreto, al fin y al cabo, partes de la sucesión n^2 , y vas viendo como con valores concretos 1, 2 y 3 se produce ese fenómeno de ida y vuelta, y a la vez con los puntitos en la representación gráfica se observa.

C.11: Toda la razón.

C.09: Nosotros consideramos, yo creo que son los 2, si tenéis algún tipo de ...

C.11: Ah, por eso le preguntabas.

C.09: Por eso le preguntaba si había ...

C.10: El de ida y vuelta más o menos como...

C.09: El de ida y vuelta pues se nota coges.

C.11: Coge el 9

C.09: Para el 9, el 3, llegas al 3, partes al 4, o sea, coges uno mayor y ¿el n_0 sería el 3?, ¿el n^* sería el 4?

C.11: Que la sucesión se te va a 16 que ...

C.09: Que es más grande que la M que había fijado, prefijado. Vale, como comprobando la definición. Pero ves, claro, vas comprobando la definición, se ve ese ida y vuelta, pero es que intuitivamente se observa también. También. Que digamos que habría con una mixtura de esas dos cosas, ¿no?

C.10: Entonces, vale, salvo para la definición, para cualquier otra, el ida y vuelta, siempre estaría acompañado por alguno de estos, d-i.i., c-i.i.

C.11: Claro, si es un ejemplo concreto o crecerá o no, o decrecerá.

C.09: Claro.

C.11: Sí, es si crece, claro.

C.10: Salvo por la definición, que no hay una representación formal, no hay ejemplos.

C.11: Que no hay ninguna otra definición.

C.09: Que, por ejemplo, éste el fragmento siguiente F se corresponde con el de ida y vuelta, otra vez, porque esto más un H . Existe un v tal que ¿no? O sea que básicamente. ¿No? ¿O no tiene esa ida y vuelta? eso no es nada o yo que sé. Coges un elemento H de K , ¿no?

C.11: Sí, claro, es lo mismo lo que pasa ...

C.09: Coges un v .

C.11: Claro, en lugar de usar los naturales está usando un cuerpo, pero...

C.09: Sí, pero mi pregunta es ¿tiene lo de ida y vuelta? Porque ...

C.11: Yo creo que sí.

C.09: ¿no? Porque, no, si toma el H , pero ya de ese H no se va a construir, no dice que hay un n_0 , sino directamente, o sea, dice que hay un v , sí, ah sí, yo creo que es lo mismo.

C.11: Sí, es exactamente lo mismo.

C.10: Es muy natural.

C.11: Sí, sí, sí, que me he liado, que me he liado.

C.10: Te cambia los ejemplos.

C.09: Sí.

C.11: Te queda generalizado el cuerpo, pero...

C.10: Sí, yo diría que sí que es ida, vuelta.

C.09: Es ida y vuelta como tal. Como tal, porque no hay ninguna particularización ni...

C.11: Bueno, el primer caso, lo que pasa es que esto tiene dos partes, para el más infinito es crecimiento y para el menos infinito es decrecimiento, o sea tenemos los tres.

C.10: No, no, no, yo lo pondría solamente de ida y vuelta.

C.09: Pero no es intuitivo, yo creo que no porque la particularización, o sea no se ve de manera intuitiva, sino que es más un aspecto formal.

C.11: Vale, vale.

C.09: Entonces volviendo al fragmento E sí que...

C.10: Sí que te admite entonces, ida y vuelta.

C.09: Yo admitiría esas dos.

C.10: Sí, sí.

C.09: Esas dos cuestiones.

C.10: Ida y vuelta, y crecimiento ilimitado.

C.09: Porque se ve a partir de la representación gráfica esa elección del valor M , bueno, que aquí le llama H , coges el n_0 , partes al siguiente, el superior, el n y vuelves otra vez al a_n , comprobando que efectivamente.

C.11: ¿Estás en el E otra vez?

C.09: En el E, comprobando efectivamente que el a_n que has sacado es superior al M tomado (pero, vale, pensaba que se había parado la grabadora) pero lo hace con una particularización de un caso en concreto y ...

C.11: Y aquí como no hay.

C.09: Con la representación gráfica, con los puntitos se va viendo...

C.11: ¿Y aquí en el F decís que como no hay particularización?

C.09: Claro, eso a veces, es un aspecto más formal, yo creo, no se ve de forma intuitiva.

C.11: Ya, ya

C.09: Aquí sí que con el dibujito.

C.11: Sí, sí

C.09: Se ve de forma intuitiva, pienso yo.

C.11: Cierto

C.09: Vale, estamos de acuerdo, bien. Posterior fragmento, G. Aquí es lo mismo ¿no?, lo del listón.

C.11: Ah, lo del listón me encanta.

C.09: A mí también.

C.11: La M ahí ...

C.09: Le llama K ahora, básicamente, ¿no? Otra vez para cualquier $M > n$, que es n_0 , que le llama n^* .

C.11: Es la misma historia.

C.09: Es la misma historia, pero con un ejemplo concreto, a mí, o sea que yo creo que aparece.

C.11: A mí también.

C.09: El ida y vuelta y el crecimiento, porque lo ves un poco de manera intuitiva.

C.11: Sí, sí

C.09: Bueno, pero también aquí, una cosa, intuitiva, aquí no particulariza, no nos hace ver varios casos sino simplemente, eh, pone un ejemplo ... entonces no sé yo si ...

C.11: Yo es que lo veo y digo, sí decrece intuitivamente pero claro para el que lo ve la primera vez.

C.09: Entonces no sé si serían las 2.

C.11: Ya.

C.09: Sigue esa mixtura entre las dos, porque, o sea, intuitivamente a lo mejor te da un ejemplo, intuitivamente, es que para mí, para nosotros, a lo mejor sí que aparece la

intuición por el hecho de que particulariza en ese ejemplo en concreto, pero no es como por ejemplo en el fragmento E, donde sí que ve, deriva esa representación, que haya ese crecimiento intuitivo.

C.11: Ya.

C.09: Entonces, no sé.

C.11: Ya.

C.09: Lo dejamos en duda, vamos a poner interrogación de duda, de momento.

C.11: Muy bien.

C.09: Vale. Bueno, el fragmento H yo directamente, tanto el H como ..., ¿cuál habíamos dicho inicialmente que lo pondríamos en Bachillerato?

C.11: Esto es ida y vuelta, otra vez.

C.10: El F, el F, el F por el hecho del cuerpo, vale, que es el que desecharíamos de Bachillerato, vale.

C.11: El H, el H ¿también lo hemos desechado no?

C.09: No, hemos dicho que a lo mejor se podría dar en 2º de Bachillerato.

C.11: Yo he puesto “yo no lo daría”, no esclarece.

C.09: No esclarece. Es que ahí también en el caso ese del H y del, ¿cuál era el otro? No me acuerdo, bueno, el caso del H sí es cierto que yo tampoco me parece que ...

C.11: No, a mí no me gusta el H.

C.09: Es una construcción a lo mejor un poco, digamos, no difícil pero sí un poco difícil, vaya redundancia, difícil de ver, pero no sé.

C.11: Bueno el caso es que tiene ...

C.10: Eso es ida y vuelta.

C.11: Tiene la ida y vuelta, ¿no?

C.10: Sí.

C.09: Tiene la ida y vuelta, y también ...

C.11: Y también la de crecimiento.

C.09: El crecimiento intuitivo ese porque como se ve en las tablas H coges el 10, coges el 10 y entonces el v que sería el n_0 , es el 3, te vas al n que es el 4, pero no se ve esa...

C.11: Hombre, pero si tú te coges los a_n , aquí ...

C.09: Se comprueba intuitivamente.

C.11: 16, 25, 36, 49, ...

C.09: Que supera al H tomado es verdad, pues yo creo que, yo creo que aparece en los dos también, pero ...

C.11: No tanto que supera al H , sino que está creciendo y que esto crece indefinidamente.

C.09: Sí, pero el H que tomas es como el M ese de la definición, entonces sí que se ve. Ya, lo que pasa ...

C.11: Pero yo aquí solamente en esta fila.

C.09: Sí, la segunda columna, fila.

C.11: Que pone a_n y va creciendo, ahí ya, con eso ya yo marcaría el c-i.i.

C.09: ¿Sin el ida y vuelta?

C.11: El ida y vuelta también.

C.10: Yo creo que sí.

C.11: Lo veo aquí, pero ...

C.09: Ah vale, vale, sí, sí, completamente de acuerdo, sí, sí, yo estaba diciendo que se puede ver lo de ida y vuelta por el hecho de H .

C.11: Eso sí.

C.09: Coges el v , encuentras el n y efectivamente comparando la segunda y la tercera fila se aprecia.

C.11: Ya, yo el ida y vuelta lo veo casi mejor, más fácilmente en la primera frase.

C.09: ¡Aja!

C.11: Que en la tablita, pero bueno también...

C.09: Vale, ¿estamos de acuerdo de momento? Bueno de momento llevamos mucha....

C.09: Lo llevamos bastante bien.

C.11: Lo llevamos bastante bien

C.09: Bueno, el I es clarísimo, ¿no?

C.11: Decrecimiento.

C.09: d-i.i. ¿no?

C.11: Decrecimiento.

C.09: Vale, vale. ¿El J?

C.11: También.

C.09: Yo diría que también d-i.i. porque no se ve esa ida y vuelta.

C.10: Sí, sí

C.09: Se ve simplemente con, vale. Y ¿el K?

C.11: Pues, crecimiento ¿otra vez?

C.10: No, este crecimiento ¿no?

C.09: El K es crecimiento ¿no?

C.10: Una tabla que demuestra valores.

C.09: Sí, sí, totalmente de acuerdo; vamos a debatir un poco más el que habíamos dejado en interrogación, que era el G, que el G ya es uno de los que se introduciría en 1º de Bachillerato antes de la definición para que viesen qué podría ser. Entonces nuestra tesitura, nuestra cuestión es: ¿se ve ahí?

C.11: ¿Es intuitivo?

C.09. Si es intuitivo o no.

C.11: A ver, los términos se van haciendo cada vez mayores, jolín. Sí te lo está diciendo.

C.09. Sí, sí, pero no, no, yo no lo veo intuitivo; o sea, te dicen coge el K , tomas un valor n que es 100, de 10 000 perdón y le sumas 1, entonces ... y con eso ya, no sé, no yo no lo veo intuitivo, o sea, yo creo que un chico o chica de 1º de Bachillerato que es donde hemos considerado nosotros introducir esta, este fragmento dentro de la desarrollo de la clase.

C.11: El G ¿era Bachillerato?

C.09: Sí, habíamos puesto que a partir del G, Bachillerato.

C.10: Sí, es lo que dice, solo dice los términos se van haciendo mayores.

C.09: Claro, se ve.

C.10: Es la única frase.

C.09: Se ve, claro, se ve, se ve el concepto del fragmento A, que es generalizado, se ve a un caso concreto pero desde mi punto de vista no llega a ser intuitivo, a lo mejor el alumno no, no puede sino que simplemente, claro dices van aquí, cojo éste, G , en vez de coger un M genérico, digo G , perdón K 100 000, voy pa' atrás, cojo el n 10 000, perdón el n^* , el 10 000, cojo uno mayor, por ejemplo el 10 001 y ya de ahí calculo el a_n siguiente.

C.11: Ya, pero digamos, sin fijarte en toda esa parte, simplemente en la definición, en cuanto te definen el a_n , sí aquí $a_n = n^2$ del fragmento B nos ha parecido crecimiento intuitivo.

C.09: Sí pero que como ...

C.10: Sí como que se muestra.

C.11: Lo he escrito antes.

C.09: Porque te muestran más términos ahí.

C.11: Ya, y aquí, no te los... vale.

C.09: Entonces, yo a lo mejor quitaría ese de ...

C.11: Vale.

C.10: Solo hay de ida y vuelta.

C.09: Yo diría que es ida y vuelta por el hecho de que, no se ve claro o no ve intuitivamente, a lo mejor para nosotros sí, pero para un estudiante de Bachillerato puede no verse claro el hecho de que, de que intuitivamente esa sucesión crezca, se vaya, tienda a más infinito (comentarios acerca de si funciona la grabadora) porque otra cosa no sé si, yo creo que es eso.

C.10: Te lo dice, pero no te lo muestra.

C.09: Claro, digamos que tienes una representación escrita.

C.10: Y lo que te muestra es el ida y vuelta, y claro, y es que es solo para un caso.

C.09: Claro, es digamos una particularización del fragmento A que hemos considerado de ida y vuelta, pero yo creo que para ellos intuitivamente no consideran, hombre,

suficientemente interesante dirán “pero profe este no es el ejemplo que nos has puesto antes de que se ve, que va creciendo” ... sí, pero ...

C.10: Estamos viendo los fragmentos aislados.

C.09: Claro, es como si tú presentas eso de primeras, ellos intuitivamente, no creo que, no creo que consideren que esa sucesión va a infinito, sino simplemente es construirles la definición de límite con un caso concreto y, a partir de esto, consideramos que hay que modificar la tabla del primer audio.

C.11: Yo ya... No, no ¿por qué?

C.09: Creemos que, digamos esa alternancia entre ir presentándolo más infinito y menos infinito, ¿ir comparando? o ¿creemos o preferís o creéis qué es mejor todos, de dar todo, todas las cosas de más infinito y luego irse a menos infinito, o ver esa alternancia entre ambos conceptos?

C.11: Yo no he cambiado de opinión.

C.10: Yo tampoco.

C.09: Yo es que considero que es más esclarecedor el ver, esa alternancia y ver que lo mismo que se está haciendo para más infinito se vea para menos infinito.

C.11: Es que es simétrico.

C.09: Porque muchas veces, a lo mejor, suelen decirte o te exponen todo el caso más infinito y te dicen caso menos infinito análogo.

C.10: Sí.

C.09: Entonces yo creo que te puedes permitir, dentro de tu temporalización de la clase, ver esa alternancia entre un caso y otro esto; entonces, tras haber estudiado esto más detalladamente, el Grupo 3 (numeración asignada en la asignatura en la que se realizó la intervención).

C.11: Pensamos lo mismo, tras haber estudiado esto, pensamos lo mismo.

C.09: Consideramos que, que la, ay no me sale la palabra, que la...

C.11: Que el orden...

C.09: Que el orden que hemos establecido sobre cómo introducir los conceptos de límite, del límite cuando una sucesión tiende a infinito o, se deja tal cual.

C.11: Que es lo mejor

C.09: Sin variación con respecto al primer caso y, no sé si, bueno, destacar como ya hemos dicho anteriormente que los fragmentos, el fragmento F, el fragmento F yo creo que no debería introducirse en 2º de Bachillerato porque aparece el término “cuerpo”, que generalmente pues no se da.

C.11: Yo creo que hasta 1º de carrera.

C.09: Hasta 1º o 2º de carrera e incluso tampoco, a mí no me llega a gustar la definición, esto es una opinión propia, pero bueno.

C.11: ¿La de cuerpo?

C.09: No, es que no, creo que, no sé, debe ser que cómo cuando te han enseñado a ti, o cuando nos han enseñado a nosotros, nos enseñaron el A, el fragmento A, yo creo que esa es la, digamos la natural, no la natural sino la que tú tienes ya metida en tu cabeza y cómo que las demás pues dices “buf”, que no digo que sea ni mejor ni peor pero yo, por ejemplo, no la daría ni en carrera ni en nada, y luego respecto a la E y la H, si hubiese tiempo, en el desarrollo de la clase se podrían introducir en 2º de Bachillerato, siempre hablando de Ciencias, porque consideramos que en Ciencias Sociales ese nivel de abstracción generalmente no lo tienen, o digamos les cuesta más asimilar el lenguaje abstracto ¿no?, tener esa capacidad de abstracción; muchas veces es siempre con ejemplos, y si le pones otro ejemplo distinto, dicen “ah, pero qué distinto, no es lo mismo” entonces nos quedamos en que para los niveles, nivel de ESO muchas veces, en muchos libros de texto no se da, ni siquiera se introduce, se introduce un poco la idea de lo que es el límite de una sucesión cuando tiene más infinito pero muy, muy pinceladas ¿no?, no entrar en, no entrar en detalles, no me salía la palabra. Entonces si quisiera el profesor se podría introducir los fragmentos B, I, K, C, D, J en 4º de la ESO, pero vamos, si no tampoco, consideramos que sea contenido, por lo menos, en el currículum de la ESO no aparece, y luego la G, A sí que se tendrían que dar, por lo menos en Bachillerato de Ciencias, y la E y la H se podrían dar si hubiese tiempo pero, y la F descartada vamos, por lo menos desde mi punto de vista, no sé qué opinan mis compañeros, que hablo mucho y no les dejo hablar a los pobres.

C.10: Yo la F, no estoy de acuerdo en que, en carrera, en la carrera sí, pero en carrera de la Universidad, me parece.

C.11: Lo que pasa, digamos tú ves el cuerpo ordenado. Pero no vas, necesariamente vas a ver límites en otros cuerpos, digamos...

C.10: En Universidad sí me hubiera gustado ver la definición esta.

C.09: Bueno, pues vamos.

C.10: A mí me gusta la definición.

C.09: A mí me choca.

C.10: Porque te hace ver cuerpo ordenado, tal ...

C.09: Sí.

C.10: Hace relacionarte más cosas.

C.09: Sí, pero no sé, a mí, yo...

C.11: Lo que pasa es que...

C.09: Yo me quedo, yo me quedo con la A, y entonces ...

C.11: ¿En qué contexto ves sucesiones en cuerpos ordenados que no sean los naturales? Vamos, a lo mejor, si te metes en alguna asignatura como lo demás muy específica, en un proyecto muy específico.

C.10: Cuerpo, cuerpo, lo de natural no es un cuerpo.

C.09: No, porque no hay inverso, es un anillo me parece, creo, no porque tampoco hay opuesto, lo natural, ¿no? En los anillos tiene que haber opuesto, ¿no?

C.10: Sí, creo.

C.09: No, había otra cosa que no era cuerpo, otra cosa que era más, un nivel, dominio de integridad, a lo mejor puede ser que sea un dominio de integridad.

C.11: No me acuerdo, esto es el álgebra básica de 1º.

C.09: Dominio de integridad, es que no había divisores de 0, entonces los naturales no tienen ningún divisor de 0 ¿no?

C.11: Bueno pues los enteros...

C.09: Claro, los enteros sí, los enteros son dominio de integridad, pero no es cuerpo, cuerpo ya serían los, los...

C.10: Los racionales.

C.09: ¿Los racionales? Sí, creo que sí.

C.10: Sí, los racionales. Existe inverso.

C.09: Claro, existe inverso y todo eso, así que; bueno, pues sí, yo como dice C.10, pues se podría haber visto, se podría ver en la carrera, no sé, yo tampoco...

C.10: A mí me gusta por relación al concepto.

C.09: Sí, vale.

C.11: A mí la verdad que, cuanto más teórico y más abstracto, más me gusta; en cuanto veo números ya...

C.09: Como somos, como somos matemáticos pues sí, nos, todo esto nos apasiona, pero en el ámbito de la didáctica, a nivel educativo para Bachillerato, yo no pondría.

C.11: Ya, no, eso es verdad.

C.09: El F , incluso ni el E ni el H , bueno el E ... ¿cuál era el otro?, que me estoy liando ya ... el E y el H exactamente, yo esos incluso los descartaría porque yo, por ejemplo, cuando hice Bachillerato vi la definición y ya.

C.11: Ah vale es que este K es, eh, hace referencia a los reales de aquí.

C.09: Claro.

C.11: El M es de los reales, vale, vale, me estaba confundiendo, el n es de los naturales y el M es de los reales, estupendo.

C.09: Bueno pues al final hemos a consenso, y nada, pues Grupo 3.

C.11: Hemos concluido.

C.09: Hemos concluido que, esa ha sido nuestra, el orden que hemos establecido para presentar el concepto de límite cuando tiende a infinito y nada, hasta aquí.

A3.3.4. Transcripción. Grupo D.

Fase espontánea

D.12: Vamos a empezar a comentar los fragmentos que nos han proporcionado.

D.13: El primero, a ver, yo, por ejemplo, el primero yo no lo veo útil porque es muy formal. Primero, los niños no van a entender los símbolos matemáticos, lo de sí y solo si, para todo, y todo eso. Eso empezando por ahí, y ya después, ya de por sí, nosotras, que, es que tú en ingeniería no sé si has dado estas cosas tan formales, pero nosotras, yo, en el primer momento tengo que decir, -vale, voy a ver lo que pone- y estoy muy acostumbrada a leer estas cosas, entonces unos niños que no están acostumbrados en nada a leer esto, no se van a enterar de nada, creo yo.

D.14: Bueno, yo creo que algo, a lo mejor, formal sí habría que ponerles, a lo mejor no así de esa forma, con los signos matemáticos, pero más bien, más redactado o lo que sea.

D.13: A ver, yo creo, que éste, eh, incluir esto está bien pero ya como, cuando ya tú has explicado bien a los niños qué sentido tiene, cuando ellos ya están bien familiarizados sobre qué es límite infinito, qué es una sucesión y todo eso, cuando ellos ya lo tienen muy bien asumido, ya decís mira pues ésta es la definición matemática, y porqué se pone esto y por..., porque, al fin y al cabo, algún día si ellos no se acuerdan y la buscan, van a encontrar, lo más seguro, esto y no van a saber interpretarlo; pero antes de darle esto, creo que ellos deberían de saber bien qué se refiere cada cosa y cada.

D.12: Éste digamos que es el, la expresión teórica de lo que es.

D.13: Esta es la definición teórica.

D.12: Exacto, entonces antes de dar una definición teórica a unos niños que están empezando a dar límite infinito, lo que yo los ubicaría de una forma un poco más realista usando números de verdad.

D.13: Claro.

D.12: Más que...

D.13: Es que ellos por ejemplo, sí y solo si para todo $M > 0$, tiene M , ¿sabes?, y para un natural que sea mayor que, de todas formas yo no sé, supongo que antes de dar esto ya tendrían que saber bien lo que es una sucesión, pero yo, por ejemplo, con mis primos,

unas niñas o así que le di clase, realmente tampoco saben muy bien a qué asociar para el natural tal, el término tal, para...

D.12: Exacto, eso es lo que yo decía también, que.

D.13: Les cuesta un montón, y al fin y al cabo es como una aplicación, pero les cuesta un montón eso, entonces si ya de por sí te cuesta mucho, creo yo, relacionar el natural con el término, ya hablarle de para un natural no sé qué no sé cuánto, es como ¿qué?

D.12: Claro.

D.14: Les cuesta mucho, pero yo creo que también es necesario porque cuando yo, por ejemplo, cuando llegué a la carrera y me pusieron esto directamente, yo digo –espérate-.

D.13: Claro.

D.14: Y entonces, a lo mejor, me hubiera venido bien que a lo mejor en 2º de Bachillerato me hubieran puesto esto, me hubieran explicado un poco, aunque no le diera mucho hincapié, pero...

D.13: A mí me parece que los niños tienen que saber asociarlo y todo, pero desde un primer momento.

D.12: Entonces estamos de acuerdo en que no es la forma de, de iniciar la explicación de...

D.14: No, para iniciar no.

D.12: Vale, pues si queréis, estamos todos de acuerdo, y aparte que, si queremos, si vemos que dependiendo un poco del nivel pues a lo mejor en Bachiller, sí sería interesante si se explican los límites, dejar algún lugar dentro de las explicaciones para intentar transmitir a los niños que hay una forma matemática formal de explicar lo que es un límite.

D.13: Es que tienen que estar también familiarizados con los términos, en plan, como la escritura matemática.

D.12: La escritura matemática.

D.13: Pero no desde pum, toma.

D.12: Exacto. Bueno, pues si queréis, pasamos el siguiente.

D.14: Vale.

D.12: Venga, si queréis en éste, empiezo yo, que.

D.14: Bueno, ¿ahora vamos con el fragmento B?

D.12: Exacto, de los que nos han repartido. Creo que éste es un caso un poco más sencillo y justamente, para mí, sería la forma de iniciar la explicación de lo que es un límite a más infinito. Vale.

D.14: Pone un ejemplo tipo.

D.12: Porque pone un ejemplo que todos los niños van a estar, van a estar familiarizados y conocen evidentemente lo que es una sucesión de números.

D.14: Sí.

D.12: Entonces al darles un ejemplo directamente más que una fórmula, sí que pueden encontrar que esa sucesión tiende hacia algo que siempre puede crecer.

D.13: A ver, yo también lo veo muy útil, pero, por ejemplo, ya con relación al C, me parece, a lo mejor, como has dicho que tú ponías primero el B, me parece, a lo mejor, más útil poner primero el C porque se le ve una tabla, dónde si le das los datos de la sucesión, pero además le dices para qué n , ¿sabes?

D.14: Justamente, para que diferencias más.

D.13: Claro.

D.12: Pero es que aquí, en éste se le dan los números antes, yo creo que los niños aterrizan lo primero en los números, igual el C, el C primero; antes que el C, está el $n^2 + 1$, que es el K.

D.13: Que ellos vean cómo va avanzando, claro, pero pueden que digan porqué salen esos números, ¿sabes?: ¿de dónde sale el 1, el 4, el 9, el 16?

D.12: Ya, pero el K que es el que tú dices es ya el límite hacia más infinito.

D.13: Ah, claro, sí, es que más o menos son lo mismo.

D.12: Exacto, éste hacia infinito, sí, que a lo mejor en vez darlo como una sucesión, darlo en una tabla.

D.13: Claro, es que...

D.12: No te creas que todos los niños están familiarizados con las tablas, eh.

D.13: Ya, pero.

D.14: Pero está bien por diferenciar lo que ha dicho ella, que muchos niños se confunden en el n , en el índice con el término, entonces dándoles esta tabla pues pueden...

D.13: Es que claro, tenemos que saber si ellos realmente saben muy bien el concepto de sucesión.

D.12: Pero es que el índice si $n = 1$, aquí también $n = 1$, el índice es el mismo.

D.14: Claro, pero muchos dicen, pues para el término 1 como que confunde el valor de la sucesión con el índice, por ejemplo, aquí el 10, 99, pues estos niños lo confunden.

D.12: Que no saben distinguir el valor con el orden, o sea con el término de la sucesión. Sí, bueno, que, a lo mejor, también, a lo mejor, se puede presentar esto, la sucesión así clara y ahí digan vamos a representar esto en una tabla y poner, a lo mejor, la fórmula ¿no?

D.13: Sí, a lo mejor así, que vieran que es una sucesión de números. Es que claro tendríamos que saber si realmente, antes del límite, que supieran muy bien lo que es una sucesión.

D.12: Hombre, está claro, está claro. Eso lo primero.

D.13: Suponiendo que saben perfectamente que lo que es una sucesión, pues a lo mejor partir de éste, pues también.

D.12: Exacto, partir de la sucesión, luego a lo mejor irnos del B al K, que ya pone directamente lo que habéis dicho de la tabla, que sí me parece interesante, que intentamos representar en la tabla tanto los términos como los valores de la sucesión, sustituyendo el término; como a lo mejor no saben, no han visto nunca esto; eso es lo que tendríamos que saber, qué nivel de conocimiento tienen, entendemos que saben aquí lo que es una sucesión, entonces el B si lo vemos como un buen punto de partida teniendo en cuenta que tienen que tener unos conocimientos previos en sucesiones y también, lo bueno de éste es que le das primero el ejemplo. Luego, pues si queréis pasamos al C, para ir evolucionando.

D.13: El C más o menos ya lo hemos comentado ¿no?

D.14: Ya lo hemos comentado.

D.12: Bueno, una cosilla que se nos ha olvidado decir del B, es que a mí por lo menos me falta que n pertenece a los números naturales. Ya sé que parece una obviedad, pero a lo

mejor, a los niños le cuesta lo que tú has dicho antes, relacionar las letras con a qué pertenecen esas letras; entonces n se supone que, cuando está en el ámbito de las matemáticas, siempre es número natural pero aquí no lo pone en el fragmento.

D.14: Ya, es que, yo creo que a los niños le cuesta mucho lo de en la n , y lo de sustituirla, parece; nosotros, creo, que lo vemos muy obvio, pero les cuesta un montón, pues si n_1 cual es, y les cuesta, bueno pues dime el siguiente, y otra vez, pero ¿dónde pongo la n ?

D.12: Sí, la n les vuelve locos.

D.13: Les cuesta un montón, pero no solo la n , las funciones, lo de $f(x)$ no sé qué, bueno pues x va a ser 2, y donde pongo la x , es como un mundo, y no sé, y creo que eso debería recalcarse muy bien antes de todo esto.

D.12: De alguna forma, buscar una metodología para saber sustituir siempre las letras por su correspondiente, por lo que lo están representando, ¿no?

D.14: Sí.

D.12: Pues nada, si queréis pasamos al, al C hemos dicho que se podría explicar el B, que es hacia más infinito, junto con el K, y luego ya los negativos, que son el I, que es lo mismo que el B, pero en negativo, si os dais cuenta; el I con el C; o sea, en ese orden, yo haría B.

D.13: Pero ¿tú sabes lo que pasa? En el I no lo veo yo ... parece como el B y que se pueda entender igual de bien, pero por ejemplo cuando dice, se pueden tan grandes en valor absoluto pero negativos, como se quiera. Yo creo que yo, por ejemplo, sí porque sé de lo que estoy hablando y tal, pero, a lo mejor...

D.12: Sí, que tienen que saber lo que es el valor absoluto.

D.13: Pero no ya solo en valor absoluto, valor absoluto pero negativo, es como, ¿qué? Yo creo que un niño, que no sé.

D.12: Sí, que por ejemplo pues ustedes bien se pueden acercando de como en valor absoluto con r negativo yo creo que eso no hace falta de una primera vez decirlo, sino que tiende hacia menos infinito porque puede hacerse tan pequeño como se quiera porque hay que asignar el negativo al pequeño.

D.13: No tanto en valor absoluto, yo primero que vieran que cada vez, más pequeño, más pequeño, más pequeño, pero ya meterle lo de valor absoluto pero negativo, yo creo que

ahí empiezan que si valor absoluto positivo; que a lo mejor es mayormente la forma en la que realmente está escrita, expresado de otra forma, sí, pero no sé yo si, esa forma de expresarlo.

D.12: Porque aquí, sí se puede enfocar como tú dices, como el B, pues sus términos se pueden hacer tan pequeños como se quiera, que tan pequeños que los números negativos no son pequeños ni grandes, pero bueno ¿no? que tampoco es...

D.14: Sí, son pequeños.

D.12: ¿Son más pequeños?

D.13: Sí.

D.14: Claro, contra mayor.

D.12: Yo es que no los veo pequeños, los veo como todo el mundo.

D.14: Sí, lo hacen como, lo ponen con orden.

D.12: Sí, pero que para mí no es pequeño, como otro mundo, pero es mi cabeza; no sé, pero al fin y al cabo se supone que la línea está más para atrás.

D.13: Claro.

D.12: Bueno; pues ya está, ya hemos comentado el orden más o menos; vamos después del C, y ahora ya nos queda el enfoque...

D.14: Yo creo que también es necesario el fragmento C como para contrastar el fragmento K, porque a lo mejor piensas si la n , pero la n por qué tiende a más infinito y el otro a menos infinito.

D.12: Sí, porque tiene un signo negativo delante, ¿no? Puedes dar la explicación así, tiene un menos delante; o sea, que lo ven claramente, por eso veo yo que es bueno.

D.12: Que está bien los 2 ejemplos, poner los 2 ejemplos.

D.13: Yo el C y el K lo veo muy visual y todo, me parece muy bien.

D.14: Después, ¿ya vamos al siguiente, al D?

D.12: Si queréis vamos al D, que, yo creo, ya introduce un nuevo concepto en el fragmento que es la representación gráfica de los valores.

D.14: Yo este ejemplo no lo veo muy bien, porque al dibujarlo, ahí pones las rayitas estas como para decir que hay ahí un trozo que se pierde, pero por ejemplo en el eje de la x hay

una rayita entre el 2 y el 10, y hay otra entre el 10 y el 1000, como que está diciendo que ahí se pierde, como que está cortando, pero está cortando distintas cantidades; puede ser que a los niños le choque un poco.

D.12: Sí, que es difícil de ver, de entender, que las rayitas significan cualquier número de naturales, en este caso de por medio.

D.13: A ver, yo tampoco lo veo útil, había puesto que no lo utilizaría, pero ya no solo, es que ni me había dado cuenta de lo de las rayitas. Pero ya no por el hecho de la rayita sino porque quien es el eje, ¿sabes? No te dice en ningún momento que el eje, como tú has dicho de la x , realmente aquí ya no es x , es el n , y el eje de la y , por así decirlo, es a_n . Entonces, si tú le das esta gráfica al niño, dice –vale, ahora quién es quién, porqué salen estos puntos–, porque ni siquiera el ejercicio te dice el valor de los puntos, te ponen ahí los puntos, y ahora tú dices –vale–. Yo, por ejemplo, supongo que el eje de abscisas son los naturales y el otro es la sucesión, pero y si no...

D.12: Vale, yo lo que veo es que se podría, una vez que entienden los fragmentos que hemos comentado antes, en el que se ha hecho un ejemplo de $a_n = n^2$ tanto en el lado positivo como negativo, con un ejemplo, igual si se quiere dar un salto y conocen, uno, las funciones, la representación gráfica de funciones, o sea, está familiarizado con la representación del eje de ordenadas y abscisas de cualquier función y se quiere dar un paso más, si es verdad que igual la evolución natural, explicar límites representados por funciones, ¿no? Esto, al final, es una función, bueno, a_n es una sucesión porque si le das valores a n se convierte en una sucesión, pero sí que a lo mejor si han tenido previo conocimiento de la representación gráfica de una función no les cueste trabajo representarla gráficamente, la sucesión.

D.13: Claro, pero yo no digo eso, en plan, sino que si los niños ven esa gráfica no.

D.12: Les va a costar trabajo, es difícil de abstraerse a que entre medias, o en el caso entre el 2 y el 10 hay 8, y aquí hay pues, 990.

D.14: Yo lo he visto también en la carrera porque teníamos una asignatura, Análisis I, teníamos al principio veíamos sucesiones, y después nos metían funciones como que, utilizando las sucesiones, que más o menos es lo que estáis intentando decir. Yo cuando llegaba ya a funciones me costaba mucho como que asociar una cosa con la otra.

D.12: Volver atrás a mí no me cuesta porque yo creo que al final solo me cuesta ver, al revés, yo vería primero las funciones y después las sucesiones. Yo lo vería así, pero que tienen que tener dominio de las funciones porque...

D.13: Porque tiene, yo creo que primero las funciones, porque tienen que tener claro la asociación de un natural, un término, un tal.

D.12: Exacto, exacto, exacto, substituir, que la función hace.

D.13: Creo, creo que en el colegio se ven primero las funciones, pero no estoy muy segura.

D.12: Yo que sé.

D.14: Creo que sí.

D.13: Yo veo mejor, en plan, dar primero las funciones, porque al fin y al cabo esto es una función, por así decirlo.

D.12: Es una función, $f(x) = \frac{x^2-3}{x}$, pero que, por eso, que al final, también si conoce las funciones y se quiere dar un paso más.

D.13: Sí, sí, yo veo muy bien ver la gráfica. Lo que pasa que no utilizaría esto por lo que he dicho; pero si, a lo mejor, estuviera más clara la gráfica, sí. Incluso creo que es necesario que ellos también asocien con la gráfica.

D.12: También se puede hacer una gráfica, en vez de haciendo saltos de números, hacerlas seguidas, ¿sabes? Darle a n el valor 1,2, ... ¿mejor?

D.13: Claro.

D.12: Y también lo que habéis dicho, nombrar los ejes, porque no tienen nombre. Entonces, igual si esto, los fragmentos D y, el otro que es el mismo, pero en negativo que es el, J, pues tratarlos en caso de que ya se conozca por parte del alumnado la representación de funciones, a lo mejor darle una vuelta a cómo, a cómo se ha representado aquí gráficamente porque no vemos claro que para el alumno quede claro cuál es, cuál es, qué es el eje de ordenadas y abscisas.

D.14: Podemos utilizar otra asociación que sea más fácil representarla o...

D.12: Exacto, y ya, a partir de ahí, explicar que este límite también en caso de esta sucesión también tendería a infinito puesto que la gráfica siempre es creciente.

D.13: Sí, incluso yo creo que la gráfica se ve muy bien lo de la M , lo de para todo $M > 0$. Yo creo que por eso también es muy útil la gráfica, porque tú le dices el M está aquí y ver que cualquier M que tú pongas, al final, ahí arriba hay más puntos. Yo creo que eso también lo hace muy visual.

D.12: Sí, eso sí es verdad, pone como un umbral o algo así, para cualquier M que pongas hay un n , o sea, hay un valor de límite que puede ser más alto, entonces está claro que tiende a infinito, porque siempre vas a encontrar algo mayor.

D.14: Yo creo que esa se entiende muy bien.

D.13: Sí, yo creo que lo del M se ve mucho mejor en una gráfica que en una lista de... o por lo menos en la carrera yo lo veía más claro. Vale.

D.12: Bueno, esto ya tiene más...

D.13: El E , ¿no?

D.12: Sí, el E .

D.13, D.14: Yo el E no lo utilizaría.

D.12: Yo tampoco lo utilizaría.

D.14: Porque incluso yo he tenido que decir –vale, que me estás...

D.13: Primero porque no te pone en situación de lo que está haciendo, eso primero, y segundo, porque incluso yo tengo que poner, cuando he leído ha sido, -vale, qué está haciendo, quién es v , quién es H .

D.12: Exactamente, y no se sabe el límite de qué está cogiendo, de qué.

D.13: Y, aun así, todavía no me he fijado bien que es lo que está haciendo en la gráfica de la izquierda, todavía tendría que leerlo más detalladamente para ver qué está haciendo.

D.12: Bueno, vosotras que sois matemáticas, ya, vamos.

D.14: Yo diría que lo primero que diría un niño al leer éste, dado $H = 9$, pero ¿porqué 9?

D.12: ¿Por qué? Exactamente.

D.14: Pero ahora, cuando, bueno, una pregunta, pone 9 ¿por qué me dice ahora $H = 9$?

D.12: Es que es la misma pregunta, ¿por qué pone $H = 9$?

D.13: $H = 9$.

D.12: Pero ¿por qué pone $H = 9$ y no $H = 4$?

D.13: Veo un umbral, es que creo está poniendo ejemplos, ves porque primero pone 9, 16, 25.

D.12: Pero ¿por qué no pone?, pero si empieza por potencias porque no empieza por 4; dado $H = 4$, existe un v natural, por ejemplo, $v \dots$ por ejemplo no, ese que esa es la raíz, $v = 2$, ¿no?, en este caso.

D.13: Sí, al fin y al cabo, está dando como ejemplos, está buscando como los términos que vas a encontrar por encima de ese umbral, que realmente da igual.

D.12: Es una forma muy llosa de intentar simplificar.

D.13: No, con esto no veo yo que.

D.12: Porque esto al final es para explicar el límite de la raíz cuadrada ¿no de H ? yo creo, donde, porque $n(H) = \sqrt{H}$, eso es una sucesión ¿no?, donde $H = \dots$

D.13: Yo creo en este ejercicio lo que se da es la sucesión y lo que quiere es vea como para cualquier H porque...

D.12: Tú encuentras un n .

D.13: n incluso busca una fórmula general porque al final te pone $n(H)$ es igual.

D.12: A éste.

D.14: El H lo estás viendo como si fuera la n del fragmento A.

D.12: Sí, es un umbral ¿no?, que siempre vas a encontrar.

D.13: Te está diciendo.

D.14: Te da un ejemplo, lo que dice al fin y al cabo.

D.12: Antes era n^2 y ahora es \sqrt{n} , raíz, lo que está es integrando el concepto de raíz, ¿no? porque al final $n(H) \dots$

D.13: Lo que te está dando realmente el ejercicio es que tú, dado cualquier cota que tú le des, pues te encuentres un n , entonces ¿qué hace? Lo que hace es como que aquí, la fórmula general te está dando una inecuación por así decirlo; y a partir de esa inecuación, como es n^2 aplica la raíz, y después le suma un número para, le suma un $+1$ para que esté seguro, exactamente, que va a ser mayor, pero claro, eso un niño, yo no lo veo,

incluso yo estoy cuando le pone +1, sé lo que está haciendo porque en la carrera nos machacan mucho pero, y ya de acostumbrarte, acostumbrarte...

D.12: Evidentemente no lo usaría, yo tampoco lo usaría.

D.13: Yo no lo usaría, pero nada.

D.12: Es que para explicar algo cómo es un límite de esta sucesión de $a_n = n^2$ va por un camino que consideramos que va a perjudicar más que a facilitar el proceso de aprendizaje.

D.13: Esto es muy lioso.

D.12: Sí, pues seguimos con el F.

D.14: Con el F. Yo tampoco lo usaría por lo mismo que arriba, porque utiliza demasiadas letras, como dice la K, un cuerpo ordenado, pero ¿qué cuerpo?

D.13: Es que no saben ni que es un cuerpo.

D.14: Exactamente, no saben lo que es un cuerpo.

D.13: Ni uno, qué es un cuerpo, ni qué es un cuerpo ordenado.

D.14: Y además utiliza el elemento H, el número natural v y existen demasiadas letras igual que en el fragmento E.

D.12: Sí, esto sería ya para un nivel más alto, ¿no?

D.13: Yo lo veo, más o menos, como el fragmento A.

D.12: Sí, el F, éste es el último que yo usaría.

D.13: Claro, son las definiciones formales matemáticas, y tú a un niño, que sí, que después; yo todo esto de definiciones formales, formales a lo mejor se lo introduciría para que vieran el sentido de cómo se escribe en matemáticas, para que se familiaricen, pero como método de enseñanza para los niños, no.

D.14: Pero, aunque fueran de la, aunque quiera ponerle algo formal yo no utilizaría éste.

D.12: Yo tampoco.

D.14: Utilizaría el A, en todo caso.

D.12: El A, porque es más, digamos, es más directo.

D.13: Sí, claro, éste es más lioso.

D.12: Explicándole el concepto del M , de ese umbral.

D.13: Incluso en el A , lo de la cota y todo, pero es que aquí.

D.14: Aquí te mete hasta cuerpo ordenado, en el otro pues te dice lo.

D.12: Esto sería nivel ya universitario, ¿no?

D.13: Sí, sí, es universitario. Bueno si esto está aquí es porque lo han puesto en un libro de texto, se supone.

D.12: También es verdad.

D.13: Así que yo no sé si ha dicho.

D.14: Ha dicho que había veces que lo han puesto.

D.12: Ellos mismos ¿no?

D.13: Ah, vale, pues si lo han hecho entre ellos no lo utilizaría.

D.14: Ni en el libro tampoco lo pasaría.

D.13: El G , yo sí lo veo útil, es muy intuitivo.

D.12: Es parecido al A ¿no?, pero en vez de teórico, es como, de nuevo el tema de la cota ¿no? Es cómo hacerles entender que tiende a infinito, y es porque, vale sí, éste lo vemos como una evolución, una...

D.13: No como en un principio, no como de los primeros, pero sí lo veo muy útil, porque además siempre que le des valores a las letras y todo eso lo ven todo mucho más claro.

D.12: Exacto, exacto. Es que yo lo vería después del A , éste es un ejemplo de A , o sea, es como ya sé lo que es una cota, ya, venga pues vamos a verlo en un caso concreto, esta sucesión, ésta.

D.14: Yo es que creo que incluso, a lo mejor, tú le dices esta sucesión a los niños y te dicen es que cualquier número que tú me des yo te voy a encontrar uno mayor. Ah sí, pues te voy a dar un millón, pues toma, tengo uno más.

D.12: Exacto, un millón al cuadrado $+1$, ¿no? Bueno, en este caso no, sería.

D.14: Sí, de otro valor.

D.12: Vale.

D.13: El H .

D.14: El fragmento H yo tampoco lo usaría.

D.12: El H es de la tónica del E ¿no? porque usa lo de \sqrt{H} , pero explicado de una forma, yo veo, intentando ser un poquito más gráfico ¿no?; o sea, es una, une un poquito más ejemplificante, o sea no ejemplificante, sino que intenta ser más, más pragmático ¿no? dando valores.

D.13: Más intuitivo, sí.

D.12: Más intuitivo, dando valores a los términos que es lo que hemos dicho que les cuesta a los niños.

D.13: Claro, a ver, lo veo más, mejor por así decirlo, porque está la tabla y tal, pero yo no sé.

D.14: Yo aun así no lo sabría hacer.

D.13: A ver, supongo que es que también están interesados en que ellos, porque nuevamente sale la fórmula esa de $n(H)$ igual a tal, pero ni siquiera nosotros en la carrera nos han dado una fórmula general para buscar la cota, entonces no sé porqué tan, tanta necesidad de que el niño sepa una cota.

D.12: Que la cota es el concepto tienen que ligar un límite infinito, ¿no?

D.13: Claro, claro, yo, en la carrera nunca he tenido que, a partir de una cota, con una fórmula general encontrar un término; al fin y al cabo, mayormente, intuitivamente algo así lo hemos hecho, no veo la necesidad.

D.12: De definir la cota, de definirla no, de dejarla.

D.13: De sacar una fórmula general para dar un término.

D.12: Valor a n , da el valor a n .

D.13: Para cada cota.

D.12: Exacto, dar un término para cada cota; eso es lo que han hecho aquí.

D.13: Yo creo a lo mejor, yo creo que siempre que es mejor.

D.12: Que no es necesario.

D.13: Que los niños intuitivamente sepan darlo, yo creo que es, más fácil, mejor que el niño diga una cota, vale, pues tengo que encontrar un n , que se, que dé el valor mayor,

que pruebe cinco números, qué más da, o que directamente coja un n gigante, con que lo encuentre no hace falta.

D.12: Pero sería una forma, lo que acabas de decir es, en un debate abierto, encontrar un n para que el resultado del límite sea mayor que tal.

D.13: Claro. Al fin y al cabo unos niños de la ESO y Bachiller no necesitan, es que a ver, esta fórmula al fin y al cabo si tú como matemático quieres ver un término general para algo, entonces sí puede que haya una sucesión que por más que le des un número alto, alto, alto, tú no lo encuentres pero puede que sí haya, pero no creo yo que ese tipo de sucesiones se le pongan a unos niños en la ESO y Bachiller. En la carrera pues vale, pero, pues ya está, ¿no?

D.12: Nos faltaría solo el ejemplo, el I ya lo hemos comentado, el J es la parte negativa del de la gráfica que hemos comentado al principio que es el D, y el K también lo hemos comentado porque es la continuación del B, que es cómo explicar el límite más infinito. Pues ya está, adiós.

Fase inducida

D.12: Vamos a empezar a seleccionar qué tipo de fenómeno alberga cada uno de los fragmentos. Venga ¿para el primero?

D.13: El primero.

D.14: El primero yo creo que era de ida y vuelta.

D.12: El formal, exactamente, pues le ponemos el tic al i.v.s.i., ¿vale?

D.13: Vale.

D.14: Sí.

D.12: Los demás nada.

D.14: Porque como tiene una cota, encuentra un n_0 , después del n_0 encuentra el n y del n va al a_n .

D.12: Vale, pues pongo, selecciono el que hemos dicho, el formal. Luego el 2º (el B), éste solo tiene...

D.13: El intuitivo.

D.12: Éste, el c-i.i., el intuitivo hacia más infinito. Venga seguimos: el C.

D.13: También intuitivo.

D.12: También intuitivo, pero menos infinito.

D.14: Va decreciendo.

D.12: Decreciente, o sea el 3º lo selecciono, ¿vale?

D.14: Sí, se ve bien en las tablas.

D.12: Vale; luego, el de la función (D).

D.12: Yo creo que también es más infinito, ¿no?

D.14: Sí.

D.14: Selecciono el creciente, que es el c-i.i., ¿vale?

D.13: Sí.

D.12: Éste (E) sí tiene ida y vuelta ya.

D.13: Sí, sí, ese es de ida y vuelta.

D.12: Y, ¿el tema de intuitivo? Éste (E) es de ida y vuelta, está claro pero el tema de intuitivo o no ¿veis algo intuitivo?

D.13: No.

D.14: Es que se supone que tendría que ser intuitivo con la gráfica, pero yo en la gráfica no sé si se ve muy intuitivo.

D.12: Teóricamente quieren explicarlo intuitivo, pero no, o sea intuitivo viendo que la gráfica siempre crece. Yo creo que está incorporado el más infinito, ¿no? Creciente. Está incorporado el intuitivo más infinito porque se ve que el punto crece, pero es verdad que ya dijimos antes que no lo veíamos muy, muy, ¿cómo se dice? Educativo. Entonces, ponemos creciente intuitivo, ¿vale? Porque yo creo que sí, al ver los puntos, la finalidad es explicar la, la, intuitivamente que siempre es creciente pero no lo van a conseguir.

D.14: Claro, a ver, si el profesor se pone ahí señalando poco a poco, sí.

D.12: Exacto.

D.14: Pero si un niño mira eso solo, no sé yo si...

D.12: Bueno, pero lo que queremos es si el fragmento alberga esa fenomenología. Vale. El de la sucesión.

D.14: El F.

D.12: Éste está claro que es ida y vuelta.

D.14: Ida y vuelta.

D.12: Ida y vuelta, y luego, los dos, ya está, ese solo, porque intuitivo nada.

D.14: Implica crecimiento y decrecimiento, pero intuitivo no es.

D.12: Exactamente, pues nada.

D.13: Intuitivo nada.

D.12: Entonces solo ponemos ese, luego éste (G), éste sí es ida y vuelta también porque tiene la cota.

D.13: Éste también, es ida y vuelta y además es intuitivo.

D.12: Además es intuitivo.

D.13: Porque se ve.

D.14: Decreciente, creciente.

D.12: Creciente, vale, pues ya está, perfecto. ¿El H? Ida y vuelta está claro que sí, e intuitivo teóricamente porque tiene la tabla y tal.

D.13: Claro, intuitivo se supone que es ahora.

D.14: Al ver las dos primeras filas de la tabla, pues... intuitivo decreciente, pero.

D.12: Exacto, seguimos. Ahora, éste claramente es intuitivo decreciente, ¿vale? Y ya está.

D.14: Vale.

D.12: Luego el de la sucesión (I), el de la gráfica.

D.13: No, no, no es creciente, ¿no?

D.12: Éste es decreciente.

D.14: El I es decreciente.

D.13: Ah, es que me he ido a otro número, ay, perdón, sí.

D.12: La J sería decreciente también y tiene el de ida y vuelta no lo tiene, solo tiene el decreciente, ¿no?

D.13: Sí.

D.12: Vale.

D.14: El de la ida y vuelta se puede buscar, pero...

D.13: No, sí pero no parte de una cota, luego está un a_n .

D.12: Exacto, un a_0 y tal, tal, tal.

D.13: Directamente pone los puntos.

D.12: Y éste (J) es intuitivo creciente.

D.14: Intuitivo creciente, sí.

D.12: Ya está, ¿no?, perfecto.

D.14: Pues ya está.

A3.3.5. Transcripción. Grupo E.

Fase espontánea

E.15: Vale, pues ahora ya vamos a ver esto. A ver, fragmento A, el primero. A mí eso me parece según para que curso, porque a niños pequeños tú les pones esta forma de escribir tan matemática...

E.16: Esto son definiciones, pura y dura, matemáticas.

E.17: Sí, le puede costar deducir.

E.15: A mí este tipo de lenguaje me costaba trabajo en 1º de carrera, cuando empecé a estudiar Matemáticas, porque no me lo han enseñado antes, es verdad que si empiezas con una base.

E.17: ¿En Bachillerato no lo viste?

E.15: En Bachillerato así con este tipo de escribir, a lo mejor sí lo podían poner, pero tampoco tenías que aprenderlo o te lo aprendías de memoria.

E.16: Yo este tipo de lenguaje directamente no lo vi en el Instituto, en ninguna etapa.

E.15: Yo tenía una profesora que sí usaba el tipo de lenguaje, pero te lo aprendías de memoria, no entendías realmente que es lo que estaba diciendo.

E.17: No interpretabas lo que significaba.

E.15: Vale, tengo que poner una M , tengo que poner un mayor que.

E.17: Sí, pero en la ESO yo sí veo que sí le puede costar.

E.15: Hombre claro, muchísimo, a no ser que de pequeños lleven una base que vayan entendiendo lo que es el lenguaje matemático.

E.16: Que enseñen matemáticas y no lo apliquen, porque realmente lo que hacemos, bajo mi punto de vista, en la ESO y Bachiller es matemática aplicada a la ingeniería pura y dura, no matemáticas.

E.15: Yo también lo creo, a no ser que te toque algún matemático más específico; entonces yo ese o lo pondría en un nivel ya alto o...

E.17: Hombre, si se empezaran a dar tipos de definiciones así por ejemplo en 3º, o a lo mejor en 4º.

E.15: Claro, llegaría a un 1º de Bachillerato, o a un 2º, y lo entendería perfectamente.

E.17: Vale, fragmento B.

E.16: Yo de todos los que he visto, veo que éste es el más simple.

E.17: Sí, yo lo veo muy intuitivo.

E.16: Lo primero que te hace es ponerte un ejemplo, que se ve claramente que los números van creciendo de manera, a lo mejor un chaval no puede decir de manera exponencial, pero se ve que cada vez crecen más y eso.

E.17: Yo, si tuviera que dar la definición del fragmento A, antes le enseñaría, o sea diría lo del fragmento B, porque una vez que lo vean, será más fácil entender lo otro.

E.15: Sí.

E.17: Pero sí es verdad, yo, o sea dando clases particulares tengo algunas que son, que tienen mucha facilidad para las matemáticas y otras que menos, y evidentemente esto sería lo que entendería la mayoría.

E.16: Sí, sería el primer paso para una progresión, ¿geométrica era?

E.15: No sé. Vale.

E.17: Luego el fragmento C. Yo creo que con el ejemplo de la tablita numérico se ve bastante claro lo de que tienda cada vez más grande y sí pueden entender el concepto de que tienda a más o menos infinito.

E.15: Sí, yo creo que es bueno porque muchos, a veces, necesitan verlo. A lo mejor aunque se lo digan no lo imaginan tal cual; entonces cuando ellos están haciendo las cuentas y ponen, por ejemplo, el $n^2 + 1$, y ahora venga, dale el valor 1, me sale 0, dale el valor 10 y ellos escriben -me da 99- van subiendo de valores y cuando lo ven, entonces lo entienden.

E.17: Claro, el concepto de más infinito y menos infinito.

E.16: La cosa es que posteriormente se pone un mismo ejemplo, me parece, que progresa positivamente.

E.17: Sí, el fragmento K.

E.16: Exacto, pero eso ya lo podemos debatir ya al final, en el orden. Ese en concreto lo pondría yo antes, por el hecho de que parece ser que las personas entendemos mejor lo positivo.

E.17: Lo positivo que lo negativo, sí

E.16: Pero que sí están, que se entiende bien y eso y que sería uno de los primeros ejemplos en poner.

E.15: Vale, el fragmento D, con la gráfica. A mí me resulta, o sea es como el fragmento C, en plan que las cosas visuales lo suelen coger antes.

E.17: Sí, de hecho, yo lo veo más intuitivo aún que la tabla, porque como que la línea al crecer el concepto de infinito sí queda más claro.

E.16: Y ya no es solo por ejemplo, nosotros que hemos estado en ingeniería, muchas veces hemos en cuanto a reacciones de equilibrio, en química y eso, por ejemplo, se dan ecuaciones parecidas a las que aparecen en el fragmento D, y ese 3 en muchos casos se desprecia porque vaya, nada más hay que verlo gráficamente; que ..., y directamente sería también una manera de introducir que ese valor 3 no tiene valor ninguno cuando ya la n coge unos valores grandísimos.

E.15: Sí, que no le afecta el crecimiento.

E.16: En estos temas de ingeniería y eso te facilita un montón el quitarte números como estos, te simplifica el ejercicio, una barbaridad.

E.15: Entonces eso, estamos ahora mismo con que todo lo visual es más sencillo.

E.17: Sí, y yo diría que incluso con gráficas mejor que con tablas.

E.15: El fragmento E.

E.17: Vale

E.15: Éste (E) aunque usa gráfica con la explicación que te pone al lado, a mí me resulta más complicado.

E.17: A mí también, yo lo veo más lioso.

E.15: Yo no lo usaría, así.

E.16: Es que ya directamente está utilizando un lenguaje matemático.

E.17: Yo, esto para la ESO lo veo complicado.

E.16: La manera de expresarse, me refiero.

E.17: Sí, a lo mejor el concepto, de otra forma, porque la sucesión es muy simple.

E.15: Sí, es simple; si yo quiero explicarles la sucesión, dibujo la gráfica, vale, o les doy valores con las tablas, vale, que realmente es lo que está haciendo, pero la explicación que le ha puesto al lado lo veo complicado.

E.17: Sí, yo lo veo bastante lioso para ese nivel.

E.16: Esto ya es un nivel relativamente más alto.

E.15: Más alto.

E.17: Sí.

E.15: Que a lo mejor que hay alguna clase que te lo admite, eh, pero...

E.17: Sí, depende del temario que hayan dado.

E.15: Claro, pero a mí no me gusta.

E.16: Ya ni clase, yo ya diría que alumno.

E.15: Alumno, alumno.

E.16: Una clase entera, ni de broma.

E.15: Seguro.

E.17: Pues vale, el fragmento F.

E.15: Es una definición de las que se dan en matemáticas, de cuando yo entre en la carrera.

E.16: Sí, pero es una definición tal cual, no hay demostración ni nada.

E.17: Es la definición.

E.15: Estamos en lo mismo que en el fragmento A que, si entienden el lenguaje matemático, lo podrán ver, pero si no, no van a tener la idea de límite infinito.

E.17: Se podrán aprender la definición, pero no van a entender el concepto simplemente por leerlo así.

E.15: Sí.

E.16: Pero esto, yo por entenderlo, esto no es ningún axioma ni nada.

E.15: Es una definición.

E.16: Es una definición tal cual, que no hay ningún proceso de demostración.

E.15: No, porque es definición.

E.16: Vale, es una definición, vale. Es que si es una definición tal cual.

E.17: Se la van a estudiar de memoria, para que se van a complicar a estudiar, sí, pero no, no van a llegar mucho más allá.

E.15: Y van, yo creo que, yo en Bachillerato me lo estudiaría sin entenderlo y después se me olvidaría tal cual, yo de esto ya no me iba a acordar. Ahora, si le enseñas la idea de límite como la otra que hemos visto que es más visual, eso no se le va a olvidar. Así que, hombre, como matemáticas me parece genial que les des las definiciones así.

E.17: Hombre, puede ser útil para que empiecen a ver, tienen que empezar a leer definiciones así.

E.15: Claro, que no va a ser muy productivo como no expliquen algo más.

E.17: Yo se lo mostraría para que empiecen a verlo cómo se define.

E.15: Aprender a escribir así también.

E.17: Pero la explicación en sí de la definición de otra forma. Pasamos, fragmento G.

E.15: El G. Es que este realmente es como lo de la tabla.

E.17: Sí, pero con palabras.

E.16: Sí, pero ya te está diciendo que cada vez va a haber un número más grande, que no va a haber el número grande digamos, que siempre va a haber uno, entonces ya te está metiendo de manera indirecta el término infinito, ¿no? como algo que nunca...

E.15: Que siempre puedes encontrar algo mayor.

E.16: Exacto, infinito.

E.17: No te habla de infinito.

E.16: Hay cosas más grandes que infinito podíamos decir. Es más como reflexión, diría yo, ¿no?

E.15: Sí, pero no sé, creo que usaría otro antes que éste, realmente.

E.16: Sí, incluso más gráfico.

E.17: Sí, más que tanta letra, a lo mejor se pierden.

E.15: No me gusta mucho.

E.16: O utilizarlo para un nivel más alto.

E.17: Bueno, a ver, el nivel no es nivel alto. Lo que se pueden es cansar de leer, a lo mejor los gráficos les llama más la atención y lo entienden antes, de tanto leer, pero sí se parasen a leer sí es fácil de entenderlo.

E.15: Es fácil, es fácil; yo lo había puesto fácil de ver.

E.17: Fragmento H.

E.15: El H. Es que el H, es como el otro cuando le estamos mezclando el límite con la parte entera, esto, yo creo que es una explicación muy llosa.

E.16: Yo ya estoy viendo ahí ya un montón de reglas y me tira hasta para atrás, a mí; no me quiero imaginar un chaval, que esté estudiando.

E.15: De la ESO o de Bachillerato.

E.17: Yo en la ESO lo veo, poco se van a centrar, en entenderlo.

E.15: Es que ésta me gusta hasta menos.

E.17: Que la otra de la tablita, ¿verdad?

E.15: Que el fragmento E; es muy parecido porque está haciendo la misma operación, pero; si la otra he dicho ya que no la usaría mucho, yo creo que ésta la usaría menos.

E.17: Es que es muy similar.

E.15: No sé vosotros.

E.16: No, esta del tirón.

E.17: No, yo para la ESO no.

E.16: Esto ya para un nivel relativamente alto.

E.17: Fragmento I.

E.16: Pues sería como el B.

E.15: Como el B, solo que en negativo.

E.16: Yo diría que sería el siguiente que pondría.

E.15: Es que el fragmento J es como el D, pero en negativo; o sea, que estamos diciendo que primero explicaríamos lo positivo porque consideramos que el aspecto positivo se ve antes o...

E.16: Sí, los números positivos son más fáciles de entender.

E.15: Sí, más intuitivo. Y estamos en las mismas con el K.

E.16: Exacto.

E.15: Entonces yo creo que, por lo que hemos dicho, usaríamos fragmento B, fragmento C, no, fragmento B, fragmento D y fragmento K porque son los que hemos dicho que son más visuales y son positivos.

E.17: Pero a lo mejor.

E.16: Sí, esos los primeros.

E.17: ¿Primero todos los positivos o intercalando? No sé cómo lo estáis haciendo.

E.15: No, en el sentido de que si usas alguno usarías primero los positivos, alguno de los positivos ¿no?

E.17: Vale, y ¿no os parece más intuitivo, por ejemplo, el I aunque sea negativo, que el siguiente, o sea que el C, por ejemplo?

E.15: Claro, pero no los estoy ordenando.

E.17: Solo del criterio, primero positivo, después negativo.

E.15: Si tengo que elegir alguno, digo, pues le explico antes el fragmento B que el fragmento E.

E.17: Vale, pero yo me refiero, al ordenarlos todos en conjunto, ¿explicaríais antes el C que el I, por ejemplo? Que, aunque sea negativo a lo mejor es muy fácil de entender.

E.16: El C antes que el I, a ver.

E.17: Esa es mi excusa.

E.16: Explicarse antes que el I, no... es que también depende de cómo veas toda la clase.

E.17: O sea, el C no, que los dos son negativos; espera que me he equivocado en el ejemplo, no era el correcto ¿Dónde está el equivalente al C? que se me ha perdido.

E.15: El K.

E.17: El K, eso es. El K, por ejemplo, antes que el I, o mejor el I que es más intuitivo, aunque sea negativo; esa es mi pregunta.

E.15: Es que yo creo que lo explicaría que para mí el fragmento I va junto con el fragmento B, lo explicaría a la vez.

E.17: Solo que antes positivo y después negativo.

E.15: Claro, pero, o sea para introducir lo explicaría, si uso ese, usaría esos dos a lo mejor en esa clase yo no uso eso porque lo ven mejor con gráficas, pues entonces usaría el D y el J; yo creo que dependería de la clase que eligiera.

E.16: Sí, exacto, es que es en función de cómo veas tú a la clase, porque a lo mejor, es más, es mejor directamente meterle todos los conceptos de la sucesión en positivo y ya, complicárselo después con la negativa.

E.17: Lo que está claro que el H.

E.16: Pero tampoco comparto tu idea de primero positivo y después el negativo en cada uno de los ejemplos, del opuesto, ya es que, depende.

E.17: Depende del caso real.

E.16: Exacto.

E.17: Vale.

E.15: No sé, creo que en claro hemos sacado que el H rara vez lo usaríamos.

E.17: El H y el E.

E.15: El H y el E poquito, y que lo que sería el fragmento F y el fragmento A, quizás los diéramos, ¿no? para explicar un poco el lenguaje.

E.17: Para que empezaran a ver definiciones de ese lenguaje pero que, como para que lo entendieran.

E.15: No, no lo consideramos adecuado, y ya está. ¿Algo más que añadir?

E.16: Si queréis hacer un, el orden, decir el orden ¿qué propondrías cada una?, yo lo he dicho así a.

E.15: A ver di tu orden, venga.

E.16: Yo diría que primero el B.

E.15: Sí.

E.16: Después el G.

E.17: ¿Cuál?, ¿cuál?

E.16: El G.

E.15: El G, de gato.

E.16: De gato.

E.15: Vale.

E.16: Después el K, después D, después el I, el C, el J, el F, no espérate, he dicho J, A, sí, J, A, F, E y H que es lo que hemos dicho que son los más rebuscados.

E.17: Sí, de más fácil a más difícil positivos y después los equivalentes en negativo.

E.16: Ahí está, que luego también podíamos haber hecho lo que tú dices, a lo mejor hacer B, y me parece que es el I ¿no?, intercalando positivo, pero más o menos seguimos la misma estructura.

E.15: Yo apoyo tu...

E.17: Yo también.

E.16: Ya es eso, ya es lo que, yo pienso lo que nos diga la experiencia después de haber estado años dando clases o ver cómo reaccionan.

E.15: A veces tendrás niños que ven mejor visuales y otros que no, eso depende de...

E.16: Exacto.

E.17: Y depende del nivel que tengan y depende de todo, porque nosotros intervenimos en una clase de 1º de la ESO y tenían que haber sabido dividir por dos cifras, y estaban repasándolo como ejercicio para llevárselo a su casa, allí en clase y ese no es el temario de 1º de la ESO. Entonces depende cómo funcione la clase.

E.15: Entonces, nosotros realmente lo hemos ordenado pensando que tienen menos nivel a más, ¿no?

E.17: Exacto.

E.16: Sí, o en función de eso, de la dificultad de los cursos, de plantearlo esto desde 3º de la ESO, que dice que se pone.

E.15: Y a lo mejor ya si llega, si empiezas a plantear las cosas en un 3º de la ESO puedes llegar, a lo mejor, a usar el fragmento H, por muy complicado que sea, en un 2º de Bachillerato.

E.16: Claro.

E.17: Sí.

E.16: O en un 1º de carrera, y demás. Cortamos ya.

E.15: Hasta aquí el audio.

Fase inducida

E.15: Vale, estamos con el 2º audio.

E.17: A ver, fragmento A.

E.15: Aquí claramente es lo de formal, ¿no?

E.17: Sí, yo diría que sí.

E.15: Ida y ... ¿cómo era? Ida y vuelta en sucesiones de límite infinito, ¿no?; es lo que dijimos también en el primer audio que era demasiado formal.

E.17: Sí, que lo veíamos demasiado formal para utilizarlo en la ESO.

E.15: Fragmento B. De éste ya dijimos antes, ¿no? que era bastante fácil de, y bastante intuitiva la definición.

E.16: Crecimiento intuitivo, ¿no? Ilimitado.

E.17: Fragmento C.

E.15: Estábamos en las mismas que en el fragmento B, solo que dijimos que también podía ser.

E.17: Es decreciente pero también dijimos que con la tabla y los ejemplos era muy intuitivo de entenderlo. Fragmento D.

E.15: ¿Cuál?

E.17: D, ¿no?

E.17: Que está por detrás.

E.16: Pues lo que dijimos básicamente en el de antes, es intuitivo, se ve que ... es intuitivo.

E.15: Que se ve bastante bien con la gráfica.

E.16: Es que es un poco repetir todo lo que.

E.15: Sí, porque yo creo que las ideas que hemos tenido antes son las que hemos explicado ahora.

E.17: Yo creo que no hemos cambiado ninguna idea respecto antes, ¿no?

E.15: Ahora, éste, por ejemplo, el fragmento E.

E.17: Éste es el que dijimos que era uno de los que no usaríamos, ¿no?

E.15: Éste, dijimos que lo veíamos como formal ¿no? y ahora ¿le pondríais lo de ida y venida?, ida y venida digo yo.

E.16: Ida y vuelta.

E.15: ¿En sucesiones con límite infinito, o pondríais ninguno de ellos? Es que en el de antes si se ve, como ha explicado lo de ida y vuelta se ve claramente, pero aquí.

E.16: Sí pero que éste, éste no se termina de ver claro.

E.15: Lo de ida y vuelta.

E.16: Vale, vale, vale, vale.

E.15: Sí, es que aparece en la gráfica; antes no nos habíamos dado cuenta de eso, porque no habíamos visto la explicación que no había hecho.

E.15: Necesitaríamos otro cuadrito que ponga –vemos varios- ¿no?

E.17: Bueno, sí que aparece, lo de ida y vuelta sí que se refleja, aunque sigamos considerándolo complicado para el nivel que es.

E.16: Intuitivo no es.

E.15: ¿Entonces lo pondríais en formal o en informal o en ninguno?

E.17: Yo lo pondría como formal, bueno no sé.

E.17: Sí, yo lo pondría lo de ida y vuelta.

E.16: En lo de ida y vuelta, perdón, la vuelta a lo mejor me chirría un poco pero...

E.15: Pero la vuelta es lo que ha explicado él en la gráfica.

E.16: Exacto, por eso, me chirriaba, pero a través de su explicación, pues me ha convencido.

E.17: Este sería uno de los que antes no habíamos visto.

E.15: Sí.

E.17: Fragmento F. Éste que hemos dicho antes que era definición, ¿no?

E.15: Claro, aquí es definición totalmente formal, pero, de ahí, ¿lo de ida y vuelta?

E.17: Yo no.

E.15: Yo aquí no creo que haya ida y vuelta, ¿no?

E.17: ¿Qué opináis? Silencio.

E.16: Lo de la vuelta, no, yo no la veo.

E.17: Yo no pondría ninguno de ellos.

E.15: Sí.

E.16: Es que, yo pondría ninguno de ellos, exacto, porque es que es una definición formal.

E.15: No es informal de que sea intuitivo y tampoco es lo que ella ha explicado como ida y vuelta.

E.17: No es ninguno de ellos.

E.15: Estamos de acuerdo, ¿no?

E.16: Sí.

E.17: Fragmento G.

E.15: Este a mí no me gustaba.

E.17: Éste no es tan intuitivo como los demás, pero si es verdad que la explicación es más básica.

E.16: Lo del proceso que es cada vez más grande y demás parece que queda más o menos reflejado.

E.17: Es como explicar con palabras lo que se ve intuitivamente en la gráfica.

E.16: Yo lo pondría como.

E.15: Es intuitivo si lo lees, no es tan intuitivo, no es intuitivo visualmente.

E.17: Pero sí te lo explica de forma intuitiva.

E.15: Sí ¿Lo ponemos como crecimiento?

E.16: Sí.

E.15: Fragmento H.

E.17: H; éste nos pasaba como el otro, pero aquí sí que no se ve, éste sí lo considerábamos antes bastante formal, ¿no?

E.15: Claro, pero ahí no se ve lo de ida y vuelta, ¿no?

E.17: Éste es bastante lioso; podemos poner ninguno de ellos, bueno ¿qué opináis?

E.15: Yo pondría ninguno, creo; o sea, formal es una barbaridad, pero es que formal, o sea formal; formal, formal en realidad tiene un ejemplo.

E.17: Claro que sean capaces de entenderlo con esa edad.

E.15: Yo creo que no es que sea formal, formal, sino que es complicado, a la hora de entenderlo.

E.16: Sí.

E.17: Es difícil de entender en ese nivel, pero no es una definición formal porque tiene un ejemplo concreto, que ayuda a entenderlo. O sea que no lo englobamos en ninguno, ¿no? o ¿sí?

E.15: Yo no lo pondría en ninguno. ¿Estamos de acuerdo?

E.17: Ninguno de ellos.

E.15: Estamos de acuerdo en todo.

E.17: Fragmento I. Éste es el equivalente.

E.16: Esto no hay ni que pensarlo, vaya, decrecimiento intuitivo.

E.17: Intuitivo.

E.15: Fragmento J.

E.16: Más de lo mismo.

E.17: Pero intuitivo negativo, ¿no?

E.16: Sí.

E.15: Decrecimiento, ¿no?

E.17: Eso.

E.15: Y el K es que estamos en las mismas, pero con crecimiento.

E.16: Sí.

E.17: Exacto.

E.15: Es que lo emparejamos antes ya.

E.16: Sí, sí que es eso.

E.15: Entonces. Es que más o menos estamos manteniendo la misma idea salvo en el E, que sí vemos eso de ida y vuelta que él ha explicado.

E.17: El concepto que antes no hemos tenido en cuenta.

E.16: Ya está.

A3.3.6. Transcripción. Grupo F.

Fase espontánea

F.19: Vale, pues venga, vamos a comenzar con el debate. Vale, ¿cuáles son los fragmentos que habéis puesto como en plan primero?

F.18: A ver yo, por ejemplo, hay algunos fragmentos que, incluso habiendo estudiado Matemáticas, después de un tiempo sin tocarlas mucho, por decir de algún modo, ni me he enterado, hablando claro. Directamente los descartaría para, para introducirles esos conceptos a niños de nivel Bachillerato o en 3º o 4º de la ESO, por ejemplo, estos fragmentos serían el fragmento F y el fragmento H; el fragmento H sería el último que le, les presentaría.

F.21: Pues yo, el fragmento A, que es la definición del límite realmente, para todo n se puede encontrar tal, y después también hay uno que es para, creo recordar ... no, era ese... no sé, yo lo veo muy avanzado para verlo en la ESO, y recuerdo que cuando me lo dieron a mí en 1º de Bachillerato no lo recibí bien, me empecé a reír de las profesoras y casi me echan de clase porque...

F.20: A ver, en realidad, yo creo que después de dar los ejemplos sí estaría bien introducirlo.

F.21: Claro, primero el ejemplo y después la definición, pero...

F.20: Hombre, por supuesto, primero el ejemplo.

F.21: Si te dicen esto de primera hora no...

F.20: No, de esto de primera hora es verdad que es muy de carrera.

F.21: Que fue lo que me hicieron a mí.

F.18: A ver, yo es que eso por ejemplo el fragmento A lo recuerdo ya de cuando estudié Álgebra y Cálculo en la carrera, pero yo creo que nunca me hicieron una definición tan formal, por lo menos cuando estaba en el instituto.

F.19: Yo también en el instituto no lo vi como tal, o sea a mí me hicieron ejemplos, me explicaron, pues, problemas y todo eso, pero nunca me dieron la definición de límite, no...

F.21: Bueno ya, el F que incluso habla de un cuerpo ordenado y tal...

F.19: Ya ves...

F.18: Es que ese es una locura.

F.19: Ese en mi instituto no, en la vida, vaya.

F.21: Vamos porque...

F.19: Yo es que no pondría ni el E, ni el F, ni el G... ni el H.

F.21: Porque ejemplos de cuerpo ordenado que no sean \mathbb{R} y los racionales, pues deja cuerpo así infinito, no sé.

F.19: Nada, ese es demasiado... yo creo.

F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B.

F.18: Yo coincido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender.

F.19: El B es más fácil de entender, sí.

F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.

F.19: El B y el I es parecido ¿no?... uno se va a infinito y otro a menos infinito.

F.18: Sí, claro: uno se va a infinito y otro a menos infinito.

F.21: El C para el menos infinito está bastante bien, porque es prácticamente lo mismo.

F.20: Yo primero empezaría trabajando con los más infinito, entonces enseñaría el B, el K y el D.

F.21: Y el D también.

F.20: Y entonces ya después les daría la parte de cuando tiende a menos infinito, y daría los análogos: el I, el C y el J.

F.19: Sí.

F.18: Yo, la verdad, que lo he visto como por ejemplo en...; claro, pero es en mi cabeza; para mí es lo mismo que tiende a infinito que a menos infinito pero es verdad que para los niños les puede causar un poco de confusión lo de la tendencia al menos infinito; y entonces yo sí que me lo había planteado el orden: el fragmento B, el I, el K, el C y el D, pero es verdad que lo vuestro también...

F.20: Tú dices ver los análogos, ¿no? sabes primero ver...

F.18: Claro, ver el infinito, y ver el menos infinito, ver el infinito.

F.20: Es verdad, esa era una de las opciones; lo que pasa es que yo había pensado, digo, al principio lo pensé así y después dije es que, claro en realidad mejor prefiero que entiendan al más infinito y vean una cosa más visual como el D y el K, que también está así con la tabla bien explicado, y luego ya la parte de menos infinito haría los dos.

F.19: Yo incluso puse que los de gráfica, que son el D y el J, yo los puse incluso para 3º de la ESO; a lo mejor no cómo para explicar el concepto de límite, pero sí para que les vaya sonando porque por lo menos ahí, o sea en mi colegio sucesiones se ven en 3º de la ESO.

F.20: Es verdad, sí, sí.

F.19: Entonces pues, se lo pones... Dando clases particulares; entonces, yo que sé, ya saben representarlo en una gráfica y ya, pues lo ven gráficamente y ya pues, en 1º de Bachiller ya lo recuerdan, en plan ya lo habían visto en 3º de la ESO pues ya les suena, no con la palabra límite, pero sí como algo que está...

F.18: Hombre, yo creo que si le introducimos el concepto hablándoles directamente de límite ya van a entrar en confusión; creo que eso...

F.19: Siempre que es algo nuevo, les bloquea.

F.18: Es mejor con términos que conozcan como, por ejemplo, pues las sucesiones que yo creo que es algo normal, el tender a infinito, y así sin que ellos se percaten mucho que sepan que están aprendiendo algo nuevo.

F.21: El E tampoco me convence mucho porque primero utiliza la parte entera que es algo que es un poco engorroso.

F.18: Sí, yo ese también lo he puesto como uno de los complejos.

F.21: Y después el razonamiento que da es que como, como en los primeros 10000 términos parece que, no en los 101 primeros términos parece que crece, el límite es más infinito, cosa que no es así, porque da igual lo que pase en los n primeros términos, lo importante es cuando tiende a infinito; es que casi que van un poco en contra de la filosofía de enseñarles lo que es un límite; porque siempre está el ejemplo de 1º de Análisis... del límite, que los 1000 primeros términos es 0, 0, 0, 0 y después el 1001, el 1000 factorial.

F.20: Sí, claro, es verdad.

F.21: Que es más que el número ¿no? de partículas...

F.18: Eso ya es demasiado complejo.

F.21: No; pero que, que para mí parte de enseñar el límite también es saber que da igual lo que pase al principio y aun..., y los 100 primeros términos es el principio, y el primer millón de términos es el principio.

F.18: Claro.

F.19: Es verdad.

F.18: Pero hay números infinitos, entonces el principio, o sea un millón de términos no es relevante para la infinitud de...

F.21: Por eso.

F.19: ¿Y el G lo pondría en una clase de Bachillerato?

F.21: El G...

F.18: El G, yo ese lo he puesto nivel intermedio.

F.19: Yo éste lo puse ya para universidad, porque yo tampoco le veía yo muy...

F.18: A ver, yo creo que, si ya tienen el concepto, si han entendido el concepto creo que es como un resumen, a lo mejor...

F.20: Si ya han entendido... yo creo que si ya han entendido el fragmento A.

F.18: Claro.

F.20: Entonces ya éstos son...

F.19: Sí, pero piensa que haya gente que le va a costar solo el A.

F.20: Ya.

F.19: Entonces eso es como más avanzado.

F.21: Yo es que el A ni lo explicaría, directamente.

F.20: Es una forma de explicar.

F.18: Es que...

F.19: ¿Ni en 2º de Bachillerato?

F.21: A lo mejor en 2º, pero...

F.19: En 2º, pues yo no, yo lo... si lo...

F.20: A mí sí me hubiera gustado que me hubieran puesto la definición así tal cual.

F.19: Tal cual.

F.18: Claro, pero porque a ti te gustan las matemáticas, pero tienes que pensar que la mitad de la clase, o incluso más, no van a estar muy motivados con las matemáticas; a ver, yo es verdad que a lo mejor habría agradecido también que..., porque yo cuando llegué a Álgebra en la carrera y me hablaban con letras en vez de con números...

F.19: Claro, es que al empezar la carrera es un choque muy fuerte, cuando empiezan a decirte, y te quedas ostras.

F.18: Claro, era como yo lo leía y decía ¿dónde están los números?, ¿sabes?, ¿dónde?

F.19: Es que a mí siempre me lo han dicho, dice la carrera de Matemáticas no tiene nada que ver con lo de Bachiller, en plan vas a llegar a la carrera y vas a decir ¿dónde están las matemáticas?

F.21: No sabes cuál es el porcentaje de gente que estudia Matemáticas.

F.18: Claro, efectivamente por eso.

F.20: En un 2º de Bachillerato de Ciencias, ten en cuenta que la mitad de la clase va a Salud y la otra mitad a cosas de Ingeniería, Física, Matemáticas, Química.

F.19: Y esto se ve en todas las carreras.

F.20: Exactamente, matemáticas en todas las carreras de Ciencias tienen un año, ¿no? al menos.

F.18: Que yo, en Cálculo y en Álgebra he trabajado con estas definiciones, pero...

F.19: Yo, la definición de límite, sí porque como que te dice más o menos por dónde van a ir los tiros, por decirlo de alguna forma.

F.20: Claro y en Biología y en eso también supongo que, que se darán límites.

F.21: En Biología, pero por ejemplo ayer estaba dando clase y el problema es que ellos primero necesitan ver las cosas con números, y después ya le das la definición formal con letras; como empieces la definición con letras es una pérdida de tiempo total.

F.19: Claro, yo no te digo empezar por la definición teórica pero sí, una vez que hayan entendido todo el concepto, ponérsela, en plan esto siempre lo cumple.

F.20: Sí.

F.21: Es que era por ejemplo ayer una ecuación diferencial que los coeficientes eran constantes, y había que resolverlo, y te daban el método perfecto y dicen esto vamos a dejar de verlo, vamos a ver esta ecuación que es $2x + \dots$, la resolvimos y después dice, y dijeron así mucho mejor porque es que sí no, no.

F.18: Claro, es que yo, por ejemplo, sí que es verdad que ahora que lo recuerdo mi profesora de Matemáticas nos puso la definición ésta del límite en la pizarra, cuando empezamos a verlo, y nos quedamos todos; yo recuerdo además el momento en el que lo copié y fue como, y esto qué.

F.21: Yo me acuerdo también de eso.

F.19: Que a lo mejor es bueno, porque te llama más la atención.

F.21: Era peor, era el límite de funciones, y entonces estaba el épsilon y el delta.

F.18: Ah sí, con lo de la H.

F.21: Y yo empecé a decir ¿esto qué es?, y encima no solo letras, letras griegas... ¡madre mía!, o sea que...

F.20: Sí.

F.18: Entonces bueno, yo creo que todos estamos de acuerdo con empezar con algo que se acerque a algo que ya conocen, como por ejemplo el B.

F.19: Sí, algo más visual, ¿no? más práctico.

F.18: Luego es verdad que las gráficas ayudan mucho a entender.

F.21: Sí, pero la gráfica del E tampoco es...

F.18: No, si hay algunas gráficas que no, pero por ejemplo la D, la E, yo es que la E.

F.19: No, yo la E, la veo demasiado forzada.

F.18: Pero por ejemplo la D y la J se podrían aproximar bastante al...

F.19: Para explicar también el concepto de infinito y menos infinito, lo puedes usar muchísimo, por eso lo de 3º de la ESO, porque ahí ya empiezan a usar lo de infinito y menos infinito y...

F.20: Además es que a los niños les capta más la atención una ilustración que contarles las cosas.

F.18: En la C por ejemplo, yo he puesto una anotación que es que cuando pone el final de la tabla lo de la n tiende a más infinito y la sucesión tiende a menos infinito, yo por ejemplo en la n obviaría lo de tiende a más infinito porque ahí en realidad lo que estamos hablando del concepto de límite de la sucesión, ¿no?; entonces yo creo que les podría dar un poco de confusión ver el más infinito y el menos infinito, vamos quiero decir que...

F.18: Bueno es que es el límite, cuando la n tiende.

F.21: Cuando n tiende a infinito, a_n tiende a menos infinito.

F.18: Claro, pero como en teoría lo que estamos intentando es explicarles el límite de la sucesión, yo creo que podrían decir, tiende a más infinito, tiende a menos infinito, o que..., ¿qué está pasando?

F.21: Bueno, pero no sé, más menos queda claro, ¿no? que uno es el índice, vamos me queda claro a mí, no que uno es el índice y el otro es la sucesión, pero... no, es que después con funciones va a ser ¿no?... Cuando la x tiende a 4, la función tiende a tal, no sé, que es que, hay que ver también... no sé; porque ésta es la previa después de enseñar al siguiente curso; a mí esto me lo enseñaron en 4º, creo.

F.18: Yo creo que en 4º de la ESO.

F.21: Y en 1º ya empiezas con límites de función, creo.

F.18: Sí.

F.19: En Tenerife es desde 1º de Bachiller.

F.18: ¿Los límites?

F.19: Sí, se empiezan en 1º de Bachiller.

F.21: Sí, sí, por eso, desde 1º. Ah, pero tú dices.

F.18: En 4º de la ESO a mí ya me...

F.19: Ah, sucesiones... sucesiones solo, en 3º de la ESO.

F.20: Sucesiones en 3º, los límites de sucesiones en 4º y después ya en 1º empiezas con los límites de funciones.

F.18: Claro, que lo utilizas para derivadas, las representaciones gráficas, las tangentes. No sé, yo creo que como conclusión más o menos coincidimos con los más adecuados y los menos adecuados, ¿no? En lo único que, a lo mejor, podemos discrepar un poco en lo

de hacerlo en un orden de solo más infinito y después lo menos infinito, o hacerlo a la par.

F.21: Yo ahí estoy de acuerdo contigo.

F.18: Pero vamos, totalmente descartamos.

F.21: Y para el menos infinito el I sería el más sencillo, igual que el B el más sencillo de todos.

F.18: Sí, yo creo que se entiende muy fácil eso.

F.20: Sí.

F.18: Vamos, directamente descartamos H, F, E; H, F, E.

F.20: Yo diría que sí.

F.19: ¿El E también?

F.18: Sí, sí, H, F, E, yo creo que no... los obviaría.

F.20: Después aquí pone -finalmente para que quede registrado en su grabación, lean el orden establecido-, o sea que lo tenemos que, que elegir un patrón de decirlo y justificarlo.

F.18: Entonces lo que tenemos que hacer es primero diferenciar los más infinito, los menos infinito.

F.19: Vale, pues venga, voy a ir apuntando. El primero, ¿qué hacemos primero?, ¿con tablas, con gráficas?

F.20: A ver, yo he puesto el primero el B.

F.21: Yo también.

F.19: El primero, o sea exacto.

F.18: Y luego ya depende si queremos, o hacer por una parte los más infinito, o ir a la par.

F.19: Sí, yo lo haría en plan más infinito, menos infinito, ¿o no?

F.20: Sí.

F.18: O sea, a la par más infinito y menos infinito. Pues entonces el siguiente sería el I, que es el mismo concepto que el fragmento B solo que menos infinito.

F.21: No yo sí..., bueno...

F.20: No, o sea...

F.19: No, no, no.

F.21: Que si explicas primero el más infinito...

F.19: Decir primero... explicar los tres de más infinito.

F.18: Ah, vale.

F.21: Y el menos infinito; yo pondría el D porque está la gráfica, como habéis dicho, pero...

F.20: El D, la gráfica, y luego ya la tabla.

F.19: Y después... la tabla, sí.

F.21: La tabla, ¿cuál es?

F.20: La C.

F.18: Y, ¿no sería...?

F.21: No, pero la C es de menos infinito, la tabla.

F.20: O sea la K.

F.18: Después del B, ¿no vendría mejor el K? que también es la tabla...

F.19: Sí, sí, pero más infinito, ¿no?

F.21: Ah, vale.

F.20: Yo sí hubiera puesto antes la tabla que el dibujo, no sé porque me parece más...

F.18: Claro, sería D, B, K.

F.20: Bueno, más que nada porque la sucesión es más simple.

F.18: Claro, B, K, D, por ir haciéndolo...

F.20: B, K, D.

F.18: Como el término, la tabla y la representación.

F.19: Vale, pues sí, y después ya I, C, J, que serían los análogos, pero con menos infinito.

F.21: ¿Y la G? Pues la G, de más infinito y..., y es más o menos; si n se hace cada vez mayor, ¿a qué valor se aproximan los términos? Tal, y pone como un listón, y pone que lo supera.

F.18: Pues mira, yo el de la G lo había puesto en nivel intermedio, la verdad.

F.20: Yo la G la puse como universitario también.

F.19: Yo la verdad que no la pondría para el instituto.

F.18: Yo es que no; ¿tú eras de un conocimiento superior?

F.21: No, no, no, no, no, para nada.

F.20: Yo antes que poner el G pondría los análogos para el menos infinito.

F.21: Vale, vale, vale.

F.19: Esto es de más infinito.

F.18: Entonces serían el I, el C y el J, sí.

F.19: Y ¿el A, al final no lo ponemos? ¿No estamos de acuerdo los cuatro?

F.21: Después de eso, sí.

F.19: En plan al final.

F.20: Al final.

F.18: Sí, yo también; claro, yo he hecho aquí como una línea de sencillo y lo...

F.21: Pero antes, pero antes que lo que ha dicho F.18 del H, el F y el E, es decir, que antes de eso, me refiero.

F.21: Sí, yo dentro ya de los que entran en definiciones formales el primero sería el A.

F.18: Yo es que éste, lo del cuerpo ordenado es que no lo explicaría nunca.

F.19: Yo éstos no los pondría.

F.20: Es que le vas a decir esto a un niño el cuerpo ordenado, y se le va a descomponer el cuerpo.

F.21: Es que un cuerpo es una estructura bastante avanzada, creo yo, además ordenado, no sé... que no...

F.18: Entre eso, y a la par que dentro de poco le...

F.20: Es que además no van a saber lo que es un cuerpo.

F.21: Un cuerpo, por eso.

F.20: Les tienes que explicar lo que es un cuerpo.

F.18: Claro.

F.21: Y un cuerpo ordenado, es que no sé; tienes que explicarle orden también porque los complejos es un cuerpo que no está ordenado, ¿no?

F.20: Encima eso; sí, yo ese no lo pondría para nada.

F.19: Del E al H, yo no pondría ninguno. El E, el F, el G y el H.

F.21: Yo el G sí, el G a mí sí me mola.

F.19: Yo el G lo pondría, pero una vez puesto el A.

F.21: Es que además te da un ejemplo con ese, dice tú coge un número supergrande, vale, por ejemplo 100 millones, pues con el $n = 10000$, es 100 000 001, entonces como que cualquier número que cojas puedes coger un n .

F.19: Yo ese lo pondría después del A, como ejemplo inmediato.

F.18: Yo tengo ese orden; tengo el A, el G, y luego E, F, H como más descartado.

F.19: Más universitario, cuando ya se haya visto teoría de cuerpos.

F.18: Pero es verdad que por ejemplo el G ya tienen que, o sea ya ha tenido que pillar el concepto, porque si no, pero me lo imagino así convulsionando, como diciendo: yo toda mi vida he trabajado con números en las matemáticas y ahora me estáis haciendo trabajar con letras, ¿qué pasa aquí?

F.19: Entonces el G, ¿sería como el último, o el A?

F.18: Yo creo que el último, último, el H, yo creo que es un, entre el...

F.20: Ah, es que ya los ha puesto todos.

F.18: Claro, yo el último pondría el H.

F.19: Ah no, pero es que no hace falta poner todos, ¿no?

F.20: No hace falta poner todos.

F.18: No, no, no, no, claro.

F.19: Vale, vale. Digo de los que pondríamos...

F.18: El A, E, G,

F.20: Yo sí, lo dejaría así como lo tienes tú puesto.

F.19: Como lo tengo yo se explica el concepto de límite y después ya por último los ejemplos.

F.18: Entonces, definiendo ya, lo hemos ordenado, primero explicando el límite hacia más infinito y después hacia menos infinito, entonces el orden que nos ha quedado ha sido: B, K, D, I, C, J, y luego ya cuando entiendan el concepto, lo podemos definir como el fragmento A y después como el fragmento G.

F.19: Sí.

F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos.

F.18: Los obviamos un poco.

F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo.

F.20: Sí.

Fase inducida

F.18: Bueno, vamos a empezar ahora nuestro debate sobre los fenómenos de intuición y los fenómenos formales.

F.20: Vale, entonces, el fragmento A, hemos dicho que va a ser formal ya que es una definición de límite sobre una sucesión.

F.18: Sí.

F.21: Sería ida y vuelta...

F.18 y F.19: Ida y vuelta con...

F.20: Con sucesiones de límite infinito (i.v.s.i).

F.19: Sí, exacto, vale.

F.21: Y el fragmento B.

F.20: Crecimiento intuitivo ilimitado.

F.21: Sería crecimiento intuitivo porque aparecen los números, ¿no? 1, 4, 9, 16, 25...

F.19: Sí, es un ejemplo.

F.21: Vale.

F.18: Sí.

F.19: El fragmento C.

F.18: Sería decrecimiento intuitivo.

F.21: Claro, porque aparece una tabla con los números.

F.19: Sí, es otro ejemplo.

F.18: yo había entendido mal el concepto.

F.21: El fragmento D.

F.18: También sería crecimiento intuitivo.

F.19: Sí.

F.21: Crecimiento intuitivo porque aparece una gráfica con varios puntos.

F.19: Es más visual.

F.18: El fragmento E no lo queremos clasificar ni como formal ni como intuitivo porque pensamos que es muy complejo.

F.20: Porque es como un ejemplo de la definición formal.

F.18: Claro, entonces...

F.19: Y no lo seleccionamos antes.

F.21: Claro, te va dando ejemplos de los H , que son como el, sería ¿no? para todo H existe un número v tal que $v^2 > H$, y te da el ejemplo para $H = 9$, para $H = 16$, para $H = 25$, para $H = 100$ y para $H = 10000$, entonces... Por esa parte es formal, pero por la otra también aparece una gráfica y aparecen, no sé, no creo que se pueda considerar.

F.19: Ninguno de ellos.

F.19: El fragmento F.

F.18: Que poco discrepo.

F.20: También formal.

F.19: Sería formal...

F.18: De ida y vuelta, sí.

F.19: Sí, porque es teoría.

F.21: Además aparecen los dos límites, más infinito y menos infinito.

F.18: El fragmento G bajo mi punto de vista es, yo que sé, también un poco mezcla porque yo creo que habla un poco de la definición de límite, pero también lo hace con un ejemplo; no sé cómo lo veis vosotros.

F.21: Yo lo veo intuitivo en el sentido de que te dicen con cualquier número que coja, por ejemplo y utilizando un número muy grande, te puedo dar un número que al cuadrado+1 es más mayor.

F.19: Sí, hombre, yo lo veo como ejemplo, ¿no? Como intuitivo, yo creo.

F.18: Vale.

F.21: Entonces sería crecimiento intuitivo.

F.18: Crecimiento, me habéis convencido.

F.21: Fragmento H.

F.20: Sí ¿por qué tú también lo estabas viendo al principio, como el E, no? Más estilo ejemplo que una definición.

F.18: Claro, el E como que veía una diferencia más entre el ejemplo y la definición, por decirlo de algún modo; pero aquí lo veía todo como un poco mezclado, pero sí que es verdad que es más un ejemplo que la definición. A ver, fragmento H, yo lo veo otra vez mezclado.

F.20: Ninguno de ellos.

F.21: Igual.

F.19: Sería igual.

F.18: Porque primero te pone la tabla y después te habla de la definición en sí, que es muy complejo.

F.21: Además te da el, el, para cada H te calcula la fórmula del n que tendrías que dar para ese H , ¿no? que es la parte entera de raíz de H , ... muy técnico.

F.20: El fragmento I, sería como el fragmento B.

F.19, F.20, F.21: Decrecimiento intuitivo.

F.21: El J sería como el D, ¿no?

F.20: También.

F.19: Sí.

F.21: Decrecimiento intuitivo. Y el K sería como el C, pero con crecimiento en lugar de decrecimiento, ¿no?

F.20: Sí.

F.19: Listo.

F.18: ¿Cómo? Entonces el fragmento I, decrecimiento; J, decrecimiento; ¿y el K? crecimiento.

F.19, F.20, F.21: Crecimiento ... intuitivo.

*A3.3.7. Transcripción. Grupo G.*Fase espontánea

G.24: A ver chicos, pues ¿qué orden tenéis?

G.22: Bueno yo pienso que para empezar a explicar el concepto de límite lo mejor es dar ejemplos para que los niños sepan de lo que estamos hablando ¿no? No empezar con una definición formal sin entender nada.

G.24: Claro, un concepto básico, así en plan ... yo es lo que había puesto que el primero es, la B y la I.

G.23: La B, vale.

G.24: El fragmento B y el fragmento I.

G.22: Pues yo había puesto...

G.23: Yo he puesto la K y la C, que es...

G.22: Yo he puesto lo mismo que G.24.

G.23: Porque te da como una tabla, que ahí es súper visible, la verdad, porque te vienen los valores, por ejemplo en la K, en el fragmento K te vienen los valores de n , los valores que le vas dando a la n y lo que te va saliendo de la sucesión, y claro te dice que cuando n tiende a infinito pues la sucesión a_n tiende infinito; entonces, yo es la que veo más clara para explicarle a los alumnos.

G.24: Es que claro, como en esa ya hablamos de tiende a infinito es ya como meternos un poco en el concepto, de lo que es tender a infinito; la primera que no habla ni siquiera de bueno sí, dice que tiende a infinito, pero en plan habla como cada vez más grande, es como algo más básico.

G.22: Sí, lo que pasa que yo veo con la C y la K, porque yo pienso lo mismo que Serrano, también entienden un poco que es la sucesión, que si llegan a este tema y a lo mejor hace un año que no ven lo que son sucesiones y le plantas esto, pues así recuerdan lo que es una sucesión de verdad que, que va avanzando.

G.24: Sí, bueno, al final yo lo metería en la misma clase porque esto se explica creíble el fragmento B.

G.23: Sí, porque al final todo esto es breve.

G.24: Y el fragmento K y C pues los pondría a continuación, pero en la misma clase todo, que eso se explica el concepto rápido y luego después de eso, ¿qué habéis puesto?

G.23: Después de, el de la gráfica, el de la gráfica por lo menos también, siempre los alumnos al ver una gráfica se interesan más, eso lo primero que interesarse se interesan un poco más; y en la gráfica más o menos se ve como decrecimiento de una sucesión y te explica más o menos bien cómo tienden a infinito.

G.22: Y además se ve cómo se relacionan otros temas de matemáticas, que no solo es esto y gráficas en un tema y ya no las veo nunca más, que aquí estás viendo que...

G.23: Estás recordando la gráfica otra vez, porque ya ellos supongo que la habrán visto entonces lo van recordado todo el rato para que no, que no lo vayan olvidando, que también.

G.24: El fragmento G ¿lo habéis utilizado?; porque yo también lo he visto un poco, así un poco básico... Cómo para dar nociones.

G.23: El fragmento G, lo tengo puesto yo creo que de los últimos. Bueno, hay unos cuantos que ni los he puesto, pero de los que he puesto es de los últimos porque lo veo como un poco más liso para los niños.

G.24: Yo lo veo un poco sencillito, no sé. El fragmento G yo lo pondría también de los primeros, incluso antes de la gráfica porque habla no sé cómo, habla de un listón ahí, que es algo más, no es lenguaje matemático, es lenguaje más coloquial.

G.22: Yo lo veo bien pero si el profesor lo explica bien y, intenta; si el profesor dice esto una vez y ya está, creo que los alumnos no lo entienden; si el profesor se preocupa porque se entienda, está perfecto para explicar una definición no de forma formal sino con símbolos, pero que se tiene que preocupar porque de primeras yo creo que a lo mejor se lo dice una vez a los alumnos y no se enteran de nada, pero yo creo que intentar explicarlo sí que es una buena definición por eso, porque no utiliza cosas muy matemáticas, muy técnicas, que lo que se tiene que preocupar es porque se entienda.

G.23: Sí, yo es eso porque, ellos por sí ..., yo creo que un alumno por sí solo si ve la definición esta, si él la lee sin que se la expliquen, no va a entenderla bien, no va a entender cuál es el concepto bien; ya eso, es lo que dice G.22 que ya si un profesor se lo va explicando bien pues ya sí, sí iría entendiéndolo, pero de esas para mí no sería de las primeras; la primera sería la que he dicho antes, yo lo veo mucho más claro para que se

queden con lo que el concepto que es básicamente lo que ellos tienen que aprender, cuál es el concepto de límite; y después también hay unas cuantas aquí es que no las pondría en la vida, sobretodo –yo que sé– el fragmento E no lo pondría, el H tampoco lo pondría, es que son cosas que nosotros...

G.22: Yo directamente he puesto que no los pondría también.

G.24: Yo tampoco los pondría.

G.23: “\$%&”, es que lo veo superlioso, y encima en el fragmento H también está hablando de inecuaciones que es otra cosa... aunque se lo estés recordando pero inecuaciones es otra cosa difícil de..., de las matemáticas claro; entonces, claro, los alumnos no tienen mucha base de inecuación, entonces si les un metes un fragmento que te habla de inecuaciones y te da la definición esta que te está dando, yo eso lo veo vaya... fatal, vaya, que no lo vas a entender seguro.

G.24: Yo tampoco he visto el fragmento H ni el fragmento E. Bueno yo es que no soy de la carrera de matemáticas, pero yo me lo he leído y no, lo acabaría entendiendo si le dedicara bastante tiempo; a lo mejor si me lo explican pues sí que lo entendería, pero no sé, no lo veo claro como para utilizarlo.

G.22: Además yo creo que en este tipo de ejercicios, tiene que explicar muy bien el profesor porque, qué criterio utiliza para elegir los valores porque después sino un niño lo que va a hacer es aprendérselo de memoria porque no entiende ni siquiera el principio, ¿por qué has cogido este valor? y eso le cuesta..., en plan yo veo que hay muchos profesores que no lo hacen aunque sea al azar, pues dilo. Da igual el número que elijas, puedes elegir el número que te dé la gana pero no dice por ejemplo cogemos el 9, y después cuando tú te sientas a estudiar dices –¿por qué cogió el 9? ¿por qué le dio la gana o por algún motivo? Eso lo tienen que dejar siempre muy claro, cuando se cogen ejemplos porque después el niño no puede que no lo entienda y al final termine aprendiéndoselo de memoria y le pones otro número y ya no lo entiende.

G.24: Claro, claro.

G.23: Vale, vale.

G.24: Y también tiene tabla de parte entera en ese, y parte entera también los alumnos de esa, de ese curso tampoco sé si lo sabrán, lo habrán dado ya, lo que es, que a lo mejor se lían.

G.22: Y además es que no explica, lo único que hace el ejercicio es explicar por qué está haciendo esas cosas, porqué coge dos números, porqué está comparándolo, está haciendo cuánto sin explicar nada.

G.23: Sí, a mí ese es que no me gusta sin duda y después está este otro que el que se da en la carrera.

G.24: El H sí que explica, el fragmento H sí que explica un poco lo que hace.

G.22: Un poco abajo, es que yo estaba viendo éste, estaba hablando del E.

G.23: El H.

G.24: Porque a ver es lo mismo, pero no sé, de otra forma explicado; sí que va explicando paso por paso lo que hace.

G.22: Que también depende mucho del profesor porque a lo mejor es que lo que nosotros consideramos más fácil si el profesor tampoco lo sabe explicar: a lo mejor un profesor que explica muy bien con eso lo entienden los alumnos mejor, yo creo que esto es...

G.23: Lo bueno del H es que te viene como otra tablita, que es lo que hemos dicho antes que con la tablita siempre es más fácil. Entonces si le sabes explicar bien la tablita los valores de n , a_n , H y v , le vas explicando bien, claro, con la tablita a lo mejor estaría ... la verdad que más claro; con la tablita la verdad que a mí me parece bastante mejor; si no hubiese tablita absolutamente no, pero con la tablita por lo menos sí puedes ir explicando y te vas ayudando, aunque sea lioso.

G.22: Pero igualmente la primera línea lo haces por, sin explicar nada, después si dices – vale estoy resolviendo una inecuación-, pero la primera línea eso lo lee un niño, bueno es que eso lo leo yo en la carrera y no lo sé, imagínate un niño en Bachiller, yo que sé. Tienes que pararte a pensar qué está haciendo ahí. Bueno, yo el fragmento F lo que he visto es que por ejemplo habla de cuerpo ordenado, de un cuerpo.

G.23: Hombre, es que eso son cosas que se dan en la carrera.

G.22: Que muchas veces no te das cuenta pero que utilizas definiciones, palabras que hacen que ya todo, no lo entienden, casi que no entienden toda la definición, pero a lo mejor o se lo aprendan de memoria y después no la entienden cuando cambien algo.

G.24: Sí.

G.23: Claro, pero lo de, es que lo de cuerpo, utiliza el cuerpo, vaya, ningún alumno de la ESO yo creo ni de Bachillerato sabe lo que es un cuerpo: yo por lo menos hasta la carrera no sabía yo qué era eso; entonces si le dices un cuerpo ordenado, lo único que van a pensar ellos de cuerpo es un cuerpo humano, y no va a tener sentido, no, vaya, esa fatal, y hay otra, que es la definición formal que nos dan en la carrera que esa...

G.24: Yo sí que la metería porque está bien habituarse con el lenguaje matemático un poco.

G.22: Yo la metería, pero claro en cursos altos.

G.24: Ya cuando hayan entendido el concepto, meter y explicarlo, porque pueden asociar ya el concepto que tienen en la cabeza, un concepto básico que es el concepto de... en plan de límite en el infinito que hay creciendo o decreciendo hasta el infinito, y lo pueden asociar con el lenguaje matemático.

G.23: Claro, y sobre todo eso creo que eso estaría bien, sobre todo una vez que hayan aprendido el concepto todos los alumnos para la gente que esté más interesada en matemáticas o les guste más, que empiece a ver lenguaje más matemático y entender definiciones matemáticas que les puede venir bien, y los demás alumnos pues que se queden con el concepto, de la otra forma, y ellos que como que avancen más o se les introduzca por si en un futuro quieren estudiar una carrera de ciencias o algo, y que se vayan haciendo a la idea de lo que van siendo, de lo que van siendo las cosas.

G.24: Del fragmento A, ¿estamos hablando?

G.23: Sí.

G.22: Sí. Yo no lo miraría como, yo no lo consideraría como, o sea que esto es lo que tienen que saber y esto es lo que yo voy a evaluar que sepan, yo esto lo evaluaría porque seguro que hay personas que, a lo mejor, no van a ver esto más en la vida o no lo entienden porque les cueste más trabajo y es normal, porque esto son cosas de carrera, pienso yo; pero sí para que lo vean y entiendan un poco el lenguaje y sepan lo que significa, y cómo se escribe, para que se habitúen, vamos; si después les gusta de verdad, pues mejor.

G.23: Claro porque eso si se lo das al principio sin explicar, sin haberle explicado nada de sucesiones, si le das esta definición pues no se van a enterar obviamente: aparte de que hay lenguaje matemático como el para todo o el pertenece, o el implica, el sí solo si... hay mucho lenguaje matemático, entonces... ésta vaya. Como primera definición la

descartaría totalmente y ... pero sí, es lo que he dicho antes, la metería una vez que hubiese explicado el concepto de límite bien y lo hubiesen entendido todo, y entonces ya está; al final queda, hemos dicho que ... bueno, ¿tú estás de acuerdo, tú al final? que eras tú el que no estabas de acuerdo en que el primero, la primera forma de explicar sería el C, o el K, ¿tú sigues?

G.24: Sí.

G.23: ¿Tú crees que ese sigue siendo, que ese, que la primera sería el B o sería, la nuestra, la que hemos dicho?

G.24: El B y el I, el B y el I porque no sé, yo es que lo he leído y lo he visto superclaro, en plan te ponen una serie de números con los puntos suspensivos y te ponen la sucesión, que la puedes ver escrita con los números y te dice que tiende a infinito por esto, porque es cada vez más grande, entonces lo veo un concepto tan básico, y luego ya explicaría lo siguiente, metiendo ya la tabla: en plan lo vamos a comprobar metiendo los valores en la sucesión que hemos dado para que veáis que cada vez más grande o más pequeño; no sé, yo sigo pensando eso.

G.23: Sí, bueno; yo es que veo más claro... el C.

G.22: Sí, yo es que veo más claro primero poner como ejemplo porque yo el C, el K, el D, lo veo como representar gráficamente o en las tablas lo que es una sucesión y eso, como más tipo ejemplo de trabajar; entonces yo es eso por lo que empezaría porque el B aunque sea lenguaje coloquial no deja de ser la definición.

G.23: Y si a un alumno le pones una tabla, una gráfica o algo, es lo que he dicho antes, que el alumno como que se va a fijar más porque es algo fuera de lo normal porque lo normal es que ellos vean números y letras, las explicaciones con números, y entonces ya sí ven una tablita o algo distinto y a lo mejor ya le ponen como más atención, entonces eso ya.

G.22: Claro, y además que puedan interactuar en la clase, ¿no? porque éstos como son más ejemplos que puedes hacer ya captar la atención para cuando después les enseñes la teoría estén más atentos, y no al contrario, enseñar la teoría, bueno depende de la hora de clase y no sé, el número de alumnos, si son participativos o no..., pero si a lo mejor en una clase de matemáticas que tampoco se puede participar mucho empiezas ya haciendo que participen, a lo mejor ya después están más atentos a la explicación.

G.24: También, como en el fragmento B, la sucesión es $a_n = n^2$, y luego mete en el fragmento C $a_n = n^2 + 1$, también a partir de esto que ya hemos explicado podríamos decir, ¿creéis qué cambia si le sumamos 1 a la sucesión?, no sé, se vería también.

G.22: Sí, porque las sucesiones si es verdad que las más simples son las que vienen en el fragmento que tú dices, eso sí es verdad.

G.23: Claro, pero también es importante no ponerles ejemplos más simples; es lo que he dicho él, que una vez que se haya explicado decirles: -y si tienes $-n^2 + 1$, ¿sigue siendo límite infinito o al estar el $+1$ ese ya cambia?--; eso también es importante ponerlo, si pero vaya..., yo pondría varias definiciones porque además en cada definición hay una sucesión distinta. Entonces eso también hace también ver a los niños cual van siendo el límite; en el fragmento D hay una sucesión racional.

G.24: Yo es que en una clase pondría varios fragmentos, usaría varios fragmentos porque esto es muy breve, entonces en una clase le puedes presentar la definición en plan fragmento B, y luego le puedes poner la tablita que es el fragmento C, y luego la gráfica; en una misma clase puedes hacer todo eso.

G.23: Claro si al final lo importante es que se enteren del concepto, entonces si con el B a lo mejor no lo entienden, con el C sí, o si no con el D ya les queda claro con la gráfica; lo importante es eso al final, y poner distintos ejemplos, sobre todo, para que ellos vayan viendo y familiarizándose que no todos los límites son infinitos: incluso les pondría algún contraejemplo de algún límite que no fuese infinito para que vean que no todas las sucesiones tienden a infinito, porque hay sucesiones que no tienden a más infinito o a menos infinito, que tienden a un número, o cualquier cosa; y también les pondría un ejemplo de eso para que ellos a lo mejor pueden equivocarse y relacionar el concepto de, como n tiende a infinito, siempre la sucesión va a tender a infinito, a más infinito o menos infinito pero eso no siempre es así.

G.24: Se supone que antes de lo de las sucesiones que tienden a infinito dan sucesiones.

G.22: Las que tienden a un valor numérico; pero sí, el problema es que a lo mejor están en este tema y ya todas las sucesiones ellos piensan que tienden a infinito y después está lo típico, porque a mí me lo hacían en el instituto, que a lo mejor te ponían el ejercicio de examen que era para que cayeses y a lo mejor era un límite superfácil pero todo el mundo ponía, o estaban mucho rato liados con el ejercicio; y eso es lo primero que creo que les tienes que explicar, que es un caso pero que antes obviamente tendrás que comprobar que

ya no porque estás dando estos límites que están en este tema son todos ya infinitos, estos del otro tema son todos los límites con valor numérico que en las Matemáticas te sale cualquier cosa, en cualquier momento; aquí porque está todo muy organizado, pero una vez que haya cursos más altos en otras asignaturas: en física por ejemplo de Bachiller ya saben matemáticas también; y eso, que no caigan en las cosas más fáciles.

G.23: Y también, bueno también, lo de que sean los límites más infinito y menos infinito, que haya ejemplos con números negativos también es importante que lo entiendan; que a lo mejor les cuesta más: a lo mejor con números negativos como no están tan familiarizados con ellos les puede costar más: sobre todo yo que sé, en el ejemplo, en el fragmento J, el de, claro, ya le dicen los términos de esta sucesión crecen en valor absoluto pero al ser negativos se dice que tienden a menos infinito, y ahí se les puede complicar más a los alumnos porque ya les está diciendo que crecen en valor absoluto, y eso a lo mejor no lo entienden, a lo mejor no saben qué es crecer en valor absoluto; a lo mejor tú les explicas el valor absoluto y tal, pero claro, ellos no saben qué es el valor absoluto y decirles que al ser negativos tienden a infinito lo pueden ver más liso, lo ven más fácil..., el caso positivo, es obviamente más fácil pero también habría que explicarles.

G.22: Que hay que presentarlo, claro.

G.24: También a lo mejor podríamos, se podría empezar explicando solo los positivos, ¿no?, ¿por qué aquí mete también límites..., o sea tiende a más infinito y menos infinito?

G.23: Sí, hay de todo, hay positivo y negativo, pero...

G.22: Pero yo creo que es mejor...

G.24: A lo mejor agrupar primero en, explicar todo lo de cuando tiende a más infinito y luego empezar con el cuándo tiende a menos infinito.

G.23: Claro, como les es bastante parecido, al final siempre es igual, solo con números negativos que, aunque los alumnos crean que son distintos, pero realmente es lo mismo y tienen el mismo comportamiento que los números positivos; entonces es que eso hay que hacérselo ver también, eh.

G.22: Pero yo, en realidad, no los separaría, yo los daría igual porque muchas veces aunque no seamos conscientes, eso me pasó, eso lo vi cuando fui a la observación del instituto: les metes el miedo a los alumnos porque tú sabes que es más difícil y a lo mejor se lo estás transmitiendo a ellos sin quererlo, y llegar y decirles vamos a dar después, eso

lo dejamos para después porque cuesta más entenderlo y ya ellos lo ven; si tú, a lo mejor, se lo das todo igual dices -no es que un número negativo es igual que uno positivo- tienes el ejemplo del positivo y el ejemplo del negativo y es lo mismo; pues a lo mejor eso hace que el niño diga -sí, pues es lo mismo-, pero si tú ya le dices igual porque a lo mejor te pregunta -¿y si es número negativo?- y tú le dices -no, eso para después porque antes voy a explicar esto-, ya ahí estás diciéndole al niño -es más difícil, te va a costar más-; y eso es uno de los errores que veo yo un montón en matemáticas: decirles que lo que se van a encontrar es más difícil, ya hace que tú lo veas difícil; sí que es verdad que yo sé, tú eres consciente de que hay cosas más difíciles pero yo creo que no es bueno decírselo porque es ya como ponerle una barrera; o -esto lo suspende todo el mundo-, pues no, porque ya partes de eso, ya parte el niño de que es muy difícil; yo eso lo veo..., que obviamente que el profesor sabe lo que es más difícil y lo que es menos difícil; pero yo creo que la cuestión es no distinguirlo.

G.24: Sí.

G.23: Sí, yo en eso también estoy de acuerdo, la verdad.

G.22: Pienso, vamos.

G.23: Sí, sí, totalmente, y...

G.22: Yo creo que..., y que la cuestión es dar muchos ejemplos, vaya; cuantos más ejemplos tengan y más trabajen en clase y más puedan, es lo que mejor les va a venir, por mucha definición teórica que les des. Yo creo que la clave son los ejemplos, de todo vamos.

G.23: Sí, incluso yo que sé, incluso buscar otra forma que no sean mezclando gráficas y tablas, otra forma de explicar o de poner ejemplos, contar de una forma gráfica y que se entiendan claramente de explicarlo cuanto más, mejor para el alumno, al final.

G.22: Es que yo creo que, si entienden el ejemplo, si hacen muchos ejemplos y lo entienden, después lo saben explicar teóricamente; al contrario, creo que no; tú puedes saberlo muy teóricamente, pero a lo mejor no lo sabes, después no lo sabes hacer pero ... o sea saberlo hacer, lo sabes explicar al final si lo entiendes bien; entonces yo creo que eso es lo importante.

Fase inducida

G.24: Pues el fragmento A.

G.23: Empecemos sí, el fragmento A...

G.22: Pues el fenómeno caracterizado es el de ida y vuelta en sucesiones con límite infinito.

G.24: Sí.

G.23: Sí, yo estoy de acuerdo también, porque...

G.22: Porque es la definición formal de límite, entonces...

G.24: Sí, además explica que, si vamos de un lado a otro, luego la vuelta también se cumple, así que; yo creo que está bien definido, así que... En el fragmento B, encontramos crecimiento intuitivo ilimitado, el fenómeno, porque habla de un crecimiento.

G.22: Claro porque ven que no está acotada superiormente la sucesión porque siempre crece.

G.23: Y es muy intuitivo, como te pone la sucesión con números intuitivamente se ve muy claramente que crece; y después el fragmento G también yo lo veo, lo veo como un decrecimiento intuitivo ilimitado: también es bastante claro porque con la tabla se ve muy intuitivamente lo que ocurre con el límite menos infinito.

G.24: Pero también se ve un crecimiento intuitivo ilimitado, ¿no? porque tenemos que conforme n crece, a_n decrece, Cuando n tiende a infinito, a_n tiende a menos infinito, ¿no?

G.22: En la n , ves como la n crece como si tú contases la n como en una sucesión, y después el a_n , sí; pero es que lo de que la n crezca y el a_n decrezca está ya en decrecimiento infinito ilimitado, ¿no?

G.24: Pero, es que ¿dónde se ven los fenómenos?

G.23: Yo pondría solo la de decreciente porque la n en una sucesión, la n siempre va creciendo y aquí de lo que te habla es del concepto de sucesión, dando los términos de la sucesión.

G.24: Ya, pero también tiene el concepto de cuando n tiende a infinito, ¿no?

G.23: Claro, tiene el concepto ahí.

G.23: Claro, pero es la cosa separa así, como siempre n va a tender a infinito si separarlo ¿o no?, en plan porque sea así, siempre que habla de sucesiones hay un crecimiento intuitivo infinito en la n ¿no? porque la n siempre va a crecer igual que la...

G.24: Claro, sí, pero en otros por ejemplo no se ve tan claro, ¿no?

G.23: ¿Cómo cuál?

G.22: O sea, en todos los que sean decrecimiento intuitivo ilimitado va a haber también un crecimiento intuitivo ilimitado, ¿no?

G.24: Este por ejemplo no lo ...

G.22: Porque no especifica cada vez el valor de n .

G.24: Claro.

G.22: Bueno sí, si lo vemos así, sí, ¿no?

G.23: Pero entonces en la gráfica...

G.24: El fragmento I, me refiero.

G.23: Pero entonces en la gráfica también, hay crecimiento y decrecimiento ilimitado.

G.24: ¿En esa?

G.22: En esa no porque en la que sea.

G.23: Bueno en ésta no, en ésta hay crecimiento, pero, ah bueno ¿en la otra es dónde viene?

G.24: Sí, en la J.

G.22: Claro, tú ahí también has puesto que hay un crecimiento, ¿no?

G.24: Sí.

G.22: Vale.

G.23: La J es la última. ¿Tú ahí que has puesto? ¿Los dos, no?

G.24: Sí, claro; los dos: claro, conforme el n crece, el a_n decrece entonces...

G.23: Si lo tomas así, si lo tomas así, sí, pero vaya.

G.22: Yo no había caído en eso porque claro como la n siempre crece, pero sí que es verdad que ahí se ve explícitamente, que en otros casos no, no se ve, aunque tú lo tengas interiorizado, que la n siempre...

G.23: Ya, eso sí; después en el fragmento D, sí es así; lo veo claro que es crecimiento, crecimiento intuitivo ilimitado y vaya, porque en las abscisas y en las ordenadas, así que, ahí como ambos crecen a infinito, yo creo que son crecientes.

G.24: Y en el fragmento E, yo no he considerado ninguno que se manifieste en el fenómeno.

G.22: Claro, pero ahora viéndolo el dibujo es lo mismo que nos han explicado del proceso de ida y vuelta.

G.23: Sí.

G.22: Con la gráfica se ve el proceso de ida y vuelta, pero yo después veo que no se entiende nada.

G.23: Que está explicado; sí, pero realmente sí es el proceso de ida y vuelta, lo que ha dicho ella, como que va, de hecho, el dibujo que tiene puesto ella es igual que ésta.

G.22: O sea, pero claro, yo creo que la gráfica también se ve, pero después la explicación que hay al lado la veo un poco, que no veo ninguna explicación, veo solo que hace operaciones, pero no explica nada.

G.23: Realmente es eso, lo que pasa es que lo está haciendo con ejemplos concretos, pero realmente eso que sí...

G.24: Éste intuitivo está claro que no, que sí es.

G.22: Yo creo que es el proceso de ida y vuelta.

G.24: Sí.

G.23: Sí, yo también.

G.22: Pero que aquí falta como la explicación de un profesor de porqué hacer estas cosas, yo creo que solo con esto no se entiende.

G.23: Claro, tú le pones eso y la verdad es que no.

G.22: No entiende nada.

G.23: Que va.

G.24: En el fragmento F; a ver yo he considerado que el fenómeno que lo caracteriza es ida y vuelta en sucesiones con límite infinito.

G.22: Sí, yo también.

G.24: ¿Vosotros también?

G.23: Yo también; porque realmente es como... es otra definición, solo que más, como más compleja porque ya te hablan de cuerpo, te hablan de otras cosas.

G.24: Sí, del a_n ... tanto más infinito como menos infinito.

G.23: Sí, y vaya eso; la verdad que no es para nada intuitiva.

G.22: No.

G.24: Exacto.

G.23: Porque va diciéndote, hablándote de cuerpo, de cuerpo ordenado; entonces sí, yo estoy de acuerdo en esa con vosotros.

G.22: En el fragmento G, yo también considero que es el proceso de ida y vuelta porque yo no la veo intuitiva.

G.24: Sí, yo también.

G.23: Sí, en un principio consideramos...

G.22: Aunque sea coloquial pero no es intuitivo.

G.23: Bueno, intuitivo sí, un poquillo.

G.24: Yo también considero eso y considero también en lo de intuitivo también es crecimiento intuitivo ilimitado.

G.23: Yo también estoy ahí de acuerdo; yo pondría los dos, porque intuitivo es.

G.22: Pero yo creo que depende...

G.24: Cuando hablamos de listón, el listón no es un término matemático.

G.22: No es un término matemático, pero a lo mejor depende, yo creo que esto depende del nivel: es intuitivo según la base que ellos tengan de límite, pienso yo.

G.23: O sea, sí, yo también, tan intuitivo como la otra no la veo, pero sí la veo, cierta parte intuitivo, pero...

G.22: A ver, a lo mejor lo veo intuitivo si ya ellos ya tienen un poco de idea o les presentas unos ejemplos pues ya así lo pueden ver más; pero si tú les plantea esto lo primero, yo creo que no lo ven intuitivo, lo único que dicen -bah, estamos fijando esto, estamos fijando lo otro y crece-, que no se ve como gráficamente o en una tabla.

G.24: Vale.

G.22: Yo, dependería, a lo mejor sí tiene intuitivo, pero dependiendo del nivel que tengan los... Si lo explicas lo primero no lo veo intuitivo, si ya les has hablado antes de eso, pues sí, puede ser un poco más intuitivo.

G.23: Sí, yo principalmente también lo veo más, lo de ida y vuelta en sucesiones con límite infinito, justamente porque es otra vez lo que se ha dicho de la gráfica, pero escrito con palabras, más o menos.

G.22: Yo creo que es utilizar la definición, pero dándole valores, como... yo haría como una explicación de la definición.

G.23: Sí, un ejemplo de la definición.

G.22: Después en el H, ninguno, yo no veo ninguno.

G.24: Yo también considero ninguno de ellos, pero ahora...

G.22: Sí, pero en el otro por lo menos se ve gráficamente, pero es que en la tabla... en la tabla ¿qué dan números?, es que no ves nada, ¿no?

G.23: En el H yo tampoco veo ninguno ahí.

G.22: Si es que esta tabla, cuesta trabajo hasta...

G.24: Si tomas un valor, un valor, y tomas dos valores, compruebas el otro y luego puedes tomar otros dos valores y comprobar el otro, entonces ahí hay un..., ¿no?

G.22: Sí, que el proceso está pero que no sé.

G.23: No, intuitivo está claro que no es porque no...

G.24: Yo pondría que está.

G.23: Y lo de ida y vuelta...

G.24: Sí, yo creo que está, ¿no?

G.23: Yo, no, no, no; yo ahí no lo veo tanto.

G.22: A ver, yo creo que está, pero claro, nunca lo utilizaría; pero eso sí, estar, está; yo creo que sí, que está porque se ven los números, se ve que si coges, que si fijas un H más un... bueno sí se ve pero que no lo utilizaría nunca, ¡vaya!

G.24: Ya, yo tampoco.

G.22: Porque es que esa forma de representarlo yo no sé ni comentar esa tabla, me costaría trabajo entenderla, ¡vaya!

G.23: Sí, sí, básicamente el primer parrafito, bueno la primera línea de hecho, sería básicamente eso porque después lo otro ya es... como meterse complicaciones cuando te pone la parte entera y lo de inecuaciones, que te lo intenta explicar, pero ahí ya te, cómo que se te complica más y hace que sea menos entendible.

G.22: El fragmento I, decrecimiento intuitivo ilimitado, ¿no?

G.24: Sí.

G.23: Sí, ahí está claro.

G.24: Sí, es como el fragmento B, pero con números negativos, o sea decreciente así.

G.23: Claro, te viene la sucesión de arriba y... se ve claro, vaya.

G.24: Y el fragmento J pues, tanto crecimiento como decrecimiento.

G.22: Sí por el mismo motivo que...

G.23: Claro, si tenemos el mismo criterio es eso.

G.24: Sí, porque vemos en abscisas un como crece el valor, y en ordenadas como decrece.

G.23: Sí, lo dices bien. Y después el último...

G.22: En el fragmento K.

G.23: El crecimiento intuitivo ilimitado también, y ahí eso también por parte de los dos, de la n y de la sucesión, así que...

G.22: Bueno y ¿seguís manteniendo el mismo orden que habíamos elegido en el debate anterior? Yo, sí.

G.23: Yo también, yo seguiría...

G.24: Sí.

G.22: Porque yo empecé con los fragmentos que ahora he considerado que son intuitivos que es lo que yo pienso que es lo mejor.

G.24: Claro, aparte metemos primero los que solo implican creciente y luego usamos también los que implican creciente y decreciente, cuando la n crece tiende a infinito, el $a_n \dots$

G.23: Que es lo que dijiste tú de primero explicar los que tienden a infinito, pero al final son los que son crecientes solo, que es lo que tú dijiste también que no hay que explicar.

G.24: Pero los combinamos a la vez.

G.22: Yo creo que más que eso a lo mejor explicas primero los fragmentos B, yo pienso que a lo mejor más que impliquen creciente o decreciente, que implique o creciente o más de un fenómeno, ¿sabes lo que te quiero..., me entendéis?

G.24: Sí.

G.22: Quiero decirte, por ejemplo, yo puse los primeros el fragmento B y el fragmento K, que esos implican solo un fenómeno, el creciente o decreciente, después ya metes los que implican dos fenómenos, que entiendan que la n máxima, que así fue como justamente yo lo hice.

G.24: Sí, sí ¿Entonces nos mantenemos chicos?

G.23: Sí, yo me mantengo; sí, yo estoy de acuerdo con lo que ha dicho G.22 que primero lo intuitivo es lo primero para que los alumnos entiendan el concepto, que al final es lo importante.

A3.3.8. Transcripción. Grupo H.

Fase espontánea

H.26: Bueno vale, empezamos a comentar ¿no?

H.25: Sí, lo primero vemos cuáles no creemos que son apropiados sobre todo porque el contenido, lo primero vamos a tachar los que nos consideramos apropiados porque el contenido es demasiado elevado para impartirlo en un aula de la ESO o de Bachillerato. Todos los que vean -piensas no pasa nada, aprendemos-.

H.26: No pasa nada, imagínate lo que un niño, imagínate lo que puede aprender un niño pequeño y ya está.

H.25: O lo que ya estudió también nos interesa, aunque sea distinto.

H.28: Bachillerato, ¿hasta qué edad es?

H.26: 17-18 años.

H.28: Desde los 12.

H.25: Justo antes de la Universidad, es decir los contenidos que tú estudiaste justo antes de la Universidad más o menos ¿vale? Y quitamos los que veas ... que eres matemática, nos tienes que ayudar; yo hace 15 años que no tengo estos contenidos.

H.28: Esto, yo veinte y más.

H.27: 2º de Bachillerato ya es el final, es como el COU antiguo, ¿no?

H.25: Sí antes de...

H.26: 17- 18 años, el año antes de la Universidad.

H.27: El último curso yo lo veo bien de nivel.

H.25: Yo lo veo exagerado, ¿tú has estudiado esto, tú cuando estabas en Bachillerato te estudiabas esto, por ejemplo?

H.28: Yo empecé con eso.

H.25: ¿Verdad que no?

H.26: Yo creo que tampoco; ciertas definiciones seguro que no.

H.28: En mi país no se divide como vosotros Bachillerato, que divide técnico, de letras.

H.26: Es el mismo. ¿Hasta qué edad son obligatorias todas?

H.28: Siempre.

H.26: ¿Siempre hasta los 18 años?

H.28: Además en la Universidad no puedes elegir ninguna asignatura, todas son obligatorias.

H.26: Pero ¿sí puedes elegir carrera universitaria no?

H.28: Carrera, pero antes de entrar en la Universidad, pero si entras todas las asignaturas son obligatorias y...

H.25: ¿En la carrera?

H.28: En primer año, éstas; en 2º, éstas...

H.25: Se refiere...

H.26: Que no hay optativas.

H.25: Que en los planes, que en los planes de estudios que son asignaturas obligatorias.

H.28: No puedes elegir.

H.26: Son rígidos, son rígidos, vale.

H.25: Cuando yo hice un plan antiguo en España hace mucho tiempo, que eran asignaturas anuales y eran así básicamente, hasta los últimos cursos no podías elegir. Bueno, el fragmento A, empezamos uno por uno: el fragmento A, ¿creéis que tiene un contenido adecuado para gente de...?

H.26: Yo creo que el fragmento...

H.25: Yo lo veo demasiado formal y demasiado...

H.26: Sí, es como la definición matemática que yo pondría después de los, de los ejemplos, que para mí los ejemplos correctos son C y D, y sus respectivos negativos que están por ahí. ¿Vale? Eso es mi idea, de ponerle primero unos ejemplos con una serie determinada y con los resultados de esa serie que intuitivamente se ve que tiende a menos infinito.

H.25: Sí, ésta es superintuitiva.

H.26: La C, la D es igual de intuitiva que la, o sea la D es igual de intuitiva que la C pero gráficamente.

H.25: Que la metería con la J.

H.26: Sí, con la J, que es más o menos igual.

H.25: Pero no hemos dicho que primero, pero vamos a tachar por si creemos alguno que no, que...

H.26: Es que yo los demás los tachaba ya todos; por eso te estoy diciendo los que sí.

H.27: Hombre, yo pondría primero el B porque hace la operación fácil, también.

H.26: También. Es más, como tú dices, B, C y D, y después la definición.

H.27: Y ya está.

H.25: Éste como decís, éste el final.

H.26: Sí, el A como el final: ya una vez que has entendido que tiende a infinito, y ya después B, C y D, en el orden no sé ya exactamente qué orden.

H.25: Oye, una pregunta, ¿y el E?

H.26: Yo lo quitaba.

H.25: Pero es una forma también gráfica de ver lo que son los...

H.26: Pero estás metiendo ahí, es que estás metiendo más variables ahí, que si H , v , no sé qué no sé cuánto, al final... déjalo para...

H.25: ¿Y en el F? yo lo veo una definición demasiado, no sé...

H.26: Mete cuerpo ordenado, hay más...

H.25: Sí.

H.26: Álgebra de por medio.

H.25: Yo, para mí personalmente, el F lo quitaba de concepto.

H.26: Ya, complicado, complicado.

H.25: Yo, el fragmento F lo quitaba, respecto no creo que tenga un lenguaje ni un... a ver, el G porque hay algunos que son como ejemplos, ¿no?: los podíamos meter en medio.

H.26: El G no está mal de definición después de la A, quizás, porque no deja de ser una definición con la palabra listón qué es un término ahí, como... ¿me entiendes?

H.25: Sí.

H.28: ¿La idea de estos ejemplos es que los niños entiendan que sí?

H.26: Para explicarle qué es una sucesión.

H.25: Tú llegas y tienes que explicarles qué es una sucesión, y tenemos que ordenar un poco los conceptos para saber qué didáctica le...

H.28: Todos estos gráficos no creo que sirvan.

H.27: No.

H.25: No.

H.28: Yo si estoy con esto no entendería nada.

H.25: Yo tampoco.

H.27: Yo quitaba...

H.26: El E tampoco.

H.25: El E y el F los quitamos en contenido, bueno para poder...

H.27: Y si quitamos el E y el F, también quitamos el H, ¿no?

H.26: El H, correcto, yo también lo quitaba.

H.25: El H ese ¿no... por qué?

H.26: Igual que el anterior: mi motivo es porque metes 2 variables más, H y v , que tienes que entenderlas.

H.25: Que yo no las entendía tampoco; bueno, no las entiendo ahora de, de no recuerdo.

H.26: Yo ahora mismo tampoco sé explicarlo.

H.25: Y se supone que tengo los conocimientos previos si yo tuviese que leer esto para entenderlo, es decir con lo que he leído tendría que entender esto, y ahora mismo no entiendo el contenido que hay aquí o habría que ampliar el desarr..., tendría que ampl..., tal vez después.

H.26: A lo mejor le da una vuelta y lo entiende, pero así a primera vista.

H.25: Tal vez después de haber visto la definición, después de todo a lo mejor el H sí se podría meter.

H.26: Claro.

H.25: El H, ampliando conocimientos dependiendo de cómo fuese en el aula ¿no?, a lo mejor dependiendo de cómo fuese el grupo general, digamos que con el otro tienen el concepto de límite, pero si en general todos y comprobando que todos hayan entendido el concepto sí se podría profundizar un poco más a nivel gráfico, que lo veo más, que el F porque el F es más definición, no lo utilizaría; pero el E y el H, si la clase en general si ha entendido el contenido lo suficiente...

H.27: Sí, sí, si es una clase avanzada.

H.25: Sí los metería porque son también gráficos ya metes otros conceptos, no simplemente lo que es numérico y lo otro sino que también metes algo de gráfica, entonces estás utilizando más competencias visuales en el aprendizaje del concepto; pues entonces eso.

H.26: Después el I y el J son los mismos, pero con el límite a menos infinito, que lo hemos visto antes ¿no?

H.27: Sí, uno negativo, otro positivo.

H.26: Entonces claro yo pondría el positivo, en los primeros pondría el positivo/negativo, después nos vamos a otro ejemplo positivo/negativo.

H.27: Claro, sería primero el B, luego el I, luego el D con el J.

H.25: Sí, pues aquí utilizaríamos al principio este orden.

H.27: Y luego el C con el K.

H.26: Por ejemplo.

H.25: Venga, pues vamos a ir escribiendo entonces. Os parece bien y vamos a ir poniendo.

H.27: Y al final el A.

H.26: ¿Empezamos con el...?

H.25: Con los positivos, que son los que...

H.26: Empezamos con el B, ¿no? hemos dicho.

H.25: Sí, que son los que mejor entienden al...

H.26: Después ponemos el I.

H.25: Después ponerlo, voy a ir tachando ¿vale? Después ponemos...

H.26: Sí, positivo/negativo, después, ¿ponemos el C después?

H.25: El I.

H.28: O el D.

H.26: Da igual, no sé.

H.27: ¿El gráfico o el otro?

H.26: ¿Tenéis alguna preferencia por C o D?

H.27: No, yo pondría, si queréis, primero el gráfico.

H.25: Uy, hay un K. Perdonad, el K se me ha olvidado, eh.

H.27: El K es después del C, como es el negativo.

H.26: Exacto.

H.25: ¿El K es negativo?

H.26: D y J.

H.25: Sí, es el mismo ejemplo, pero...

H.25: No. El K, oye el K...

H.27: El K es el mismo ejemplo que el C pero con..., vale es el mismo ejemplo que el C pero cambiado.

H.25: Son muy facilitos.

H.28: Sí. Y luego la K, ¿la ponemos después del C?

H.27: Sí.

H.25: Pero hemos puesto el B y el I, tenemos tiempo...

H.28: Después podemos poner C y K, ¿no?

H.26: C y K.

H.27: Sí.

H.26: Yo pondría C, K.

H.25: K y C, en todo caso, K y C, “pisha” primero el positivo. Primero era el K y luego el C.

H.26: Sí, primero el K y después el C, si seguimos ese orden...

H.25: Primero el K, después el C.

H.26: El D y el J ya lo he puesto yo antes, ¿no?

H.27: ¿D, J, antes de B, I?

H.26: Sí, antes de este ejemplo.

H.27: O sea B, I, D, J, ¿quieres decir?

H.26: Los dos, D y J.

H.25: ¿Lo primero el gráfico?

H.26: Sí.

H.25: Sí, yo también estoy de acuerdo.

H.27: ¿Cómo que dais eso?

H.25: Sí, sí, sí, sí, estoy de acuerdo yo lo he veo, yo lo vería también; yo es que siempre todo lo que me explican gráficamente, bueno personalmente que no sé si para todo el mundo funciona.

H.26: Con ejemplos se ve mejor.

H.27: También hay que ver que los niños sepan representar la función, claro, eso es otra.

H.26: Hombre, supuestamente si está en sucesiones la representación de funciones la han visto ya, creo yo, yo creo que sí, ... *Eje X, Eje Y* abscisas.

H.25: Sí, yo es que lo digo personalmente, todo lo que me explican ...mente algo visual y después ya me empiezan con las letras, lo que es la escritura matemática, sí yo voy, personalmente funciona mejor con los gráficos, después la escritura matemática.

H.26: Por eso ya después de todo lo que hemos visto les metería el A.

H.25: El A.

H.27: Perfecto.

H.26: Y los demás los eliminaría.

H.25: El A.

H.27: Pues...

H.26: Fuera.

H.25: C, D, el A.

H.27: El fragmento...

H.25: El A, y opcionales...

H.27: El G, el E, el F y el H se eliminan.

H.28: ¿Cuáles se eliminan?

H.27: El fragmento G.

H.25: E, F, G se eliminan.

H.27: El E, el F y el H.

H.26: Sí.

H.25: Sí, los eliminaríamos a no ser que no encontrásemos con una clase de...

H.26: No van a llegar todos a un nivel de entendimiento como para ponerle después a lo mejor otros más ejemplos con más, no sé; yo creo que al final si entienden, si entienden esos ejemplos y la definición última que es la formal, yo que creo que ya, que ya van bien.

H.25: Yo es que creo que personalmente primero hay que llegar como a los conceptos que ellos tienen que tener porque obviamente se van a presentar a una selectividad y todo eso pero, a lo mejor si te sobra tiempo, no lo sé, eso lo pregunto ya independientemente de esa actividad, si sobra tiempo en el aula porque tus alumnos vayan... yo es que trataría estos otros temas transversales que hemos estado aquí o haría otro tipo de debate o propondría otro tipo de actividades, no el hecho de lo que hemos hecho muchas veces, es decir, pues si estoy aquí pues más todavía, pues más todavía; a lo mejor si no necesitan nada puntualmente un alumno que pueda decir –mira, yo quiero hacer más cosas de estas-, si a él se lo das puntualmente pero a lo mejor es más interesante el no forzarlos al máximo en conceptos curriculares así que, de la matemática, y tratar -podemos hacer una actividad de otra cosa-.

H.26: Yo es que el fragmento, el fragmento E al final, lo que sí te puede servir es para tener una demostración.

H.27: Me va a costar preparar las oposiciones, me voy a tener que meter un repaso...

H.26: Que el fragmento E lo que si lo puedo ver es como un nivel superior de entendimiento de las matemáticas para hacer una demostración determinada, que te hagan

falta variables aparte pero no para el entendimiento en sí del concepto de sucesión a niveles más bajos; yo creo que con lo que hemos dicho.

H.27: Vale, ya está.

H.25: Sí, porque los otros son...

H.27: Y de niveles de curso, no niveles, ¿cómo lo vemos?

H.25: Ah, perdón.

H.27: Para un 1º de la ESO yo lo veo demasiado, ¿no?

H.26: Sí.

H.25: Esto como, yo, yo lo pondría en 1º de Bachillerato ya, que creo que es cuando ellos; no creo que antes se utilice el límite de sucesiones en 4º de la ESO. Es que siempre también dependerá, pero claro, es que no sé, no sé los contenidos actuales.

H.26: Yo tampoco, lo desconozco, pero...

H.25: También es verdad que si te sobra tiempo en el aula; yo sé que en mi clase por desgracia no se podía hacer porque ... bueno por desgracia porque... o por suerte, no lo sé, que en otros centros educativos cuando yo llegué a la Universidad los profesores sí le habían podido adelantar conceptos y es verdad que llegaron con esa ventaja a nivel de conocimientos a la carrera; pero es que supongo que es tan relativo, si tienes que intentar que tenga unos conocimientos mínimos para que les vayan a servir para la carrera que vayan a hacer, para todos.

H.27: Sí.

H.25: ¿Pero después te lo enmarca? Si por lo que sea en el aula hay gente que, lo que tú decías antes pues no es que sea más tonta ni más lista, sino que pues Matemáticas llega hasta ciertos límites, tampoco hay que agobiar la gente o abrumarla por querer que estén más preparados o lo que sea.

H.26: Yo un nivel así de la ESO y Bachillerato, con que entiendan el término sucesión y que vean...

H.25: Que sepan representarlo gráficamente.

H.26: El término a_n , un término general, y que no se asusten, y que sepan digamos hacer esa tabla en su cabeza, esta tabla de por ejemplo el fragmento C, la sepan hacer en su cabeza con el término general, yo lo veo ya bien.

H.25: Que mentalmente sepan también cómo se hace su representación; yo creo que es una...

H.26: Es la base para entender todo lo que le expliquen de sucesiones.

H.25: Sí, para dar, pues ponerse a hacer en la carrera ya dependiendo de la que elija, necesitará la demostración matemática o no de...

H.26: O no, exacto.

H.25: Que hay muchas cosas que enseñar en matemáticas mientras que enseñas matemáticas.

H.26: Dificultades que su futuro alumno y, para terminar, y para concluir un resumen de bueno del orden que hemos seguido de los fragmentos: en primer lugar hemos elegido el B y después el I, que son los ejemplos similares ¿no? respecto...

H.25: Sí, la posición de...

H.26: Respecto a lo mismo, positivo y negativo; después los ejemplos D y J, también similares positivo y negativo; después los ejemplos K y C y, por último, la definición formal A.

H.25: Discrepo, se empiezan con los conceptos gráficos de lo que es el concepto de límite, que son el D y el J.

H.26: Ah, pues yo he empezado por el B y el I.

H.25: El D, el positivo, y el J; después continuamos con lo que es ya la, lo que sería en letra por así decirlo, y le presentamos lo que es para que vean la representación gráfica, bueno gráfica, en letra, que es el $a_n = n^2$.

H.26: Venga, pues empieza, empieza.

H.25: No.

H.26: Empieza.

H.27: Es que lo habíamos grabado como antes, como hemos dicho.

H.26: Sí, ¿no?, yo, lo habías apuntado como yo, ¿no?

H.27: Sí, y yo lo he dicho también en mitad del vídeo, como él lo ha dicho.

H.26: Me estás liando tía; no, si es que...

H.25: Pues vamos a volver a... con eso.

H.26: Yo estoy de acuerdo contigo y con lo que he dicho, con las dos cosas, a ver creo...

H.27: Claro, pero yo tenía el B y el I al principio.

H.28: B, I.

H.26: Claro, yo lo que creo es que realmente los fragmentos B, C y D, con sus respectivos negativos deben ir seguidos y ya después digamos, vemos cómo lo han asimilado los chicos, pero creo que con esos tres fragmentos da un poco igual el orden, me refiero, porque deben ir seguidos y ya después le metemos la definición formal A.

H.25: Sí, sí, sí.

H.26: Antes o después, pero...

H.25: Lo de la definición formal A lo veo perfecto, lo que pasa que todavía no sé cómo le introduciríamos estos tres; éste es el más fácil, ¿qué creéis vosotros? más fácil me refiero de concepto inicial.

H.28: Yo primero he puesto B, I, y después K y C, y gráficos, ninguno, más.

H.25: ¿Sí?

H.28: Yo creo que K y C: K porque es positivo, y C como negativo, porque los niños entienden mejor.

H.25: B, K y C, D, J.

H.26: Yo pondría lo que queráis. Esos tres ejemplos no sé.

H.28: El J y después A.

H.25: Ah, vale, perfecto, ya está. No sé si puede ser también porque antes de la, en la representación ya habla de sucesiones a_n , n^2 , son un poco más complejas que lo que el primer concepto, por ejemplo, en B.

H.26: Y aquí además ves la sucesión, en el B, la ven digamos desarrollada.

H.25: Que para esto está.

H.27: Sustituir por n y ya le sale lo que es esa n , lo ven fácil.

H.25: Sí, tal vez sea sí, estoy de acuerdo con vosotros.

H.27: El más fácil para mí es la B.

H.26: Sí, puede ser.

H.25: Sí, sí, sí.

H.27: Porque salen ya el número rápido.

H.25: Y además que lo ves aquí lo que te tiene que salir de...

H.26: Y ya en la D, la verdad que ven un término general de una sucesión y ya está si, si han visto antes no se asustan; además de hay n en el numerador, hay n en el denominador; así no se asustan.

H.27: Pero eso siempre es para $n \geq 2$, ¿no? porque ese = 1, lo empiezan en 2, ¿no?

H.25: Sí.

H.26: Pero empiezan 1, empiezan 1, $1 - 3 - 1$, y -1 , en negativo.

H.27: Si quiero que me salga positivo es para $n \geq 2$, y si quiero que salga negativo ya para los demás.

H.26: Exacto.

H.25: Sí, pero esa es la acotación del límite, de donde tú quieras, si lo hace desde, como si quieres ponerlo en negativo, esto haría así ahora, ¿verdad?

H.26: Sí; al final esto lo que es que no sé si lo habéis visto, si el límite del numerador, o sea si el grado del numerador es más grande que el denominador da igual todo lo demás, va a tender a infinito; como en el fragmento D es n^2 y aquí es n , da igual lo que tenga por detrás que va a tender a infinito; si el grado llegado del numerador y del denominador es el mismo pues los términos que lo multiplica, se divide, no sé si os acordáis de eso.

H.27: Eso es lo que significa, ahora que recuerdo el -3 quiere decir que son 3 para abajo en la abscisa...

H.25: Sí con $n =$, $n = 0$, donde tienes que empezar, sí bueno, el punto origen con ... bueno.

Fase inducida

H.25: Es que yo considero que todos tienen algo de formal, ¿no? porque tienen...

H.27: No, esto es práctico.

H.26: No, hombre, yo, yo, para mí es más práctico; entonces c-i.i.

H.25: Sí en el B, c-i.i.

H.26: Ahí estamos.

H.25: Que sería el práctico lo mismo que en el fragmento C; bueno, pero como es menos infinito utilizaríamos d-i.i. para C.

H.26: Exacto.

H.25: D-i.i., vamos porque es aplicación práctica ya, vamos es con el ejemplo, ¿creéis que es más intuitivo?, ¿sí verdad? porque con el ejemplo y la tabla que pone le ayuda; es que yo ¿éste lo ves intuitivo?

H.26: Totalmente.

H.25: Por esto, la parte de la sucesión que te muestra antes 1, 4.

H.26: Y, además, el término avanzar no es una cosa muy formal.

H.25: Ya estamos hablando de formalidad/informalidad.

H.26: Digo donde estoy ... Éste es el segundo, ¿no? c-i.i. ¿no?

H.25: Sí; dijo que teníamos que definir.

H.27: Perdona. Mónica, ¿tenemos que marcar aquí los que hemos dicho que sí antes y los que hemos descartado?

Mónica: No, no, simplemente el fenómeno.

H.25: El fenómeno, vale.

H.26: Pero, ¿y los que hemos descartado?

Mónica: De los descartados también.

H.27: Ah, vale, vale.

H.25: Vale.

H.26: Vale.

H.25: Decían en las instrucciones de grabación que además de decirlo entre nosotros que dijéramos la letra que estamos marcando cuando vayamos haciendo las conclusiones para que los tengan aquí.

H.27: Vale.

H.25: Por ejemplo, hemos dicho ahora d-i.i., pues en el C consideramos que intuitivo menos porque tiene una gráfica, por el tipo de lenguaje que hemos utilizado antes, ¿vale? ... lo digo para...

H.26: Vale.

H.25: En el D.

H.27: Vamos por el D.

H.26: En el D yo he puesto c-i.i., claramente.

H.25: Sí, porque vamos, no.

H.26: Crecimiento intuitivo.

H.25: Sí, bien porque formal no está dando así una definición en una aplicación práctica. En el E, que lo descartamos antes, de todas formas, una vez que tiene el conocimiento creo que sería intuitivo, fíjate tú lo que yo diría.

H.27: ¿Crees que es formal?

H.26: Yo creo que la última definición hace que sea formal, cuando ya te dice que es el que se queda con la, éste no era...

H.25: Es que en realidad para mí es un desarrollo, no es ni intuitivo ni formal, es un desarrollo práctico de los conocimientos ya asentados, no sé; sería como ninguno de ellos.

H.27: Es más intuitivo.

H.25: Por eso si tengo que señalar algo, sería más intuitivo porque sería intuición basado en que ya te han dado un conocimiento formal, pero en intuición.

H.26: Entonces el E, creciente intuitivo.

H.25: Formal.

H.28: ¿Está grabando?

H.27: Sí. Ambos están [haciendo referente a los dos dispositivos de grabación].

H.25: En el F, formal, y en el G...

H.26: En el G yo pondría intuitivo, crecimiento.

H.25: ¿Pero igual que hemos dicho antes en el E.

H.27: Éste es formal, el G.

H.25: Sí, es más formal, lo que pasa que...

H.26: El G yo no lo veo formal, te está poniendo ¿no?, te está poniendo un ejemplo numérico que te dice el listón como término no muy formal ¿no?, como más para que lo entiendas...

H.27: No sé.

H.25: Lo que pasa que tienen es que, es que es tan, como no es tan adecuado, desde mi punto de vista no es tan adecuado porque el lenguaje que utiliza ya no es un lenguaje de, a lo mejor para gente de Bachillerato tienen que tener, asentar el concepto de lo que va a ser n , de lo que es K ¿sabes?; como que, sí es intuitivo porque es un ejemplo para que te entienda el concepto, pero tienes que tener también los conceptos previos: tú le dices esa definición a alguien.

H.26: Pero te lo está explicando.

H.25: Sí, sí, sí.

H.26: Por lo alto que sea el listón se pueden encontrar términos que lo superen.

H.25: Para el caso es éste.

H.26: Yo también.

H.25: Ese no para los niveles que estamos dando.

H.26: Ya.

H.25: Es decir, sería intuitivo creciente, creo que lo ha llamado antes, ya no me acuerdo; crecimiento intuitivo ilimitado.

H.28: ¿Qué pones? ¿Intuitivo?

H.26: Sí, yo he puesto el G, vamos yo he puesto ese, cada uno que ponga...

H.25: ¿Por qué consideras que no?

H.26: ¿Y el H?

H.25: No, pero puedes poner, es decir si ellos valoran que tengamos diferencia de opiniones, no hay que ponerlo en el grupo. Puedes considerar ninguno de ellos si lo ves formal por el tipo de lenguaje que a ti te resulta más formal; no sé.

H.26: El H ¿más formal lo veis o no?

H.25: Yo no.

H.26: Nada.

H.25: Vamos a ver formal: el lenguaje utilizado es muy formal, muy matemático, pero para mí es un...

H.27: Entonces, ¿qué habéis dicho al final?

H.25: Es un ejemplo práctico.

H.26: Crecimiento, crecimiento intuitivo; el otro dudo, el H dudo, yo, ¿se pueden dejar blanco también?

H.25: Y puedes poner los dos.

H.28: O ninguno de ellos.

H.26: Yo voy a poner ninguno de ellos; ¿se puede ser individual, esto? hemos dicho.

H.25, H.28: Sí.

H.26: Yo, ninguno se ellos.

H.25: Lo único que quieren saber es porqué, porqué ninguno de ellos, ¿por qué lo consideras práctico?

H.26: El H. Por un lado, hay un ejemplo numérico que es para ayudarte intuitivamente a comprender un límite infinito, pero por otro lado está metiéndote la definición del término n depende de H con la raíz de H , la parte entera de la raíz de H , no sé. Me quedo un poco formal de todo eso, esa expresión es un poco formal.

H.25: Sí, por eso yo pongo los dos.

H.28: Yo he puesto formal.

H.27: Formal, ¿o los dos?

H.25: Para mí es dos, sí, ¿pueden ser los dos a la vez?; es decir, te intentan explicar una forma de, a ver un fenómeno formal de manera intuitiva.

H.26: Ya, no sé, que voy a hablar por hablar.

H.25: Es que no sé si se puede, que paso.

H.26: El I, el I está claro.

H.27: Esto está confundido, esto sería $H = 10$, ¿no?

H.28: O $H = 9$.

H.25: Pero es que H tiene que ser, ah no sí, puede ser $H = 0$. No, pero es por esto porque...

H.27: Dice que cuando H es 9, v es 3, y cuando H es 10, v es 3, ¿no? y $n = 4$.

H.26: No sé, mira, parece ser.

H.25: Bueno, muy intuitivo no será cuando estamos liados.

H.26: Sí, yo no, esa explicación no la entiendo muy bien.

H.25: A lo mejor va a ser ninguno de ellos.

H.26: Éste es decreciente intuitivo, el I.

H.25: Entonces el H.

H.26: Éste es decreciente intuitivo.

H.25: El I y el J por los mismos motivos que los sientes, intuitivo.

H.27: Y el último, creciente.

H.26: Creciente intuitivo, ¿no?

H.27: Y el G, ¿qué hemos dicho al final?

H.25: Me falta un decreciente intuitivo.

H.26: ¿El G?

H.27: El H.

H.26: El H hemos puesto diferente: algunos han puesto formal e intuitivo, y yo he puesto ninguno de ellos.

H.25: No, yo... yo no me he retractado de mi pensamiento porque tampoco entiendo porque el H empieza en... pero a lo mejor es falta de conocimiento formal de género, ¿sabes?

H.26: Es falta de entender... lo que están diciendo.

H.25: Ahora decía que si hemos elegido, ¿si seguiríamos eligiendo los mismos para la clase? Yo creo que sí, ¿no?

H.26: Yo creo que sí.

H.27: Porque hemos elegido los más prácticos y al final la definición formal, ¿no?

H.26: Sí, ¿eso hay que apuntarlo en algún lado o solo decirlo?

H.25, H.27: No.

H.25: Sí.

H.27: Sí, solo decirlo.

H.26: Vale, yo, yo también; yo creo que primero los ejemplos y después la definición formal, además la que han explicado que han utilizado, o sea que yo... lo dejaría igual; ¿tú lo dejarías igual? sí, vale; ¿y tú lo dejarías igual, H.28? La secuenciación...

H.25: Sí.

H.26: ... que hemos hecho, ¿dejarías el mismo orden que hemos puesto?

H.25: Sí.

H.26: Sí, ¿no?

H.27: Pues ya está.

H.25: Y más o menos decía, aunque no los hemos llamado fenómeno intuitivo y fenómeno formal si lo habíamos dicho con otras palabras en plan de la definición, en vez de formal habíamos dicho la definición al final y empezar por el ejemplo que sería el intuitivo.

H.27: Sí, lo hemos dicho bien.

H.25: Corroboramos nuestros pensamientos.

A3.4. Informes grupales

En este subapartado de los anexos del *Capítulo 6* se encuentran los informes de cada uno de los grupos de la muestra, a excepción del Grupo A que ya fue presentado en el apartado 6.3.1.

En cada uno de estos informes se encuentra la descripción del grupo, las unidades de información de las que constó el debate, la interpretación de sus comentarios, las tablas de distribución que han servido para recoger y ordenar las categorías y sistemas de representación, el desarrollo e interpretación de los resultados, la componente visual y la componente numérica, dando lugar finalmente al perfil fenomenológico del grupo.

A3.4.1. Informe. Grupo B

Descripción.

El grupo B está formado por 4 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad Complutense de Madrid. La sesión se produjo el 16 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 18.00. El primer debate tuvo una duración de 33 minutos y 42 segundos, mientras que el segundo duró 10 minutos y 9 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue tediosa, ya que el tono de voz de dos de los participantes era muy similar, además de producirse ideas inacabadas por la participación simultánea de otros miembros del grupo.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,39]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,40-03,04]. Realización de comentarios genéricos acerca del curso en el que debería aparecer el fragmento A, que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico.

U-3: [03,05-05,12]. Los alumnos buscan las dificultades e hipotetizan sobre el curso donde deben aparecer uno de los fragmentos del cuestionario, el que corresponde a un enfoque intuitivo y se encuentra en el sistema de representación verbal.

U-4: [05,13-05,33]. El grupo retoma un fragmento anterior al darse cuenta de posibles dificultades que anteriormente no se habían considerado.

U-5: [05,34-08,52]. El grupo analiza diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, pero donde no se profundiza en la noción, ni tampoco en las posibles dificultades que pudiesen surgir en el aula, surgiendo únicamente comentarios superficiales.

U-6: [08,53-10,27]. El grupo comienza a conversar sobre temas ajenos al cuestionario en curso, como por ejemplo el comienzo del uso de l'Hôpital o el curso de inicio de las derivadas.

U-7: [10,28-11,44]. Realización de comentarios genéricos acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, en diferentes sistemas de representación.

U-8: [11,45-14,36]. El grupo toma el rol de alumno en lugar de futuro profesor, intentando comprender el fragmento E, que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario.

U-9: [14,37-16,26]. El grupo analiza un fragmento de enfoque formal, y focaliza su análisis en uno de los términos que aparecen: cuerpo.

U-10: [16,27-24,46]. El grupo debate acerca de los fragmentos que tienen un enfoque formal mostrando su rechazo en el aula.

U-11: [24,47-29,27]. El grupo realiza comentarios en los que establece la relación existente de los fragmentos de enfoque intuitivo que tienden a más infinito, con sus correspondientes que tienden a menos infinito.

U-12: [29,28-33,42]. Realización, de forma conjunta, del orden de los fragmentos que establecerían en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

Fase III: Inducida

U-13: [00,00-10,09] El grupo, en el rol de alumno, en lugar de profesor, identifica cada uno de los fragmentos, sin mencionar su utilización en el aula, salvo para fragmentos aislados.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.3. Fase espontánea. Grupo B.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-2	B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.	C2I. s-d (A)	U
	B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo ... en Bachiller.	Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	
	B.05: O sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así– se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...		
	B.07: Yo creo que en 2º de Bachillerato.		
	B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato.		
	B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.		

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-3	B.05: Pues sí, yo lo pondría en 4º. B.06: Sí, yo creo que 4º. Sí, éste en 4º de la ESO, yo creo.	C2C. v-e (B) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	U
U-3	B.06: Que la n de la izquierda es igual que la de la derecha. Que el subíndice no lo consideran igual que el esto... para entender el a_n , te debería decir a_1 , igual $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.	C3C. v-e (B) El alumno identifica una dificultad en la relación existente entre la variable independiente y la dependiente.	U
U-5	B.05: El B está bien para darles una idea de lo que es tender a infinito.	C1C. v-e (B) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-5	B.05: Pero vamos, pero que después de ver los positivos, poner los negativos, y esto es bastante fácil, yo lo pondría también en 4º de la ESO o así.	C2D. t-e (C) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación tabular.	U
U-8	B.05: Yo este, no, no, no, es que yo éste pondría directamente en ningún curso, me parece superlioso, que no aclara nada.	C1I. g-e (E) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-8	B.07: Éste es adidáctico.	C1I. g-e (E) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-9	B.06: Es que lo de un cuerpo, lo del cuerpo yo es que sí que no lo vi, vamos hasta... Hasta la facultad yo no vi nada de cuerpo.	C3I. v-d (F) El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-9	B.05: Es como formal, que te va a costar un montón. B.08: Pondría “no”. B.05: Yo tampoco lo pondría.	C1I. v-d (F) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-e), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU
U-10	B.05: Que además en el F el concepto de cuerpo es muy abstracto. B.06: Y además cuerpo ordenado.	C3I. v-d (F) Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-10	B.07: Con el listón me parece bien porque me parece como gráfico.	C1I. v-e (G) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-10	B.05: O directamente saltar, saltarte eso, es decir si fijamos un valor muy alto, por ejemplo K encontramos este término de la sucesión, que no sé cuál es, que lo verifica, no sé. Bueno, éste ¿en qué curso lo pondrían? Esto ya más adelante.	C3*I. v-e (G) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo y lo acepta para su impartición en el aula.	U
U-10	B.06: Esto 1º o 2º de Bachiller. B.05: Sí, 1º o 2º, sí.	C2I. v-e (G) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación gráfico.	U
U-10	B.06: Es complicar el concepto de todo; o sea, tú le explicas esto y huyen, salen corriendo. Pero luego puede tener una explicación más normal, no está enrevesación, no sé.	C1I. t-e (H) El alumno realiza dos comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-11	B.05: Pero éste está bien. Entonces, vale más o menos 4º de la ESO.	C2D. v-e (I) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-11	B.05: Vale puede ser. Bueno, pues nada, lo dicho, está bien para ver el caso menos infinito.	C1D. v-e (I) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno d-i.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-11	B.06: La tabla es más explicativa; tú aquí ves ¿cuánto vale n ?, no sé qué, sustituyes.	C1C. t-e (K) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-12	B.07: El B primero. Después el I que es el mismo, pero con un signo negativo delante; después el K, que es el que acabamos de ver de la tabla.	C1CD. v-e y t-e (B, I y K) El alumno realiza un comentario genérico, acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación.	U
U-12	B.05: Yo pondría igual el B y el K juntos, y después los negativos B.06: Yo también.	C1CD. SR (B, K, I y C) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación, aunque sin especificarlos.	U
U-12	B.06: Claro, yo más que nada para que entiendan, pondría esto, le doy la sucesión y le diría que es esto, porque hay gente que ya sabe qué son exponenciales, que se den cuenta de que éste es el 1^2 , éste el 2^2 , éste es el 3. B.07: Es que es verdad que en la tabla viene muy bien. B.06: Por eso lo digo porque esto es más intuitivo, porque en cuanto lo ven, siempre, o sea hay alguien sabe que es el cuadrado de no sé qué, pues pon el numerito, poned un numerito, 1, 1^2 , 2, 2^2 .	C1C. t-e (K) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e), aceptando su utilización en el aula.	U
U-12	B.06: El A, ponlo a modo de visualización, un poco para que vean, mira, esto es matemáticas. Se ve que es una expresión formal.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que acepta su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-12	B.05: Después poner algún ejemplo, o igual retocar los fragmentos de éstos para que lo entiendan, o yo que sé, por lo menos que los más avanzados lo entiendan.	C2I. s-d (A) La alumna hipotetiza sobre el tiempo de alumnado al que dirigiría un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-12	B.06: Yo es que el H ni lo ponía, es que lo borraba de la hoja. B.07: Hemos dicho que no lo ponemos, porque H y v le complica la vida a los chavales. B.06: Lo del H si alguien no le complica, que me lo diga. B.07: Es un sinsentido. B.06: No, pero es que no lo haya visto, es que es un lío de todo.	C1I. t-e (H) Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), rechazando su utilización en el aula.	NU

Tabla A.4. Fase inducida. Grupo B.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U/NU
U-13	B.06: Yo creo que es igual que antes ¿no?, un poco avanzado para alumnos de Bachiller. B.07: Decía que hacía falta conocimiento avanzado de mates. B.06: Con conocimiento avanzado, pensamiento matemático avanzado	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-13	B.07: Porque es diferente, a los demás, pero vamos, es una gran bazofia éste. B.05: Difícil ponerlo. B.06: Es muy antiexplicativo, o expositivo vaya... tú lo puedes usar, pero... B.05: Yo seguiría sin ponerlo.	C1I. v-d (F) Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-d), rechazando su utilización en el aula.	NU
U-13	B.05: Yo este ejemplo no sé si es de ida y vuelta o es otra cosa, porque realmente si ahora vuelvo a hacer esto, o sea vamos a ver, cojo el K , del K voy al n , del n vuelvo a otro K . Ahora cojo este otro K , puedo coger otro K , y así.	C3*I. v-e (G) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.5. Distribución de los comentarios. Grupo B. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 3, 1				(1, 1, 1, 0)
Tabular	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 1, 1, 0)

Tabla A.6. Distribución de los comentarios. Grupo B. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 1				(1, 1, 0, 0)
Tabular	2				(0, 1, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 2, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 0, 0)

Tabla A.7. Distribución de los comentarios. Grupo B. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 0, 0, 0)

Tabla A.8. Distribución de los comentarios. Grupo B. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 3*, 2	3, 1, 3	3*	1	(3, 1, 2, 2)
Tabular		1, 1			(2, 0, 0, 0)
Gráfico		1, 1			(2, 0, 0, 0)
Simbólico	2, 1, 2			2	(1, 3, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 3, 0, 1)	(5, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 1)	(1, 1, 0, 0)	(8, 4, 2, 2)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (16), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (5), d-i.i. (3) e intuitivos (3).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a realizar ningún comentario de rechazo.
 - El alumnado rechaza el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal, y cuando los aceptan predominan los comentarios en los que se especifica el nivel educativo o el tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Se producen de forma predominante, c-i.i. (3), d-i.i. (1), intuitivos (3) e i.v.s.i. (8).
 - C2: El alumnado realiza este tipo de comentarios habitualmente para aceptar el fragmento.
 - C3: Este tipo de comentarios, en los que se identifican dificultades, solo se producen para c-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - C3*: El alumnado de este grupo solo identifica el fenómeno i.v.s.i. (2).
- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 14 ocasiones.
 - T: Se realizan comentarios de aceptación para el enfoque intuitivo y de rechazo para el enfoque formal.
 - G: Solo se producen comentarios, y de rechazo, para i.v.s.i.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (4) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.9. Componente visual. Grupo B.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C	✓				
		C2C	✓				
		C1C	✓		✓✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D	✓		✓		
		C1D	✓				
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD	✓		✓		✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓ <input checked="" type="checkbox"/>				
		C3I	××				
		C2I	✓			✓✓(×)	
		C1I	✓×(×)	××	××	✓	

Componente numérico-vectorial

Tabla A.10. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo B.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	0	0	0

Tabla A.11. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo B.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.12. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo B.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.13. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo B.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
11	0	0	0

Tabla A.14. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo B.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	7	1	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 11 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (22, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 6 + 1, 2 \cdot 7 + 2) = (13, 16)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.4.2. Informe. Grupo C

Descripción.

El grupo C está formado por 3 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad Complutense de Madrid. La titulación de acceso a dicho Máster fue el Grado o Licenciatura de Matemáticas en el caso de todos ellos.

La sesión se produjo el 16 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 18.00. El primer debate tuvo una duración de 13 minutos y 16 segundos, mientras que el segundo duró 19 minutos y 41 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue cómoda por la claridad en el tono de voz de cada uno de los componentes del grupo y el no solapamiento entre ellos, respetando las opiniones del resto.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,00]. Este grupo no realiza presentación, ya que todos los miembros decidieron decir su nombre inmediatamente después de finalizar su primer comentario.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,01-03,14]. Se establece un diálogo acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo con comentarios genéricos.

U-3: [03,15-04,59]. El grupo debate sobre la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal, especificando en algunos casos el nivel de la clase o el curso de impartición.

U-4: [05,00-06,00]. El grupo conversa acerca de un tema ajeno al cuestionario, como es la equivalencia entre 4º ESO y 2º BUP, y el curso de impartición de las derivadas.

U-5: [06,01-10,22]. Los componentes del grupo conversan sobre el curso de adecuación o no de cada uno de los fragmentos del cuestionario, tanto intuitivos como formales.

U-6: [10,23-13,16]. El grupo establece el orden en el que llevarían a cabo los fragmentos en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

Fase III: Inducida

U-7: [00,00-06,50]. El grupo identifica el fenómeno que subyace en cada uno de los fragmentos desde una perspectiva de alumno, en lugar de futuro docente.

U-8: [06,51-07,40]. El grupo retoma el rol de futuro docente y debate sobre la adecuación o no de uno de los fragmentos del cuestionario que tiene un enfoque formal.

U-9: [07,41-12,59]. Los miembros del grupo retoman el rol de alumno intentando identificar el fenómeno que se encuentra en cada uno de los fragmentos.

U-10: [13,00-14,22]. El grupo conversa sobre el orden de los fragmentos en una hipotética secuenciación didáctica en su futura labor docente.

U-11: [14,23-17,20]. El grupo debate sobre la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal, estableciendo el curso de impartición y posibles dificultades existentes.

U-12: [17,21-18,28]. El grupo intercambia comentarios que se “alejan” del debate del cuestionario, recordando el contenido matemático de las nociones de cuerpo, anillo y dominio de integridad.

U-13: [18,29-19,41]. El grupo retoma el debate sobre la adecuación o no de los fragmentos que componen el cuestionario.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.15. Fase espontánea. Grupo C.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	C.10: La primera definición que daría sería la del fragmento B.	C1C. v-e (B) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.	U
	C.09: Coincido contigo. Yo creo que, partiendo de una idea intuitiva, o con un ejemplo más concreto, así más numérico al principio, los chicos, los estudiantes se pueden dar cuenta de que, viendo un poco la evolución de los términos, de los primeros términos, se puede generalizar, entre comillas, a la definición de que esa sucesión tiende a infinito.		

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	C.11: La sucesión ya es más complicada, yo empezaría con sucesiones más sencillas.	C1C. g-e (D) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-2	C.09: El menos infinito, pues a lo mejor no es mala idea, para que, digamos introducir ese concepto inicial de infinito y luego ...	C1D. g-e (J) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno d-i.i. (g-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-2	C.10: Yo pondría el K, el K luego C.09: Sí, coincido con C.10.	C1C. t-e (K) Los alumnos conversan realizando comentarios genéricos sobre un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e) afirmando su utilización en el aula.	U
U-3	C.11: ¿A ninguno nos gustan las tablas estas demasiadas complicadas? Nos referimos al H y al E, ¿nos parecen? A mí es que da un poco hasta de ... C.09: Es un grado de abstracción que a lo mejor no deberían, a lo mejor ni presentarse. C.11: A mí me gusta ese nivel de abstracción, lo que no me gusta tanto es el nivel de concreción y las tablas que me dan muchísima pereza, hasta leerlas.	C3I. t-e (H) Los alumnos identifican una dificultad en la abstracción y concreción de las tablas presentadas	NU
U-3	C.09: A y F en un nivel superior, como los penúltimos, el A que es la definición y el F como una ...	C1I. SR (A y F) El alumno realiza un comentario genérico, acerca de dos fragmentos que contiene el fenómeno i.v.s.i., en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-3	C.09: A, mejor no es una forma digamos correcta de presentarlos, pero a nivel educativo, a nivel de que los chicos lo entiendan creo que puede ser más beneficioso para ellos, para que entiendan mejor que no siempre de casos concretos, y luego dar la generalización correspondiente al concepto.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	C.11: Estoy de acuerdo, también obviamente depende del nivel de la clase. C.09: Exactamente, por ejemplo, en nivel de 4º de la ESO yo ni siquiera daría límites, porque yo no los di, das la idea intuitiva.	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-5	C.09: Yo era, establecer a lo mejor los niveles, los niveles educativos, pues hasta aquí llegaríamos en 4º, yo sinceramente en 4º C.10: Yo el F no lo vería en la ESO, ¿no?, o en Bachillerato tampoco.	C2I. v-d (F) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU
U-5	C.10: Yo introducir el concepto de cuerpo... C.11: Pero es que ... La definición de cuerpo...	C3I. v-d (F) Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-5	C.09: B, I, D y J sí se pueden presentar, a lo mejor, en un curso de 4º de la ESO para que tengan esa idea intuitiva. Digamos que en 4º si eso, por, ya introducirles un poco, abrirles las puertas al concepto de límite, yo daría el B, el I, el D y el J, es decir, los que son más esclarecedores, más intuitivos, con ejemplos concreto.	C2CD. SR (B, I, D y J) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentran en distintos sistemas de representación.	U
U-5	C.09: Pero eso no se lo puedes poner a un chico de 4º, yo creo que no tiene todavía ...	C2I. SR (A y F) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal.	NU
U-5	C.09: Incluso los fragmentos de tablas, los K y el C, que son los de tablas, esos también se pueden dar en la ESO, en 4º de la ESO, pero más allá de la definición, es que no la van, la pueden entender. El tema de la definición, que las tablas a lo mejor sí se presentan porque eso sí que lo entienden por qué, al fin y al cabo.	C2CD. t-e (C y K) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	C.09: Sucesiones y ecuaciones, particularizar casos, manejar las variables, etcétera, eso sí que están más acostumbrados pero ya saltar de ese nivel, digamos, a un nivel más abstracto, desde mi punto de vista, en 4º de la ESO, no, ya en 1º de Bachillerato se podría dar perfectamente la definición que es el A, el A, y que más tenemos por aquí, el A, y el A y ya en 2º si me apuras, pero vamos yo es que ni lo daría.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU
U-5	C.09: Ni el H, ni el E ni el F los presentaría en Bachillerato más que nada debido a que en Bachillerato se les está preparando para que realicen la prueba de la EvAU, entonces pues no, no sé si es apropiado por temporización de las asignaturas o por falta de tiempo. Los de sociales, los de Bachillerato de Ciencias, aplicadas sociales, ven límites super, supersencillos, y vamos, le pones algo de esto y te dicen no, no, yo soy de letras, bueno de letras, las mates no, a mí lo esencial para aprobarlo.	C2I. SR (E, F y H) El alumno hipotetiza sobre el curso e itinerario formativo de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en diferentes sistemas de representación.	NU
U-6	C.09: Directamente creemos que la F no se presentaría ni siquiera en Bachillerato.	C2I. v-d (F) El alumno realiza un comentario estableciendo el curso de impartición y rechazando la utilización del fragmento donde se identifica el fenómeno i.v.s.i. en el sistema de representación verbal y formato definición.	NU

Tabla A.16. Fase inducida. Grupo C.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	C.09: Digamos que como que el fenómeno de ida y vuelta parte de esa definición, ¿no? ... porque es, cogemos el M , bueno, también puede ser de ida y vuelta, tomas el, pillas el n_0 vas pa' acá y ya luego vuelves para atrás.	C3*I. s-d (A) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	C.09: Porque a partir de ejemplos concretos y de particularizar unos valores de la sucesión se observa que efectivamente crece pa' abajo, como que crece pa' abajo, que el valor absoluto se va haciendo más grande. El valor absoluto se va haciendo más grande. O que decrece.	C3*D. t-e (C) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno d-i.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U
U-7	C.09: El de ida y vuelta pues se nota coges... Para el 9, el 3, llegas al 3, partes al 4, o sea, coges uno mayor y ¿el n_0 sería el 3?, ¿el n^* sería el 4? Que es más grande que la M que había fijado, prefijado.	C3*I. g-e (E) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-7	C.09: Porque se ve a partir de la representación gráfica esa elección del valor M , bueno, que aquí le llama H , coges el n_0 , partes al siguiente, el superior, el n y vuelves otra vez al a_n , comprobando efectivamente... En el E, comprobando efectivamente que el a_n que has sacado es superior al M tomado, pero lo hace con una particularización de un caso en concreto.	C3*I. g-e (E) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-8	C.10: El F por el hecho del cuerpo, vale, que es el que desecharíamos de Bachillerato.	C3I. v-d (F) El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-8	C.09: No, hemos dicho que a lo mejor se podría dar en 2º de Bachillerato.	C2I. t-e (H) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación tabular.	U
U-8	C.11: Yo he puesto "yo no lo daría", no esclarece. No, a mí no me gusta el H.	C1I. t-e (H) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	C.09: El G ya es uno de los que se introduciría en 1º de Bachillerato antes de la definición para que viesen qué podría ser. Habíamos puesto que a partir del G, Bachillerato.	C2I. t-e (G) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación tabular.	U
U-11	C.09: El fragmento F yo creo que no debería introducirse en 2º de Bachillerato porque aparece el término “cuerpo”, que generalmente pues no se da.	C3I. v-d (F) El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-11	C.09: El fragmento A, yo creo que esa es la, digamos la natural, no la natural sino la que tú tienes ya metida en tu cabeza y cómo que las demás pues dices “buf”, que no digo que sea ni mejor ni peor, pero yo, por ejemplo, no la daría ni en carrera ni en nada.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-11	C.09: E y la H, si hubiese tiempo, en el desarrollo de la clase se podrían introducir en 2º de Bachillerato, siempre hablando de Ciencias, porque consideramos que en Ciencias Sociales ese nivel de abstracción generalmente no lo tienen, o digamos les cuesta más asimilar el lenguaje abstracto.	C2I. SR (E y H) El alumno hipotetiza sobre el curso y el itinerario de formación de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico y tabular.	U
U-11	C.09: Entonces si quisiera el profesor se podría introducir los fragmentos B, I, K, C, D, J en 4º de la ESO, pero vamos...	C2CD. SR (B, I, K, C, D y J) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en distintos sistemas de representación.	U
U-11	C.09: Y luego la G, A sí que se tendrían que dar, por lo menos en Bachillerato de Ciencias.	C2I. SR (G y A) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal.	U
U-11	C.10: Yo la F, no estoy de acuerdo en que, en carrera, en la carrera sí, pero en carrera de la Universidad, me parece. En Universidad sí me hubiera gustado ver la definición esta. A mí me gusta la definición.	C2I. v-d (F) El alumno hipotetiza sobre el no uso hasta cursos universitarios de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categorías. Comentarios	U-NU
U-11 y U-13	C.10: Porque te hace ver cuerpo ordenado. Hace relacionarte más cosas. A mí me gusta por la relación al concepto.	C3I. v-d (F) El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo ordenado, pero indicando que facilita la relación con otras nociones.	U
U-13	C.09: Como somos matemáticos pues sí, nos, todo esto nos apasiona, pero en el ámbito de la didáctica, a nivel educativo para Bachillerato, yo no pondría.	C2I. v-d (F) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.17. Distribución de los comentarios. Grupo C. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico		1			(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 0, 0, 0)

Tabla A.18. Distribución de los comentarios. Grupo C. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular			3*		(0, 0, 0, 1)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)

Tabla A.19. Distribución de los comentarios. Grupo C. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	2				(0, 1, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2		2		(0, 2, 0, 0)
Subtotales	(0, 2, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 3, 0, 0)

Tabla A.20. Distribución de los comentarios. Grupo C. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 2, 2	3	3, 3, 2, 2	(0, 4, 4, 0)
Tabular		3	2, 2	1	(1, 2, 1, 0)
Gráfico				3*, 3*	(0, 0, 0, 2)
Simbólico	2	2, 2	3*	1	(1, 3, 0, 1)
No indica	1	2, 2	2, 2		(1, 4, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(0, 6, 2, 0)	(0, 4, 1, 1)	(2, 2, 2, 2)	(3, 13, 5, 3)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (24), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (3), d-i.i. (2) e intuitivos (3).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.
 - El alumnado rechaza el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal, y en la mayor parte de sus comentarios de aceptación son para un alumnado o nivel particular.
- Categorías
 - C1: Se producen solo para c-i.i. (3).
 - C2: Es la categoría predominante para el fenómeno i.v.s.i. (13).
 - C3: El alumnado solo indica dificultades para el fenómeno de enfoque formal, 5 veces.
 - C3*: El alumnado identifica el fenómeno d-i.i. e i.v.s.i.

- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 9 ocasiones.
 - T: Se producen comentarios de aceptación para los fenómenos intuitivos (3), y la mayor parte de los comentarios de i.v.s.i. se producen en la fase inducida (83).
 - G: Se producen 4 comentarios correspondientes a c-i.i. (1), d-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (6) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.21. Componente visual. Grupo C.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	Sin SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓	×	✓		
	d-i.i.	C3*D			☑		
		C3D					
		C2D					
		C1D		✓			
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD			✓		✓
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I		⊗⊗		☑	
		C3I	×☑⊗⊗		×		
		C2I	××⊗⊗		☑☑	✓××	××☑☑
		C1I			⊗	⊗	✓

Componente numérico-vectorial

Tabla A.22. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo C.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	1	0	0

Tabla A.23. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo C.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	1	0

Tabla A.24. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo C.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	1	0

Tabla A.25. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo C.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	1	2	0

Tabla A.26. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo C.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	8	6	8

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 5 + 2, 2 \cdot 1 + 0) = (12, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 6, 2 \cdot 8 + 8) = (10, 24)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.4.3. Informe. Grupo D

Descripción.

El grupo D está formado por 3 personas, todas ellas alumnas del MFP en la Universidad de Málaga. La sesión se produjo el 27 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 10:30. El primer debate tuvo una duración de 26 minutos y 41 segundos, mientras que el segundo duró 3 minutos y 44 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue relativamente cómoda, ya que el dispositivo con el que fue grabado aportó un buen tono de voz y en raras ocasiones hubo solapamiento entre las voces de las alumnas.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,17]. Presentación de cada una de las componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,18-03,49]. El grupo debate sobre la adecuación o no de un fragmento que tiene un enfoque formal, estableciendo posibles dificultades y el curso en el que debiese impartirse.

U-3: [03,50-14,24]. El grupo debate sobre la adecuación o no de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo. Para ello aportan comentarios genéricos e identifican dificultades.

U-4: [14,25-15,34]. Realización de comentarios ajenos al cuestionario en el que se establece un hipotético orden de la impartición de sucesiones y funciones.

U-5: [15,35-17,30]. El grupo retoma el debate acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.

U-6: [17,31-26,41]. El grupo conversa identificando dificultades y posibles cursos de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque formal.

Fase III: Inducida

U-7: [00,00-03,44]. El grupo toma el rol de alumno, en buena parte del análisis de los fragmentos, identificando cada uno de los fenómenos.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.27. Fase espontánea. Grupo D.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>D.13: Yo no lo veo útil porque es muy formal: primero, los niños no van a entender los símbolos matemáticos, lo de sí y solo si, para todo, y todo eso. Yo, en el primer momento tengo que decir, -vale, voy a ver lo que pone- y estoy muy acostumbrada a leer estas cosas, entonces unos niños que no están acostumbrados en nada a leer esto, no se van a enterar de nada, creo yo.</p> <p>D.14: Yo creo que algo, a lo mejor, formal sí habría que ponerles, a lo mejor no así de esa forma, con los signos matemáticos, pero más bien, más redactado o lo que sea.</p> <p>D.13: Incluir esto está bien pero ya como. Cuando ellos ya están bien familiarizados sobre qué es límite infinito, qué es una sucesión y todo eso, cuando ellos ya lo tienen muy bien asumido, ya decís mira pues ésta es la definición matemática</p> <p>D.12: Entonces antes de dar una definición teórica a unos niños que están empezando a dar límite infinito, lo que yo los ubicaría de una forma un poco más realista usando números de verdad.</p>	C3I. s-d (A) Las alumnas identifican una dificultad en la utilización del sistema de representación simbólico para una definición del límite infinito de una sucesión.	NU
U-2	D.13: Les cuesta un montón, y al fin y al cabo es como una aplicación, pero les cuesta un montón eso, entonces si ya de por sí te cuesta mucho, creo yo, relacionar el natural con el término, ya hablarle de para un natural no sé qué no sé cuánto, es como ¿qué?	C3I. s-d (A) La alumna señala una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.	NU
U-2	D.12: Si queremos, si vemos que dependiendo un poco del nivel pues a lo mejor en Bachiller, sí sería interesante si se explican los límites, dejar algún lugar dentro de las explicaciones para intentar transmitir a los niños que hay una forma matemática formal de explicar lo que es un límite.	C2I. s-d (A) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.12: Creo que éste es un caso un poco más sencillo y justamente, para mí, sería la forma de iniciar la explicación de lo que es un límite a más infinito, vale.	C1C. v-e (B) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	D.13: Me parece, a lo mejor, más útil poner primero el C porque se le ve una tabla, dónde si le das los datos de la sucesión, pero además le dices para qué n , ¿sabes? Que ellos vean cómo va avanzando, claro, pero pueden que digan –porqué salen esos números, ¿sabes?: ¿de dónde sale el 1, el 4, el 9, el 16?	C1CD. t-e (C y K) La alumna realiza un comentario genérico acerca de la impartición en el aula de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación tabular, sin especificar si se trata de más o menos infinito.	U
U-3	D.14: Pero está bien por diferenciar lo que ha dicho ella, que muchos niños se confunden en el n , en el índice con el término, entonces dándoles esta tabla pues pueden. Confunde el valor de la sucesión con el índice. D.12: Que no saben distinguir el valor con el orden, o sea con el término de la sucesión.	C3CD. t-e (C y K) Las alumnas señalan una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.	U
U-3	D.12: El B si lo vemos como un buen punto de partida teniendo en cuenta que tienen que tener unos conocimientos previos en sucesiones y también, lo bueno de éste es que le das primero el ejemplo.	C1C. v-e (B) La alumna realiza un comentario genérico acerca de la impartición en el aula de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y se encuentra en el sistema de representación verbal.	U
U-3	D.12: A mí por lo menos me falta que n pertenece a los números naturales; ya sé que parece una obviedad, pero a lo mejor, a los niños le cuesta lo que tú has dicho antes, relacionar las letras con a qué pertenecen esas letras; entonces n se supone que, cuando está en el ámbito de las matemáticas, siempre es número natural pero aquí no lo pone en el fragmento.	C3C. v-e (B) La alumna señala una dificultad en no establecer que la variable independiente pertenece a los números naturales, indispensable en la diferenciación entre sucesión y función.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.13: ¿Tú sabes lo que pasa? En el I no lo veo yo ... parece como el B y que se pueda entender igual de bien, pero por ejemplo cuando dice, -se pueden tan grandes en valor absoluto pero negativos, como se quiera- yo creo que yo, por ejemplo, sí porque sé de lo que estoy hablando y tal, pero, a lo mejor. Pero no ya solo en valor absoluto, valor absoluto pero negativo, es como, ¿qué?; yo creo que un niño, que no sé. Lo de valor absoluto pero negativo, yo creo que ahí empiezan que si valor absoluto positivo; que a lo mejor es mayormente la forma en la que realmente está escrita, expresado de otra forma, sí, pero no sé yo si, esa forma de expresarlo.	C3D. v-e (I) La alumna argumenta acerca de la dificultad existente en la terminología matemática de valor absoluto, que influye en las sucesiones que tienden a menos infinito.	NU
U-3	D.12: Tiende hacia menos infinito porque puede hacerse tan pequeño como se quiera. Pues sus términos se pueden hacer tan pequeños como se quiera.	C3*D. v-e (I) La alumna identifica el fenómeno d-i.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.	NU
U-3	D.14: Yo este ejemplo no lo veo muy bien, porque al dibujarlo, ahí pones las rayitas estas como para decir que hay ahí un trozo que se pierde, pero por ejemplo en el eje de la x hay una rayita entre el 2 y el 10, y hay otra entre el 10 y el 1 000, como que está diciendo que ahí se pierde, como que está cortando, pero está cortando distintas cantidades; puede ser que a los niños le choque un poco.	C3C. g-e (D) La alumna señala una dificultad en la contracción existente en los ejes.	NU
U-3	D.13: Yo tampoco lo veo útil, había puesto que no lo utilizaría, pero ya no solo, es que ni me había dado cuenta del otro. Sino porque quien en el eje, ¿sabes?; no te dice en ningún momento que el eje, como tú has dicho de la x , realmente aquí ya no es x , es el n , y el eje de la y , por así decirlo, es a l ; entonces, si tú le das esta gráfica al niño, dice -vale, ahora quién es quién, porqué salen estos puntos.	C3C. g-e (D) La alumna señala una dificultad en la relación existente entre la variable independiente n y el Eje de abscisas en la representación gráfica.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	D.13: Yo veo muy bien ver la gráfica; lo que pasa que no utilizaría esto por lo que he dicho: pero si, a lo mejor, estuviera más clara la gráfica, sí; incluso creo que es necesario que ellos también asocien con la gráfica.	C1C. g-e (D) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU
	D.12: Y ya, a partir de ahí, explicar que este límite también en caso de esta sucesión también tendería a infinito puesto que la gráfica siempre es creciente. pone como un umbral o algo así, para cualquier M que pongas hay un n , o sea, hay un valor de límite que puede ser más alto, entonces está claro que tiende a infinito, porque siempre vas a encontrar algo mayor.	C3*C. g-e (D) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo. Dado que en este fragmento se identifica c-i.i. se considera que ha existido una transición.	U
U-6	D.13: Yo el E no lo utilizaría. D.14: Yo el E no lo utilizaría. D.12: Yo tampoco lo utilizaría. D.14: Porque incluso yo he tenido que decir –vale, que me estás... D.13: No te pone en situación de lo que está haciendo; eso primero, y segundo porque incluso yo tengo que poner, cuando he leído ha sido, -vale, qué está haciendo, quién es v , quién es H . D.12: Y no se sabe el límite de qué está cogiendo, de qué. Evidentemente no lo usaría, yo tampoco lo usaría. D.13: Yo no lo usaría, pero nada. D.12: Va por un camino que consideramos que va a perjudicar más que a facilitar el proceso de aprendizaje.	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	D.14: Yo tampoco lo usaría por lo mismo que arriba, porque utiliza demasiadas letras, como dice la K , un cuerpo ordenado, pero ¿qué cuerpo? D.13: Es que no saben ni que es un cuerpo. D.14: Exactamente, no saben lo que es un cuerpo. D.13: Ni uno, qué es un cuerpo, ni qué es un cuerpo ordenado.	C3I. v-d (F) Las alumnas señalan una dificultad en el término cuerpo ordenado.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	D.12: Esto sería ya para un nivel más alto, ¿no? D.14: Aunque quiera ponerle algo formal yo no utilizaría éste. D.12: Yo tampoco. Esto sería nivel ya universitario, ¿no? D.13: Sí, sí, es universitario.	C2I. v-d (F) Las alumnas hipotetizan sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal.	NU
U-6	D.12: Es parecido al A ¿no?, pero en vez de teórico, es como, de nuevo el tema de la cota ¿no?; es cómo hacerles entender que tiende a infinito, y es porque, vale; sí, éste lo vemos como una evolución. Yo lo vería después del A; éste es un ejemplo de A, o sea, es como ya sé lo que es una cota, ya, venga pues vamos a verlo en un caso concreto, esta sucesión.	C3I. v-e (G) La alumna señala una dificultad en la noción de cota.	U
U-6	D.14: El fragmento H yo tampoco lo usaría.	C1I. t-e (H) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	D.12: El H es de la tónica del E, pero explicado de una forma, yo veo, intentando ser un poquito más gráfico. Más intuitivo, dando valores a los términos que es lo que hemos dicho que les cuesta a los niños.		
U-6	D.13: Al fin y al cabo unos niños de la ESO y Bachiller no necesitan, es que a ver, esta fórmula al fin y al cabo si tú como matemático quieres ver un término general para algo, entonces sí puede que haya una sucesión que por más que le des un número alto, alto, alto, tú no lo encuentres pero puede que sí haya, pero no creo yo que ese tipo de sucesiones se le pongan a unos niños en la ESO y Bachiller; en la carrera pues vale, pero, pues ya está, ¿no?	C2I. t-e (H) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación tabular.	NU

Tabla A.28. Fase inducida. Grupo D.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	D.14: Porque como tiene una cota, para esa cota encuentra un n_0 , después del n_0 encuentra el n y del n va al a_n .	C3*I. s-d (A) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	D.12: Es verdad que ya dijimos antes que no lo veíamos muy, muy, ¿cómo se dice?, educativo. Porque yo creo que sí, al ver los puntos, la finalidad es explicar la, la, intuitivamente que siempre es creciente pero no lo van a conseguir. Si el profesor se pone ahí señalando poco a poco, sí. D.14: Pero si un niño mira eso solo, no sé yo si...	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.29. Distribución de los comentarios. Grupo D. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 1, 3				(2, 0, 1, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico	3*	3, 3, 1			(1, 0, 2, 1)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 1, 1)	(1, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 0, 3, 1)

Tabla A.30. Distribución de los comentarios. Grupo D. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 3*			(0, 0, 1, 1)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 1)

Tabla A.31. Distribución de los comentarios. Grupo D. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1, 3				(1, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)

Tabla A.32. Distribución de los comentarios. Grupo D. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3	3, 2			(0, 1, 2, 0)
Tabular		1, 2			(1, 1, 0, 0)
Gráfico		1		1	(2, 0, 0, 0)
Simbólico	2	3, 3		3*	(0, 1, 2, 1)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 1, 0)	(2, 2, 3, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)	(3, 3, 4, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado el mismo número de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (11), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (7), d-i.i. (2) e intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, y cuando los rechaza señala las dificultades y la descripción de los fenómenos.
 - El alumnado rechaza el uso de i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Se producen un buen número de comentarios genéricos, de aceptación para el enfoque intuitivo y de rechazo para el enfoque formal.
 - C2: Solo se producen este tipo de comentarios para i.v.s.i. (3).
 - C3: Es la categoría predominante, 5 ocurrencias para el enfoque intuitivo y 4 para el formal.
 - C3*: El alumnado identifica y describe los 3 fenómenos.

- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 8 ocasiones.
 - T: Se producen comentarios de aceptación para “intuitivos” y de rechazo para i.v.s.i. (2).
 - G: La mayor parte de los comentarios son de no uso.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (4) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.33. Componente visual. Grupo D.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C		✓			
		C3C	✓	××			
		C2C					
		C1C	✓✓	×			
	d-i.i.	C3*D	×				
		C3D	×				
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD			✓		
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I				⊗	
		C3I	✓×			××	
		C2I	×		×	✓	
		C1I		×⊗	×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.34. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo D.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	3	0	0

Tabla A.35. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo D.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	2	0	0

Tabla A.36. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo D.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.37. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo D.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	5	0	0

Tabla A.38. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo D.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	7	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 6 + 0, 2 \cdot 5 + 0) = (12, 10)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 7 + 2) = (4, 16)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.4.4. Informe. Grupo E

Descripción.

El grupo E está formado por 3 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad de Málaga. La sesión se produjo el 27 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 10:30. El primer debate tuvo una duración de 16 minutos y 37 segundos, mientras que el segundo duró 7 minutos y 9 segundos. En este segundo debate se incorporó un nuevo alumno, que no ha sido analizado de forma individual por no haber participado en la fase espontánea, ni detectado ninguna categoría.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue cómoda ya que los alumnos respetaron la opinión de los demás sin interrupciones y las voces eran claramente diferenciables.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,24]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,25-01,58]. Los miembros del grupo conversan acerca del nivel acerca del nivel de adecuación de un fragmento que tiene un sistema de representación simbólico.

U-3: [01,59-04,20]. El grupo debate sobre la adecuación o no de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.

U-4: [04,21-05,12]. El grupo conversa sobre un tema ajeno al cuestionario, como es la aplicación del sistema de representación gráfico a una ingeniería específica.

U-5: [05,13-10,41]. Se realizan comentarios sobre la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal.

U-6: [10,42-14,19]. El grupo debate sobre la adecuación o no de los fragmentos intuitivos principalmente, llevándoles al rechazo de los fragmentos con enfoque formal.

U-7: [14,20-16,37]. El grupo establece el orden de los fragmentos en la impartición de una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

Fase III: Inducida

U-8: [00,00-07,09]. El grupo toma el rol de alumno identificando los fenómenos en cada uno de los fragmentos.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.39. Fase espontánea. Grupo E.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>E.15: A mí eso me parece según para que curso, porque a niños pequeños tú les pones esta forma de escribir tan matemática...</p> <p>En Bachillerato así con este tipo de escribir, a lo mejor sí lo podían poner, pero tampoco tenías que aprenderlo o te lo aprendías de memoria.</p> <p>E.17: Sí, pero en la ESO yo sí veo que sí le puede costar.</p> <p>E.15: Yo ese o lo pondría en un nivel ya alto o...</p> <p>Llegaría a un 1º de Bachillerato, o a un 2º, y lo entendería perfectamente.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-3	<p>E.17: Yo, si tuviera que dar la definición del fragmento A, antes le enseñaría, o sea diría lo del fragmento B, porque una vez que lo vean, será más fácil entender lo otro.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-3	<p>E.17: Yo creo que con el ejemplo de la tablita numérico se ve bastante claro lo de que tienda cada vez más grande y sí pueden entender el concepto de que tienda a más o menos infinito.</p> <p>E.15: Sí, yo creo que es bueno porque muchos, a veces, necesitan verlo.</p> <p>E.16: Se entiende bien y eso y que sería uno de los primeros ejemplos en poner.</p>	<p>C1D. t-e (C)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>E.15: Yo no lo usaría, así.</p> <p>E.17: Yo, esto para la ESO lo veo complicado.</p> <p>Sí, yo lo veo bastante lioso para ese nivel.</p> <p>E.16: Esto ya es un nivel relativamente más alto.</p> <p>E.15: Que a lo mejor que hay alguna clase que te lo admite, eh, pero...</p> <p>E.16: Ya ni clase, yo ya diría que alumno.</p> <p>Una clase entera, ni de broma.</p>	<p>C2I. g-e (E)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el nivel de la clase para la impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	NU
U-5	<p>E.15: Si le enseñas la idea de límite como la otra que hemos visto que es más visual, eso no se le va a olvidar</p> <p>E.17: Puede ser útil para que empiecen a ver, tienen que empezar a leer definiciones así.</p> <p>Yo se lo mostraría para que empiecen a verlo cómo se define.</p>	<p>C1I. v-d (F)</p> <p>Las alumnas realizan comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-5	<p>E.16: Te está diciendo que cada vez va a haber un número más grande, que no va a haber el número grande digamos, que siempre va a haber uno, entonces ya te está metiendo de manera indirecta el término infinito, ¿no? como algo que nunca...</p> <p>E.15: Que siempre puedes encontrar algo mayor.</p>	<p>C3*I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos identifican el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	NU
U-5	<p>E.15: Sí; pero no sé, creo que usaría otro antes que éste</p> <p>E.16: Sí, incluso más gráfico.</p> <p>E.17: Sí, más que tanta letra, a lo mejor se pierden.</p> <p>E.15: No me gusta mucho.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-5	<p>E.16: Yo ya estoy viendo ahí ya un montón de reglas y me tira hasta para atrás, a mí; no me quiero imaginar un chaval, que esté estudiando.</p> <p>E.15: Es que ésta me gusta hasta menos.</p> <p>Si la otra he dicho ya que no la usaría mucho, yo creo que ésta la usaría menos.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	<p>E.16: Yo diría que sería el siguiente que pondría</p> <p>E.15: Es que el fragmento J es como el D, pero en negativo; o sea, que estamos diciendo que primero explicaríamos lo positivo porque consideramos que el aspecto positivo se ve antes.</p>	<p>C1D. g-e (J)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación gráfico, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-6	<p>E.15: Usaríamos fragmento B, fragmento C, no, fragmento B, fragmento D y fragmento K porque son los que hemos dicho que son más visuales y son positivos. Si usas alguno usarías primero los positivos.</p>	<p>C1C. SR (B, D y K)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y en diferentes sistemas de representación, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-6	<p>E.16: Explicarse antes que el I, no... es que también depende de cómo veas toda la clase.</p> <p>E.15: o sea para introducir lo explicaría, si uso ese, usaría esos dos a lo mejor en esa clase yo no uso eso porque lo ven mejor con gráficas, pues entonces usaría el D y el J; yo creo que dependería de la clase que eligiera.</p> <p>E.16: Sí, exacto, es que es en función de cómo veas tú a la clase, porque a lo mejor, es más, es mejor directamente meterle todos los conceptos de la sucesión en positivo y ya, complicárselo después con la negativa.</p>	<p>C2CD. SR (C, I, D y J)</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el tipo de clase para la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación verbal y gráfico.</p>	U
U-6	<p>E.15: No sé, creo que en claro hemos sacado que el H rara vez lo usaríamos. No, no lo consideramos adecuado, y ya está.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>La alumna realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tabla A.40. Fase inducida. Grupo E.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-8	E.17: Sí, que lo veíamos demasiado formal para utilizarlo en la ESO.	C2I. s-d (A) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU
U-8	E.17: Éste es el que dijimos que era uno de los que no usaríamos. Aunque sigamos considerándolo complicado para el nivel que es.	C1I. g-e (E) La alumna realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.41. Distribución de los comentarios. Grupo E. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.42. Distribución de los comentarios. Grupo E. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.43. Distribución de los comentarios. Grupo E. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.44. Distribución de los comentarios. Grupo E. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	3*, 1			(2, 0, 0, 1)
Tabular		1, 1			(2, 0, 0, 0)
Gráfico		2		1	(1, 1, 0, 0)
Simbólico	2			2	(0, 2, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(3, 1, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(5, 3, 0, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2), d-i.i. (2) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a realizar ningún comentario de rechazo.
 - El alumnado rechaza el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (2), d-i.i. (2), intuitivos (1) e i.v.s.i. (5)
 - C2: Solo se producen este tipo de comentarios para i.v.s.i. (3)
 - C3: El alumnado no detecta dificultades en ningún fragmento.
 - C3*: El alumnado identifica y describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: El alumnado realiza estos comentarios en c-i.i. (1) e i.v.s.i. (3).

- T: El alumnado utiliza estos comentarios para aceptar d-i.i. (1) y rechazar i.v.s.i. (2).
- G: El alumnado utiliza estos comentarios para aceptar d-i.i. (1) y rechazar i.v.s.i. (2).
- S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.45. Componente visual. Grupo E.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				✓
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D		✓	✓		
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					✓
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I	×				
		C3I					
		C2I		×		✓⊗	
		C1I	✓×	⊗	×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.46. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo E.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.47. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo E.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.48. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo E.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.49. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo E.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	0	0	0

Tabla A.50. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo E.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	5	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (10, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 5 + 2) = (4, 12)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.4.5. Informe. Grupo F

Descripción.

El grupo F está formado por 4 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad de Málaga. La sesión se produjo el 27 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 10:30. El primer debate tuvo una duración de 18 minutos y 30 segundos, mientras que el segundo duró 4 minutos y 17 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue relativamente cómoda, ya que los alumnos respetaron el turno de palabra del resto de compañeros, pero en ocasiones el dispositivo tomaba ruido procedente de otros grupos.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,25]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,26-02,20]. Los alumnos debaten acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal.

U-3: [02,21-05,08]. El grupo debate acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo realizando, además, comentarios sobre la alternancia del más y el menos infinito.

U-4: [05,09-06,12]. El grupo conversa sobre las nociones de límite y de infinito, sin tener en cuenta el cuestionario.

U-5: [06,13-06,52]. Los alumnos debaten acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal, retomando una conversación anterior.

U-6: [06,53-09,15]. El grupo conversa sobre su etapa universitaria, y las matemáticas que allí vieron; tema ajeno al análisis del cuestionario.

U-7: [09,16-11,07]. Los alumnos debaten acerca de la adecuación o no de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal realizando la identificación de dificultades.

U-8: [11,08-12,33]. El grupo se dispersa conversando acerca del límite de funciones, derivadas y otros comentarios diversos irrelevantes para el análisis del cuestionario.

U-9: [12,34-18,30]. El grupo debate acerca de orden que establecería de algunos de los fragmentos que conformasen una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente, aprovechando para señalar algunas dificultades.

Fase III: Inducida

U-10: [00,00-04,17]. El grupo, asumiendo un rol de alumno en lugar de docente, identifica los diferentes fenómenos en cada uno de los fragmentos.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.51. Fase espontánea. Grupo F.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.18: Incluso habiendo estudiado Matemáticas, después de un tiempo sin tocarlas mucho, por decir de algún modo, ni me he enterado, hablando claro; o sea, que directamente los descartaría para, para introducirles esos conceptos a niños de nivel Bachillerato o en 3º o 4º de la ESO.	C2I. SR (F y H) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal y tabular.	NU
U-2	F.21: El fragmento A, que es la definición del límite realmente. No sé, yo lo veo muy avanzado para verlo en la ESO, y recuerdo que cuando me lo dieron a mí en 1º de Bachillerato no lo recibí bien.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-2	F.20: Yo creo que después de dar los ejemplos sí estaría bien introducirlo. No, de esto de primera hora es verdad que es muy de carrera.	C1I. s-d (A) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-2	F.21: El F que incluso habla de un cuerpo ordenado y tal... F.19: Ya ves... F.18: Es que ese es una locura.	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.19: Yo es que no pondría ni el E, ni el F, ni el G... ni el H.	C1I. SR (E, F, G y H) La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tiene un enfoque formal en diferentes sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-3	F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B. F.18: Yo coincido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender. F.19: El B es más fácil de entender, sí. F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Yo primero empezaría trabajando con los más infinito, entonces enseñaría el B, el K y el D. F.21: Y el D también. F.20: Y entonces ya después les daría la parte de cuando tiende a menos infinito, y daría los análogos: el I, el C y el J.	C1CD. SR (B, K, D, I, C y J) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Al principio lo pensé así y después dije es que, claro en realidad mejor prefiero que entiendan al más infinito y vean una cosa más visual como el D y el K, que también está así con la tabla bien explicado.	C1C. t-e y g-e (D y K) La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y sistema de representación gráfico y tabular, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.19: D y el J, yo los puse incluso para 3º de la ESO; a lo mejor no cómo para explicar el concepto de límite, pero sí para que les vaya sonando. Ya saben representarlo en una gráfica y ya, pues lo ven gráficamente y ya pues, en 1º de Bachiller ya lo recuerdan, en plan ya lo habían visto en 3º de la ESO pues ya les suena.	C2CD. g-e (D y J) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.	U
U-5	F.19: ¿Y el G lo pondría en una clase de Bachillerato? Yo éste lo puse ya para universidad, porque yo tampoco le veía yo muy...	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>F.21: Yo es que el A ni lo explicaría, directamente.</p> <p>F.19: ¿Ni en 2º de Bachillerato?</p> <p>F.21: A lo mejor en 2º, pero...</p> <p>F.19: En 2º, pues yo no, yo lo... si lo...</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.</p>	NU
U-7	<p>F.18: Yo creo que todos estamos de acuerdo con empezar con algo que se acerque a algo que ya conocen, como por ejemplo el B.</p> <p>F.19: Sí, algo más visual, ¿no? más práctico.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-7	<p>F.18: Yo he puesto una anotación que es que cuando pone el final de la tabla lo de la n tiende a más infinito y la sucesión tiende a menos infinito, yo por ejemplo en la n obviaría lo de tiende a más infinito porque ahí en realidad lo que estamos hablando del concepto de límite de la sucesión, ¿no?; entonces yo creo que les podría dar un poco de confusión ver el más infinito y el menos infinito, vamos quiero decir que... Claro, pero como en teoría lo que estamos intentando es explicarles el límite de la sucesión, yo creo que podrían decir, tiende a más infinito, tiende a menos infinito, o que..., ¿qué está pasando?</p>	<p>C3D. t-e (C)</p> <p>La alumna señala una dificultad en la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Vamos, directamente descartamos H, F, E; H, F, E.</p> <p>F.20: Yo diría que sí.</p> <p>F.18: Sí, sí, H, F, E, yo creo que no... los obviaría.</p>	<p>C1I. SR (H, F y E)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Yo el de la G lo había puesto en nivel intermedio, la verdad.</p> <p>F.20: Yo la G la puse como universitario también.</p> <p>F.19: Yo la verdad que no la pondría para el instituto.</p> <p>F.18: Yo es que no.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	<p>F.18: Yo es que éste, lo del cuerpo ordenado es que no lo explicaría nunca.</p> <p>F.20: Es que le vas a decir esto a un niño el cuerpo ordenado, y se le va a descomponer el cuerpo.</p> <p>F.21: Es que un cuerpo es una estructura bastante avanzada, creo yo, además ordenado, no sé... que no...</p> <p>F.20: Es que además no van a saber lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Un cuerpo, por eso.</p> <p>F.20: Les tienes que explicar lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Y un cuerpo ordenado, es que no sé; tienes que explicarle orden también porque los complejos es un cuerpo que no está ordenado, ¿no?</p> <p>F.20: Encima eso; sí, yo ese no lo pondría para nada.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad con el término cuerpo.</p>	NU
U-9	F.19: Del E al H, yo no pondría ninguno. El E, el F, el G y el H.	<p>CII. SR (E, F, G y H)</p> <p>La alumna realiza diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>F.21: Yo el G sí, el G a mí sí me mola.</p> <p>F.19: Yo el G lo pondría, pero una vez puesto el A.</p> <p>Yo ese lo pondría después del A, como ejemplo inmediato.</p>	<p>CII. v-e (G)</p> <p>Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tienen un enfoque formal y sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-9	F.21: Es que además te da un ejemplo con ese, dice tú coge un número supergrande, vale, por ejemplo 100 000 000, pues con el $n = 10000$, es 100 000 001, entonces como que cualquier número que cojas puedes coger un n .	<p>C3*I. v-e (G)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a aceptar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	F.18: E, F, H como más descartado.	C1I. SR (E, F y H) La alumna realiza un comentario genérico acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-9	F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos. F.18: Los obviamos un poco. F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo. F.20: Sí.	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tabla A.52. Fase inducida. Grupo F.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-10	F.21: Yo lo veo intuitivo en el sentido de que te dicen con cualquier número que coja, por ejemplo y utilizando un número muy grande, te puedo dar un número que al cuadrado+1 es más mayor.	C3*I. v-e (G) El alumno identifica el fenómeno c-i.i. realizando una explicación del mismo. Dado que en este fragmento se identifica i.v.s.i. se considera que ha existido una transición.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.53. Distribución de los comentarios. Grupo F. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(4, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(4, 0, 0, 0)

Tabla A.54. Distribución de los comentarios. Grupo F. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular		3			(0, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)

Tabla A.55. Distribución de los comentarios. Grupo F. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico	2				(0, 1, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 1, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)

Tabla A.56. Distribución de los comentarios. Grupo F. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 3*	3, 2, 1, 3	3*		(2, 1, 2, 2)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	1	2, 2			(1, 2, 0, 0)
No indica		2, 1, 1, 1, 1, 1			(5, 1, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 1)	(6, 4, 2, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(8, 4, 2, 2)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (16), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (4), d-i.i. (1) e intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fenómenos c-i.i. e intuitivos.

- El alumnado rechaza el uso de d-i.i., sin producirse comentarios de aceptación, e i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (4), intuitivos (1) e i.v.s.i. (8).
 - C2: El alumnado realiza este tipo de comentarios para intuitivos (1) e i.v.s.i. (4).
 - C3: El alumnado solo detecta dificultades para d-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - C3*: El alumnado de este grupo solo identifica y describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: El alumnado realiza estos comentarios para c-i.i. (2) e i.v.s.i. (7).
 - T: El alumnado utiliza los comentarios en este sistema de representación para el enfoque intuitivo, c-i.i. (1) y d-i.i. (1).
 - G: El alumnado utiliza este sistema de representación para el enfoque intuitivo, y aceptando su uso, c-i.i. (1) e intuitivos (1).
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (3) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.57. Componente visual. Grupo F.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓✓	✓	✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D			×		
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD		✓			
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓ <input checked="" type="checkbox"/>				
		C3I	××				
		C2I	×			××	×
		C1I	✓×			✓	×××××

Componente numérico-vectorial

Tabla A.58. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo F.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.59. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo F.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.60. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo F.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.61. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo F.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	1	0	0

Tabla A.62. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo F.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	12	1	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 6 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (12, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 12 + 0) = (7, 24)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.4.6. Informe. Grupo G

Descripción.

El grupo G está formado por 3 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad de Málaga. La sesión se produjo el 27 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 10:30. El primer debate tuvo una duración de 19 minutos y 53 segundos, mientras que el segundo duró 11 minutos y 13 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue cómoda por el respeto en el turno de palabra que se tuvieron entre los componentes del grupo y un tono de voz claramente diferenciable.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,08]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,09-02,37]. El grupo debate acerca de la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo con comentarios genéricos.

U-3: [02,38-03,09]. El grupo conversa sobre uno de los fragmentos que tiene un enfoque formal realizando comentarios genéricos.

U-4: [03,10-04,03]. Los alumnos entablan una conversación sobre la labor docente de forma genérica y sin utilizar los fragmentos del cuestionario.

U-5: [04,04-11,02]. El grupo debate acerca de la adecuación o no de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal con diferentes niveles de profundidad en sus comentarios.

U-6: [11,03-14,33]. Los miembros del grupo debaten sobre qué fragmento, de los que tienen un enfoque intuitivo, es el más adecuado para introducir la noción de límite infinito de una sucesión en el aula.

U-7: [14,34-15,55]. El grupo conversa sobre el límite finito de una sucesión, tipo de límite ajeno al análisis del cuestionario.

U-8: [15,56-19,53]. Los alumnos conversan acerca del cambio de signo, para límites más y menos infinito, así como la impartición en el aula de ejemplos en lugar de definiciones.

Fase III: Inducida

U-9: [00,00-09,41]. Los miembros del grupo asumen el rol de alumno realizando únicamente la identificación del fenómeno.

U-10: [09,42-11,13]. El grupo conversa acerca del orden en el que impartirían los fragmentos en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.63. Fase espontánea. Grupo G.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	G.23: Porque te da como una tabla, que ahí es súper visible, la verdad, porque te vienen los valores, por ejemplo en la K, en el fragmento K te vienen los valores de n , los valores que le vas dando a la n y lo que te va saliendo de la sucesión, y claro te dice que cuando n tiende a infinito pues la sucesión a_n tiende infinito; entonces, yo es la que veo más clara para explicarle a los alumnos.	C1C. t-e (K) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.	U
U-2	G.24: Yo lo metería en la misma clase porque esto se explica creíble el fragmento B.	C1C. v-e (B) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-2	G.24: Y el fragmento K y C pues los pondría a continuación, pero en la misma clase todo, que eso se explica el <u>concepto rápido y luego después de eso.</u> G.23: Después de, el de la gráfica, el de la gráfica por lo menos también, siempre los alumnos al ver una gráfica se interesan más. Y en la gráfica más o menos se ve como decrecimiento de una sucesión y te explica más o menos bien cómo tienden a infinito.	C1CD. t-e (C y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de dos fragmentos que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	<p>G.23: El fragmento G, lo tengo puesto yo creo que de los últimos; bueno, hay unos cuantos que ni los he puesto, pero de los que he puesto es de los últimos porque lo veo como un poco más lioso para los niños</p> <p>G.24: Yo lo veo un poco sencillito, no sé; el fragmento G yo lo pondría también de los primeros, incluso antes de la gráfica porque habla no sé cómo, habla de un listón ahí, que es algo más, no es lenguaje matemático, es lenguaje más coloquial.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula. Además, hay que destacar que se produce una transición, porque observa una parte intuitiva cuando realmente se trata de un fragmento formal.</p>	U
U-5	<p>G.23: Hay unas cuantas aquí es que no las pondría en la vida, sobre todo el fragmento E no lo pondría, el H tampoco lo pondría, es que son cosas que nosotros...</p> <p>G.22: Yo directamente he puesto que no los pondría también</p> <p>G.24: Yo tampoco los pondría.</p> <p>G.23: Es que lo veo superlioso. Yo eso lo veo vaya... fatal, vaya, que no lo vas a entender seguro.</p> <p>G.24: Yo me lo he leído y no, lo acabaría entendiendo si le dedicara bastante tiempo; a lo mejor si me lo explican pues sí que lo entendería, pero no sé, no lo veo claro como para utilizarlo.</p>	<p>C1I. SR (E y H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de fragmentos que tienen un enfoque formal y un sistema de representación tabular y gráfico, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-5	<p>G.23: Lo bueno del H es que te viene como otra tablita, que es lo que hemos dicho antes que con la tablita siempre es más fácil; entonces si le sabes explicar bien la tablita los valores de n, a_n, H y v, le vas explicando bien, claro, con la tablita a lo mejor estaría ... la verdad que más claro; con la tablita la verdad que a mí me parece bastante mejor; si no hubiese tablita absolutamente no, pero con la tablita por lo menos sí puedes ir explicando y te vas ayudando, aunque sea lioso.</p>	<p>C3I. t-e (H)</p> <p>El alumno señala una dificultad en el sistema de representación tabular utilizado en el fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	G.22: Yo el fragmento F lo que he visto es que por ejemplo habla de cuerpo ordenado, de un cuerpo. G.23: Claro, pero lo de, es que lo de cuerpo, utiliza el cuerpo, entonces si le dices un cuerpo ordenado, lo único que van a pensar ellos de cuerpo es un cuerpo humano, y no va a tener sentido, no, vaya, esa fatal.	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-5	G.24: Yo sí que la metería porque está bien habituarse con el lenguaje matemático un poco.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-5	G.22: Yo la metería, pero claro en cursos altos. G.23: Para la gente que esté más interesada en matemáticas o les guste más, y los demás alumnos pues que se queden con el concepto, de la otra forma, y ellos que como que avancen más o se les introduzca por si en un futuro quieren estudiar una carrera de ciencias o algo.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el tipo de alumnado al que le impartiría el fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-5	G.22: Yo no lo miraría como, yo no lo consideraría como, o sea que esto es lo que tienen que saber y esto es lo que yo voy a evaluar que sepan, yo esto lo evaluaría porque seguro que hay personas que, a lo mejor, no van a ver esto más en la vida o no lo entienden porque les cueste más trabajo y es normal, porque esto son cosas de carrera, pienso yo; pero sí para que lo vean y entiendan un poco el lenguaje y sepan lo que significa, y cómo se escribe, para que se habitúen, vamos; si después les gusta de verdad, pues mejor. G.23: Como primera definición la descartaría totalmente y ... pero sí, es lo que he dicho antes, la metería una vez que hubiese explicado el concepto de límite bien y lo hubiesen entendido todo.	C1I. s-d (A) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U

Tabla A.64. Fase inducida. Grupo G.

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción.	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-9	G.22:	Ven que no está acotada superiormente la sucesión porque siempre crece.	C3*C. v-e (B)	La alumna realiza un comentario sobre el propio fenómeno c-i.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U
U-9	G.23:	Es otra definición, solo que más, como más compleja porque ya te hablan de cuerpo, te hablan de otras cosas. Hablándote de cuerpo, de cuerpo ordenado	C3*I. v-d (F)	La alumna realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-9	G.22:	Nunca lo utilizaría; pero eso sí, estar, está; yo creo que sí, que está porque se ven los números, se ve que si coges, que si fijas un H más un... bueno sí se ve pero que no lo utilizaría nunca, ¡vaya!	C1I. t-e (H)	Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazado su utilización en el aula.	NU
	G.24:	Ya, yo tampoco.			
	G.22:	Porque es que esa forma de representarlo yo no sé ni comentar esa tabla, me costaría trabajo entenderla, ¡vaya!			

Tablas de distribución.

Tabla A.65. Distribución de los comentarios. Grupo G. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.66. Distribución de los comentarios. Grupo G. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.67. Distribución de los comentarios. Grupo G. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.68. Distribución de los comentarios. Grupo G. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	3		3*	(1, 0, 1, 1)
Tabular	3			1	(1, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	1, 2, 1				(2, 1, 0, 0)
No indica		1			(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 1, 1, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)	(5, 1, 2, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2) e intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a realizar ningún comentario de rechazo.

- El alumnado acepta el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Se producen de forma predominante, c-i.i. (2), intuitivos (1) e i.v.s.i. (5)
 - C2: El alumnado realiza un único comentario para i.v.s.i.
 - C3: El alumnado solo detecta dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: El alumnado de este grupo solo identifica y describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: Es el sistema de representación predominante, c-i.i. (1) e i.v.s.i. (4).
 - T: El alumnado utiliza este tipo de comentarios para c-i.i. (1) e intuitivos (1), aceptándolos, y para i.v.s.i. (2).
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (3) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.69. Componente visual. Grupo G.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓		✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I	☑☒				
		C3I	×		✓		
		C2I				✓	
		C1I	✓		☒	✓✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.70. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo G.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.71. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo G.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.72. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo G.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.73. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo G.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.74. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo G.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	2	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 2 + 2) = (10, 6)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.3.7. Informe. Grupo H

Descripción.

El grupo H está formado por 4 personas, todos ellos alumnos del MFP en la Universidad de Málaga. La sesión se produjo el 27 de noviembre de 2018, dando comienzo a las 10:30. El primer debate tuvo una duración de 18 minutos y 26 segundos, mientras que el segundo duró 9 minutos y 21 segundos.

Las condiciones ambientales fueron idóneas y no se produjo ninguna interrupción. La transcripción fue cómoda en buena parte del debate y muy tediosa durante las intervenciones de una de las alumnas, la cual no tenía un dominio completo del español, al ser el ruso su primer idioma.

Unidades de información

Fase I: Presentación

U-1: [00,00-00,58]. Presentación de cada uno de los componentes del grupo.

Fase II: Espontánea

U-2: [00,59-02,53]. El grupo conversa sobre la equivalencia de los diferentes cursos académicos, COU y Bachillerato, de distintas leyes educativas, LOGSE y LOMCE, así como la explicación de las diferentes etapas educativas a la componente del grupo que no ha realizado sus estudios en España.

U-3: [02,54-04,07]. El grupo debate acerca de la adecuación o no de diferentes fragmentos, tanto intuitivos como formales, realizando comentarios genéricos.

U-4: [04,08-07,04]. Los alumnos debaten sobre la adecuación o no de los fragmentos que tienen un enfoque formal, señalando algunas dificultades y posibles tipos de clase para su impartición.

U-5: [07,05-10,28]. El grupo establece el hipotético orden de los fragmentos que utilizarían en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

U-6: [10,29-11,27]. Los alumnos conversan sobre qué tipo de actividades deben hacerse en el aula una vez cubierta la adquisición del conocimiento que contempla el currículum, tema ajeno al análisis del cuestionario.

U-7: [11,28-12,05]. El grupo conversa sobre un fragmento formal con comentarios genéricos.

U-8: [12,06-14,02]. El grupo se dispersa hablando de su etapa de Bachillerato y el conocimiento que tenían al llegar a la universidad. Además, establecen relaciones con demostraciones inexistentes en el cuestionario.

U-9: [14,03-17,09]. Los alumnos establecen el orden de los fragmentos que utilizarían en una hipotética secuencia didáctica en su futura labor docente.

U-10: [17,10-18,26]. Los alumnos intentan comprender el fragmento que contiene una sucesión racional y que se encuentra en el sistema de representación gráfico.

Fase III: Inducida

U-11: [00,00-08,19]. El grupo, asumiendo el rol de alumno en lugar de futuro docente, intenta identificar los fenómenos en cada uno de los fragmentos.

U-12: [08,20-09,21]. El grupo conversa sobre lo que debe apuntarse e intentar recordar si las conclusiones a las que llegan en este segundo debate son las mismas que en el primero.

Interpretación

En la interpretación grupal, se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.75. Fase espontánea. Grupo H.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.25: Fragmento A. Yo lo veo demasiado formal y demasiado...	CII. s-d (A) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	H.26: Para mí los ejemplos correctos son C y D, y sus respectivos negativos que están por ahí. Eso es mi idea, de ponerle primero unos ejemplos con una serie determinada y con los resultados de esa serie que intuitivamente se ve que tiende a menos infinito. H.25: Sí, ésta es superintuitiva. H.26: La C, la D es igual de intuitiva que la, o sea la D es igual de intuitiva que la C, pero gráficamente.	CICD. t-e y g-e (C, D, J y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular y gráfico, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.26: Es que yo los demás los tachaba ya todos; por eso te estoy diciendo los que sí.	C1I. SR (E, F, G y H) El alumno realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y diferentes sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-3	H.27: Hombre, yo pondría primero el B porque hace la operación fácil, también. H.26: También. H.27: Y ya está.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	H.26: Sí, el A como el final: ya una vez que has entendido que tiende a infinito.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-4	H.26: Yo lo quitaba. Pero estás metiendo ahí, es que estás metiendo más variables ahí, que si H , v , no sé qué no sé cuánto, al final... déjalo para...	C1I. g-e (E) El alumno realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-4	H.25: Yo lo veo una definición demasiado, no sé... H.26: Mete cuerpo ordenado, hay más... Álgebra de por medio. H.25: El F lo quitaba de concepto. H.26: Ya, complicado, complicado. H.25: Yo, el fragmento F lo quitaba, respecto no creo que tenga un lenguaje ni un...	C3I. v-d (F) La alumna señala una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-4	H.26: El G no está mal de definición después de la A, quizás, porque no deja de ser una definición con la palabra listón qué es un término ahí, como... ¿me entiendes?	C3I. v-e (G) El alumno señala una dificultad con el término listón, utilizando sistema de representación verbal.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-4	H.27: Yo quitaba...	C1I. SR (E, F y H)	NU
	H.26: El E tampoco.	Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	
	H.25: El E y el F los quitamos en contenido, bueno para poder...		
	H.27: Y si quitamos el E y el F, también quitamos el H.		
	H.26: El H, correcto, yo también lo quitaba. Igual que el anterior: mi motivo es porqué metes 2 variables más, H y v , que tienes que entenderlas.	C3I. SR (E, F y H)	NU
	H.25: Que yo no las entendía tampoco; bueno, no las entiendo ahora de, de no recuerdo.	Los alumnos señalan una dificultad en las dos variables utilizadas en el sistema de representación verbal que no corresponden con la variable independiente n , ni la variable dependiente a_n .	
	H.26: Yo ahora mismo tampoco sé explicarlo.		
U-4	H.25: El H, ampliando conocimientos dependiendo de cómo fuese en el aula ¿no?, a lo mejor dependiendo de cómo fuese el grupo general, digamos que con el otro tienen el concepto de límite, pero si en general todos y comprobando que todos hayan entendido el concepto sí se podría profundizar un poco más a nivel gráfico, pero el E y el H, si la clase en general si ha entendido el contenido lo suficiente...	C2I. SR (H y E)	U
	H.27: Sí, sí, si es una clase avanzada.	Las alumnas hipotetizan sobre el tipo de clase al que le impartiría dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que han sido creados de forma explícita para este cuestionario.	
U-4	H.25: El F es más definición, no lo utilizaría.	C1I. v-d (F)	NU
		La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico y tabular, rechazando su utilización en el aula.	
U-4	H.25: Sí los metería porque son también gráficos ya metes otros conceptos, no simplemente lo que es numérico y lo otro, sino que también metes algo de gráfica, entonces estás utilizando más competencias visuales en el aprendizaje del concepto; pues entonces eso.	C3I. g-e y t-e (E y H)	U
		Los alumnos señalan una dificultad asociada al sistema de representación gráfico.	

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	H.26: El fragmento E lo que si lo puedo ver es como un nivel superior de entendimiento de las matemáticas para hacer una demostración determinada, que te hagan falta variables aparte pero no para el entendimiento en sí del concepto de sucesión a niveles más bajos; yo creo que con lo que hemos dicho.	C3I. g-e (E) Los alumnos señalan una dificultad en la inclusión de nuevas variables además de la variable independiente n y la variable dependiente a_n .	U

Tabla A.76. Fase inducida. Grupo H.

U. Inf.	Transcripción	Comentarios	U-NU
U-11	H.25: Como no es tan adecuado, desde mi punto de vista no es tan adecuado porque el lenguaje que utiliza ya no es un lenguaje de; a lo mejor para gente de Bachillerato tienen que tener.	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo en el que impartiría el fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.77. Distribución de los comentarios. Grupo H. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.78. Distribución de los comentarios. Grupo H. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.79. Distribución de los comentarios. Grupo H. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.80. Distribución de los comentarios. Grupo H. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3	3, 1		2	(1, 1, 2, 0)
Tabular	3				(0, 0, 1, 0)
Gráfico	3, 3	1			(1, 0, 2, 0)
Simbólico	1, 1				(2, 0, 0, 0)
No indica	2	1, 1, 3			(2, 1, 1, 0)
Subtotales	(2, 1, 4, 0)	(4, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)	(6, 2, 6, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (14), que para la suma de c-i.i. (1) e intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a realizar ningún comentario de rechazo.
 - El alumnado acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal.
- Categorías
 - C1: Se producen de forma predominante, c-i.i. (1), intuitivos (2) e i.v.s.i. (6)
 - C2: El alumnado solo realiza comentarios de este tipo para i.v.s.i. (2).
 - C3: El alumnado solo detecta dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: El alumnado no describe ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 5 ocasiones.

- T: El alumnado utiliza este sistema de representación para aceptar el “fenómeno” intuitivos y el fenómeno i.v.s.i.
- G: El alumnado realiza comentarios para intuitivos (1) e i.v.s.i. (1)
- S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.81. Componente visual. Grupo H.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD		✓	✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	✓×	✓✓	✓		×
		C2I	⊗				✓
		C1I	×	×		✓✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.82. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Grupo H.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.83. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Grupo H.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.84. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Grupo H.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.85. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Grupo H.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.86. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Grupo H.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
7	6	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 7 + 0, 2 \cdot 6 + 1) = (14, 13)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.5. Informes individuales

En este anexo, A3.5., se encuentran los informes de cada uno de los alumnos y las alumnas de la muestra, considerados de forma individual. El alumno A.03 no se muestra, ya que fue presentado en el apartado 6.3.1. a modo ejemplo.

Cada uno de estos informes contiene la interpretación de sus comentarios, las tablas de distribución que han servido para recoger y ordenar las categorías y sistemas de representación, el desarrollo e interpretación de los resultados, la componente visual y la componente numérica, dando lugar finalmente al perfil fenomenológico del estudiante.

A3.5.1. Informe. Estudiante A.01

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.87. Fase espontánea. Estudiante A.01.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	A.01: Es un lenguaje que a priori no se entienden institutos, universidad se empieza a dar. Yo a mí me ponen esto así en 4º de la ESO e incluso en Bachillerato, tal cual, y no sé leerlo, a no ser que el profesor te explique paso a paso qué narices significa.	C2I. s-d (A) El alumno realiza dos comentarios en el que establece una hipótesis acerca del curso en el que impartiría este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d), para la enseñanza-aprendizaje del límite infinito de una sucesión.	NU
U-2	A.01: El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno... En realidad, es la misma definición en todos. A.02: Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor? A.04: Porque es mucho más sintético. A.02: Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no? A.03: Presentaría muchas dificultades. De comprensión. A.04: Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta. A.02: No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.	C1I. s-d (A) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>A.04: Estamos hablando de distintos niveles de educación, pero nosotros lo hacíamos.</p> <p>A.03: Es para universidad está claro. Yo creo que esto nivel de Bachillerato orientado o bien universidad.</p> <p>A.01: Yo creo que esta definición tal cual sería una definición complementaria a una explicación previa.</p> <p>Y a un nivel, ya no te digo de Bachillerato, sino quizás universidad, y sobre todo si quieres enseñar, digamos dar la herramienta del lenguaje matemático para expresar ideas, en este caso expresar límites. Hay otras muchas definiciones que yo las veo mucho mejores, más fáciles, mucho más sencillas de comprender y de asimilar tanto para Bachillerato como para la ESO, de manera previa.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos entablan una conversación en la que establecen una hipótesis acerca del curso en el que impartirían este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d).</p>	U
U-3	<p>A.02: A mí me gusta más con la tabla.</p> <p>A.03: Sería, o bien usar la tabla y luego poner el caso del ejemplo típico de los números, o bien al contrario, pero sí, en cuanto a dificultad los dos son los más idóneos para empezar a trabajar el concepto de límite infinito.</p> <p>A.01: Me supone un poco de dificultad el cambio de la sucesión. por ver la idea de que el número se va haciendo cada vez más grande en lugar de darte un número que lo mismo coincide en centenares, millares, vas viendo que pum, pum, pum.</p> <p>A.03: Lo único que estás haciendo es trabajar con números, o sea, no te molestas en ya identificar lo que es término general de la sucesión.</p>	<p>C1CD. t-e (C y K)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>A.01: No de los que más me gustan, pero sí me gusta y sí creo que tendría que ir acompañado de una serie de explicaciones como por ejemplo la contracción de la tabla, de que un eje es el n, el subíndice de la sucesión, otro es el término de la sucesión o el orden que ocupa ese término, o sea, yo creo que le faltan cosas que podrían mejorar</p> <p>A.03: Es que una definición yo la usaría como auxiliar, como una especie de introducción, pero de ahí a usar ya directamente esto para definir el límite, o sea, lo usaría como una especie de introducción antes de meterte ya con algo más concreto, como algo auxiliar.</p>	<p>C3CD. g-e (D y J)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad en la contracción existente en los ejes. Ésta se da en dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	U
U-6	<p>A.01: Pero en esencia lo que quiere decir es que existe un término a partir del cual, perdón, un término para el cual tú puedes encontrar un índice tal que el término de la sucesión que le corresponde a ese índice va a superarlo, y a partir de ahí van a superarlo todos, porque va siendo creciente, en el caso de este que es una sucesión que tiende a más infinito, que es positiva. Entonces ese concepto sí es cierto que es bastante liso. Tú dame el término que quieras que yo te voy a encontrar, perdón el número que quieras, que yo te voy a encontrar un término de mi sucesión que lo supera.</p>	<p>C3*I. g-e (E)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	NU
U-7	<p>A.01: El fragmento B y el fragmento C yo creo que son explicaciones del límite bastante básicas o iniciales. el B o el C, en la ESO se puede explicar, con la tablita o con las sucesiones.</p>	<p>C2CD. v-e y t-e (B y C).</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación verbal y tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	A.01: Y la introducción tanto en el fragmento A que dijimos que era un lenguaje muy matemático, bastante complejo, o el fragmento E añaden un toque a la definición que es mucho menos intuitivo, que cuesta más comprender, por lo tanto, yo lo situaría en niveles bastante superiores, yo diría incluso Bachillerato.	C2I. SR (A y E). El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de los fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y gráfico, sin especificar estos sistemas de representación.	U
U-8	A.01: ¿Alguien sabe aquí qué es un cuerpo ordenado? Es que son conceptos, que se dan en álgebra de universidad. Un cuerpo ordenado es una estructura algebraica que tiene una serie de propiedades. A.03: Incluso en 2º de Bachillerato, tú dices esta definición y flipan en colores. Yo creo que ésta es más sencilla solo que te introduce términos que no sabes lo que son; pues claro, tú te estás hablando de algo sencillo, y te dicen de repente sea K un cuerpo ordenado, y ahí ya te quedas como, qué “\$%&” es K .	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	NU
U-9	A.01: Y el K es el C en negativo, y no sé vosotros, pero yo para mí estos tres que están emparejados. Primero explicaría el positivo y luego el negativo. A.03: Pero a la par, porque hay gente que explica solamente más infinito, y luego lo mismo con menos infinito, pero yo explicaría a la par	C1CD. SR (B, C, D, I, J y K) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de la impartición en el aula de diferentes fragmentos con un enfoque intuitivo, especificando el orden del más infinito y el menos infinito, pero sin señalar su sistema de representación.	U
U-9	A.01: El H, yo he dejado de leerlo directamente, sí, sí, ha habido un momento que ya, he perdido el interés, o sea no, me ha parecido demasiado rebuscado.	C1I. t-e (H) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	A.01: Después las gráficas, modificando algunas cosas como hemos dicho el tema de la contracción y de utilizar una gráfica donde hay la misma distancia entre 10 y 100 que entre 100 y 1 000, pues me parece un poco lioso, pero sí creo que una visualización de la definición del límite podría ayudar a la comprensión de los chicos.	C1CD. g-e (D y J) El alumno realiza un comentario genérico aceptando la utilización de estos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación gráfico.	U
U-9	A.01: Este nivel intermedio introduciendo lo que es el listón pues me gustaría para un nivel de Bachillerato el fragmento G, que creo que introduce bastante bien el tema este del listón.	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza con el nivel educativo en el que llevaría a cabo la impartición de un fragmento que tienen un enfoque formal y se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-9	A.01: Después, el A, también para que sirva a la hora explicar el lenguaje matemático o cómo se podría representar eso en lenguaje formal, vale, que no tiene porqué ser la explicación de la definición del límite, sino apoyarse para decir mira esto se puede representar así.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de un fragmento en el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d).	U
U-9	A.01: Después, a un nivel de universidad, a un ya nivel más avanzado, pues sí, tanto la definición A matemática como la definición del fragmento F, que ya utiliza pues estructuras algebraicas como el cuerpo ordenado, que ya necesitarían pues de la explicación previa de grupos, anillos, cuerpos.	C3I. v-d (F) El alumno señala una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	U

Tabla A.88. Fase inducida. Estudiante A.01.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-11	A.01: La ida y vuelta entre un H , a partir del cual localizas un término, perdón un subíndice, el orden de un término que existe otro subíndice inmediatamente superior a ese, tal que su término en la sucesión es superior a tu H inicial, a ese listón, es decir, dicho de manera general que cualquier elemento que me des te voy a poder encontrar un índice a partir del cual todos los elementos de la sucesión son superiores a ese término o a ese ..., el listón o ese elemento inicial. La ida y vuelta está en el término M , en ese M que para cualquier M se le puede encontrar un índice, tal que, vuelta para atrás, pues existe un término de la sucesión, existe un n mayor que es n_0 , perdón, que el término de la sucesión es superior a ese M .	C3*I. s-d (A) El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-11	A.01: Sus términos se hacen tan grandes como se quiera ... bueno ahí, se podría entender casi como ida y vuelta. A.03: No, porque no se especifica el valor del número que tienes que superar. A.01: Pero eso de que sus términos se hacen tan grandes como se quiera. Creo que es crecimiento, en eso estoy de acuerdo, simplemente que los términos se hagan tan grandes como se quiera lo que está diciendo detrás, es que, dame un número que yo te voy a dar uno superior a ese, que es la idea del otro, pero vale, sí.	C3*C. v-e (B) Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno c-i.i. Además, aparece la misma problemática que en el equipo investigador con la expresión “tan grandes como se quiera”, en la que se llegó al consenso de identificarlo como un enfoque intuitivo.	U
U-11	A.01: Conforme el n va tendiendo a infinito se va haciendo más grande por el término de la sucesión va a tender a menos infinito.	C3*D. t-e (C) El alumno identifica el fenómeno d-i.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U
U-11	A.01: La propia gráfica te va diciendo que el término va creciendo cada vez más, conforme el n , el <i>Eje X</i> va tendiendo a infinito, números cada vez más grandes.	C3*C. g-e (D) El alumno identifica el fenómeno c-i.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-11	<p>A.01: Cogemos un H, en este caso creo que aquí es el 9 en la gráfica, del 9 te vas al término n-ésimo, en ese caso el tercer término, avanzamos al siguiente que es el cuarto, y efectivamente sus términos sucesivos que es 16...</p> <p>A.03: La fecha de vuelta apunta al 16.</p> <p>A.01: Y hemos vuelto, así que en la propia gráfica, y ya en la definición del cuadrado de lo que es.</p> <p>A.03: Se apoya con la gráfica.</p>	<p>C3*I. g-e (E)</p> <p>Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su adecuación respecto a la fase espontánea.</p>	NU
U-11	<p>A.01: Partiendo del dado $H = 9$, existe un número natural $v = 3$, tal que, a partir de ahí ya sería la vuelta. A partir de ahí cogemos el v.</p> <p>A.03: Con $n = 4$.</p> <p>A.01: Cogemos un índice superior que dé inmediatamente sería el 4, y la vuelta sería justamente eso: el $a_n = 16$, que es superior al listón, ese 9 que hemos dicho.</p>	<p>C3*I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos conversan sobre la identificación del fenómeno i.v.s.i., sin especificar ningún cambio en su adecuación respecto a la fase espontánea.</p>	NU
U-11	<p>A.01: Se van haciendo los términos negativos tan grande como se quiera. Va tendiendo a infinito conforme los términos de la sucesión, a menos infinito, perdón, conforme los términos de la sucesión van haciéndose cada vez más grandes.</p>	<p>C3*D. v-e (I)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno d-i.i., sin especificar ningún cambio en su adecuación respecto a la fase espontánea.</p>	U

Tablas de distribución.

Tabla A.89. Distribución de los comentarios. Estudiante A.01. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal			3*		(0, 0, 0, 1)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico			3*		(0, 0, 0, 1)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 2)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 2)

Tabla A.90. Distribución de los comentarios. Estudiante A.01. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal			3*		(0, 0, 0, 1)
Tabular			3*		(0, 0, 0, 1)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 2)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 2)

Tabla A.91. Distribución de los comentarios. Estudiante A.01. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2				(0, 1, 0, 0)
Tabular	1, 2				(1, 1, 0, 0)
Gráfico	3, 1				(1, 0, 1, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 2, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 2, 1, 0)

Tabla A.92. Distribución de los comentarios. Estudiante A.01. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 3	3			(0, 1, 2, 0)
Tabular		1		3*	(1, 0, 0, 1)
Gráfico		3*		3*	(0, 0, 0, 2)
Simbólico	1, 2	2, 1		3*	(2, 1, 0, 1)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(1, 3, 1, 0)	(2, 1, 1, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 3)	(3, 4, 2, 4)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (13), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2), d-i.i. (2) e intuitivos (6).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo.

- El alumno rechaza el uso de i.v.s.i., y cuando lo acepta es para un tipo concreto de alumnado o nivel educativo
- Categorías
 - C1: El alumno realiza 3 comentarios para intuitivos y 3 para i.v.s.i.
 - C2: De nuevo, el alumno no realiza comentarios para c-i.i. y d-i.i. Realiza 2 comentarios para intuitivos y 4 para i.v.s.i.
 - C3: Realiza un único comentario, especificando las dificultades, para intuitivos, y 2 para i.v.s.i.
 - C3*: El alumno identifica y describe los 3 fenómenos; c-i.i. y d-i.i. en la fase inducida e i.v.s.i. en ambas bases.
- Sistema de representación.
 - V: Se producen comentarios para todos los fenómenos: c-i.i. (1), d-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (3).
 - T: Se producen comentarios de aceptación para el enfoque intuitivo y de rechazo para i.v.s.i.
 - G: Comentarios de aceptación para intuitivos (2) y de rechazo para i.v.s.i. (2)
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (5) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.93. Componente visual. Estudiante A.01.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C	☑	☑			
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D	☑		☑		
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD		✓			
		C2CD	✓		✓		
		C1CD		✓	✓		✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I		×(×)	(×)	(×)	
		C3I	✓×				
		C2I	✓			✓×	✓
		C1I			×	✓×	

Componente numérico-vectorial

Tabla A.94. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante A.01.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	2	0

Tabla A.95. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante A.01.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	2	0

Tabla A.96. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante A.01.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	0	0	0

Tabla A.97. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante A.01.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	0	4	0

Tabla A.98. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante A.01.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	5	0	3

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 6 + 4, 2 \cdot 0 + 0) = (16, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 5 + 3) = (10, 13)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.2. Informe. Estudiante A.02

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que la alumna no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.99. Fase espontánea. Estudiante A.02.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	A.02: Yo no lo entiendo. Lo sé leer. Porque lo sé leer, no es que diga, hay un símbolo que no entiendo, saberlo leer lo sé leer, pero si me lo pones así solo, tal cual, me cuesta un rato, ¿sabes? Y aún así, me cuesta un rato. El M lo veo confuso, las n no tanto y las a_n no tanto porque sé que forma parte de la terminología de sucesiones, pero el M lo veo bastante confuso.	C3I. s-d (A) La alumna muestra dificultad en que cualquier número que fijemos puede ser superado por un término de la sucesión.	NU
U-2	A.01: El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno... En realidad, es la misma definición en todos. A.02: Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor? A.04: Porque es mucho más sintético. A.02: Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no? A.03: Presentaría muchas dificultades. De comprensión. A.04: Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta. A.02: No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.	C1I. s-d (A) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	<p>A.02: A mí me gusta más con la tabla.</p> <p>A.03: Sería, o bien usar la tabla y luego poner el caso del ejemplo típico de los números, o bien al contrario, pero sí, en cuanto a dificultad los dos son los más idóneos para empezar a trabajar el concepto de límite infinito.</p> <p>A.01: Me supone un poco de dificultad el cambio de la sucesión. por ver la idea de que el número se va haciendo cada vez más grande en lugar de darte un número que lo mismo coincide en centenares, millares, vas viendo que pum, pum, pum.</p> <p>A.03: Lo único que estás haciendo es trabajar con números, o sea, no te molestas en ya identificar lo que es término general de la sucesión.</p>	<p>C1CD. t-e (C y K)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.</p>	U
U-8	<p>A.02: A mí estas explicaciones no me gustan, éstas, esta redacción, que está muy repetida además porque me parece que luego es confusa con los límites de las funciones; o sea, no me gusta ni la representación gráfica de las sucesiones porque me parece que es confuso con las funciones, que es lo único que representan.</p> <p>Me parece que causa confusión, que puede causar confusión a no ser que ellos tengan clarísimo, clarísimo, clarísimo en todo momento lo que es una sucesión y lo que es una función. Toda esta redacción me parece que sobra y es mazo confusa.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>La alumna realiza diversos comentarios genéricos sobre un fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e) rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>A.02: Creo que utilizaría previamente el B y el I, que son más simples porque como que solo presentan el concepto y ya está.</p>	<p>C1CD. v-e (B e I)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación verbal.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	A.02: El C y el K me parece que son los más claros, me parece que la tabla es el mejor formato para ver estas cosas.	C1CD. t-e (C y K) La alumna realiza un comentario genérico en el que acepta la impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación tabular.	U
U-9	A.02: Si 4º de la ESO es el primer curso que lo da pues sí que lo utilizaría igual más delante de 4º de la ESO porque sí que es más lisa que las otras definiciones, pero vamos, porque tiene más chicha teórica por así decirlo, pero en verdad yo creo que también se entiende.	C2I. v-e (G) a alumna hipotetiza con el nivel educativo para la impartición de un fragmento en el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (v-e).	U
U-9	A.02: Bueno el D y el J simplemente porque no me convence cómo cual es la gran ventaja de representar gráficamente una sucesión; me parece que es liso con respecto a las diferencias entre sucesiones y funciones, y no le veo la ventaja.	C3CD. g-e (D y J) La alumna señala la dificultad existente entre la noción de sucesión y función.	NU
U-9	A.02: Y la F no la usaría porque también la definición que da que es prácticamente, por lo del cuerpo ordenado, sí porque utiliza lo del cuerpo ordenado, que yo es la primera vez en mi vida que lo oigo.	C3I. v-d (F) El alumno señala una dificultad relativa al conocimiento del término cuerpo ordenado.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.100. Distribución de los comentarios. Estudiante A.02. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.101. Distribución de los comentarios. Estudiante A.02. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.102. Distribución de los comentarios. Estudiante A.02. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Gráfico		3			(0, 0, 1, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 0, 1, 0)

Tabla A.103. Distribución de los comentarios. Estudiante A.02. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2	3			(0, 1, 1, 0)
Tabular		1			(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico		3, 1			(1, 0, 1, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(2, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 1, 2, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (5), que para intuitivos (4). No se producen comentarios para c-i.i. y d-i.i.
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso del “fenómeno” intuitivos.

- La alumna rechaza el uso de i.v.s.i., y la única vez que lo aceptó fue para un alumnado concreto.
- Categorías
 - C1: El mayor número de comentarios se producen en esta categoría: intuitivos (3) e i.v.s.i. (2).
 - C2: La alumna solo realiza un único comentario para i.v.s.i.
 - C3: La alumna realiza un único comentario para intuitivos y 2 para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna no identifica ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: Se producen comentarios de aceptación para intuitivos (1) e i.v.s.i. (1) , y de rechazo para i.v.s.i (1).
 - T: La alumna realiza comentarios de aceptación para intuitivos (1) y de rechazo para i.v.s.i. (1).
 - G: Se produce un único comentario, de rechazo, para intuitivos.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.104. Componente visual. Estudiante A.02.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD		×			
		C2CD					
		C1CD	✓		✓✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×			×	
		C2I	✓				
		C1I			×	×	

Componente numérico-vectorial

Tabla A.105. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante A.02.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.106. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante A.02.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.107. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante A.02.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	1	0	0

Tabla A.108. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante A.02.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	1	0	0

Tabla A.109. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante A.02.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	4	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (6, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 4 + 0) = (2, 8)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.3. Informe. Estudiante A.04

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.110. Fase espontánea. Estudiante A.04.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>A.01: El primero estamos de acuerdo en que el lenguaje matemático, que así a priori, no se entiende bueno... En realidad, es la misma definición en todos.</p> <p>A.02: Sí, sí es la misma, pero si yo te puedo dar la definición con palabras y no en este lenguaje, ¿por qué en lenguaje matemático? ¿Por qué es mucho mejor?</p> <p>A.04: Porque es mucho más sintético.</p> <p>A.02: Sí, pero la síntesis no siempre es lo más ventajoso, ¿no?</p> <p>A.03: Presentaría muchas dificultades. De comprensión.</p> <p>A.04: Si presenta muchas dificultades yo no trabajaría con esta.</p> <p>A.02: No es que presente muchas dificultades, sino que tienes que tener un gran nivel de abstracción para entender esto importante.</p>	<p>C1I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechazan su utilización en el aula.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>A.04: Estamos hablando de distintos niveles de educación, pero nosotros lo hacíamos.</p> <p>A.03: Es para universidad está claro. Yo creo que esto nivel de Bachillerato orientado o bien universidad.</p> <p>A.01: Yo creo que esta definición tal cual sería una definición complementaria a una explicación previa.</p> <p>Y a un nivel, ya no te digo de Bachillerato, sino quizás universidad, y sobre todo si quieres enseñar, digamos dar la herramienta del lenguaje matemático para expresar ideas, en este caso expresar límites. Hay otras muchas definiciones que yo las veo mucho mejores, más fáciles, mucho más sencillas de comprender y de asimilar tanto para Bachillerato como para la ESO, de manera previa.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos entablan una conversación en la que establecen una hipótesis acerca del curso en el que impartirían este fragmento, el que se identifica el fenómeno i.v.s.i. (s-d)</p>	U
U-3	<p>A.03: Yo éste la verdad me ha gustado, quizás el que más de todos. Para introducir lo que es el concepto de límite infinito.</p> <p>A.04: Sí, yo también.</p> <p>A.03: De cara a la ESO.</p> <p>A.04: Sí, sí, para empezar.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.</p>	U
U-4	<p>A.04: Para mí estas dos representaciones me parecen más o menos equivalentes, pero aquí el fragmento K puedes trabajar con n^2, y yo haría más una distinción en el nivel o lo que entienden los alumnos. Tú puedes utilizar estas dos definiciones con alumnos que entienden de forma distinta.</p> <p>Son más o menos equivalentes dependiendo de cómo la persona aprende.</p>	<p>C2C. v-e y t-e (B y K)</p> <p>La alumna especifica la existencia de distintas formas de aprendizaje de los alumnos, señalando la adecuación de los fragmentos al tipo de alumno y su nivel educativo.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	A.04: ¿Tú harías, cómo se dice, el límite que va a menos infinito, el límite que va a más y menos infinito en la sucesión, a más infinito en la sucesión a menos infinito al mismo tiempo? Yo lo dividiría, pero yo creo que depende, creo que depende de la clase, de cómo van.	C2CD. SR (B, C, D, I, J y K) La alumna hipotetiza con el tipo de clase en la que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, especificando además el orden del más infinito y el menos infinito, pero sin señalar su sistema de representación.	U
U-9	A.04: Yo empezaría con el fragmento K y el B, o al revés dependiendo de la clase.	C2C. SR (B y K) La alumna hipotetiza con el tipo de clase en la que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación, pero sin especificarlos.	U
U-9	A.04: Utilizaría el G para explicar el lenguaje matemático, eso sí, también, un nivel más bajo, en Bachiller porque al final es algo que se puede desde mi experiencia personal, ya se puede trabajar a edades más tempranas, pero eso depende del nivel de la clase, del nivel de todo, y al final ya en la universidad el F, J y A y ya está.	C2I. SR (G, F, J y A) La alumna hipotetiza con el nivel educativo en el que llevaría a cabo la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y se encuentran en diferentes sistemas de representación, pero sin señalarlos.	U

Tabla A.111. Fase inducida. Estudiante A.04.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-11	A.04: La ida, yo lo identifico en que para cada M mayor que 0 y en la vuelta, entonces a_n es mayor que M .	C3*I. s-d (A) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.112. Distribución de los comentarios. Estudiante A.04. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 2				(1, 1, 0, 0)
Tabular	2				(0, 1, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(1, 3, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 3, 0, 0)

Tabla A.113. Distribución de los comentarios. Estudiante A.04. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.114. Distribución de los comentarios. Estudiante A.04. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)

Tabla A.115. Distribución de los comentarios. Estudiante A.04. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	2	1	3*		(1, 1, 0, 1)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 2, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 0, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el enfoque intuitivo, c-i.i. (4) e intuitivos (1), que para el enfoque formal, i.v.s.i. (4)
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de c-i.i., intuitivos e i.v.s.i.
 - La alumna rechaza el fenómeno i.v.s.i. a partir de comentarios genéricos.
- Categorías
 - C1: Se producen dos únicos comentarios genéricos, c-i.i. (1) e i.v.s.i. (1).
 - C2: Es la categoría con mayor incidencia, c-i.i. (3), intuitivos (1) e i.v.s.i. (2).
 - C3: La alumna no especifica ninguna dificultad.
 - C3*: La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. (1), aceptando su uso.
- Sistema de representación.
 - V: Solo se producen comentarios para c-i.i. (2).
 - T: Solo se produce un único comentario para c-i.i. (1).
 - G: La alumna no realiza ningún comentario para este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (3) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.116. Componente visual. Estudiante A.04.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C	✓		✓		✓
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					✓
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I				☑	
		C3I					
		C2I				✓	✓
		C1I				×	

Componente numérico-vectorial

Tabla A.117. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante A.04.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.118. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante A.04.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.119. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante A.04.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.120. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante A.04.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	0	0	0

Tabla A.121. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante A.04.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	1	1	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (10, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 1 + 0) = (5, 2)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.5.4. Informe. Estudiante B.05

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.122. Fase espontánea. Estudiante B.05.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.</p> <p>B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo ... en Bachiller.</p> <p>B.05: O sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así– se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...</p> <p>B.07: Yo creo que en 2º de Bachillerato.</p> <p>B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato.</p> <p>B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-3	<p>B.05: Pues sí, yo lo pondría en 4º.</p> <p>B.06: Sí, yo creo que 4º. Sí, éste en 4º de la ESO, yo creo.</p>	<p>C2C. v-e (B)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación verbal.</p>	U
U-5	B.05: El B está bien para darles una idea de lo que es tender a infinito.	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.</p>	U
U-5	B.05: Pero vamos, pero que después de ver los positivos, poner los negativos, y esto es bastante fácil, yo lo pondría también en 4º de la ESO o así.	<p>C2D. t-e (C)</p> <p>La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación tabular.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-8	B.05: Yo este, no, no, no, es que yo éste pondría directamente en ningún curso, me parece superlioso, que no aclara nada.	C1I. g-e (E) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-9	B.05: Es como formal, que te va a costar un montón. B.08: Pondría “no”. B.05: Yo tampoco lo pondría.	C1I. v-d (F) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-e), en el que rechazan su utilización en el aula.	NU
U-10	B.05: Que además en el F el concepto de cuerpo es muy abstracto. B.06: y además cuerpo ordenado.	C3I. v-d (F) Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-10	B.05: O directamente saltar, saltarte eso, es decir si fijamos un valor muy alto, por ejemplo K encontramos este término de la sucesión, que no sé cuál es, que lo verifica, no sé. Bueno, éste ¿en qué curso lo pondrían? Esto ya más adelante.	C3*I. v-e (G) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo y lo acepta para su impartición en el aula.	U
U-10	B.06: Esto 1º o 2º de Bachiller. B.05: Sí, 1º o 2º, sí.	C2I. v-e (G) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación gráfico.	U
U-11	B.05: Pero éste está bien. Entonces, vale más o menos 4º de la ESO.	C2D. v-e (I) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	U
U-11	B.05: Vale puede ser. Bueno, pues nada, lo dicho, está bien para ver el caso menos infinito.	C1D. v-e (I) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno d-i.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-12	B.05: Yo pondría igual el B y el K juntos, y después los negativos. B.06: Yo también.	C1CD. SR (B, K, I y C) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación, aunque sin especificarlos.	U
U-12	B.05: Después poner algún ejemplo, o igual retocar los fragmentos de éstos para que lo entiendan, o yo que sé, por lo menos que los más avanzados lo entiendan.	C2I. s-d (A) La alumna hipotetiza sobre el tiempo de alumnado al que dirigiría un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U

Tabla A.123. Fase inducida. Estudiante B.05.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-13	B.07: Porque es diferente, a los demás, pero vamos, es una gran bazofia éste B.05: Difícil ponerlo. B.06: Es muy antiexplicativo, o expositivo vaya... tú lo puedes usar, pero... B.05: Yo seguiría sin ponerlo.	C1I. v-d (F) Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-d), rechazando su utilización en el aula.	NU
U-13	B.05: Yo este ejemplo no sé si es de ida y vuelta o es otra cosa, porque realmente si ahora vuelvo a hacer esto, o sea vamos a ver, cojo el K, del K voy al n, del n vuelvo a otro K. Ahora cojo este otro K, puedo coger otro K, y así.	C3*I. v-e (G) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.124. Distribución de los comentarios. Estudiante B.05. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 2				(1, 1, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)

Tabla A.125. Distribución de los comentarios. Estudiante B.05. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 1				(1, 1, 0, 0)
Tabular	2				(0, 1, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 2, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 0, 0)

Tabla A.126. Distribución de los comentarios. Estudiante B.05. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.127. Distribución de los comentarios. Estudiante B.05. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3*, 2	1, 3	3*	1	(2, 1, 1, 2)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico		1			(1, 0, 0, 0)
Simbólico	2, 2				(0, 2, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 3, 0, 1)	(2, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 0)	(3, 3, 1, 2)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2), d-i.i. (3) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin llegar a producirse ningún comentario de rechazo.

- La alumna acepta el uso de i.v.s.i., y cuando lo rechaza predominan los comentarios genéricos.
- Categorías
 - C1: El mayor número de comentarios se produce en esta categoría; c-i.i. (1), d-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (3).
 - C2: Todos los comentarios de esta categoría se producen en la fase espontánea para aceptar los fragmentos.
 - C3: Solo se detectan dificultades para el fenómeno i.v.s.i.
 - C3*: Solo se identifica el fenómeno i.v.s.i., aceptando su uso
- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 10 ocasiones.
 - T: Se produce un único comentario, de aceptación, para d-i.i.
 - G: Se produce un único comentario, de rechazo, para i.v.s.i.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.128. Componente visual. Estudiante B.05.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C	✓				
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D	✓		✓		
		C1D	✓				
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓ <input checked="" type="checkbox"/>				
		C3I	×				
		C2I	✓			✓✓	
		C1I	× <input checked="" type="checkbox"/>	×			

Componente numérico-vectorial

Tabla A.129. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante B.05.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.130. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante B.05.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.131. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante B.05.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.132. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante B.05.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
6	0	0	0

Tabla A.133. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante B.05.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	3	1	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 6 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (12, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 4 + 1, 2 \cdot 3 + 1) = (9, 7)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.5.5. Informe. Estudiante B.06

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.134. Fase espontánea. Estudiante B.06.

U. Inf.	Estudiantes. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.</p> <p>B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo ... en Bachiller.</p> <p>B.05: O sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así– se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...</p> <p>B.07: Yo creo que en 2º de Bachillerato</p> <p>B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato</p> <p>B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-3	<p>B.05: Pues sí, yo lo pondría en 4º</p> <p>B.06: Sí, yo creo que 4º.</p> <p>Sí, éste en 4º de la ESO, yo creo.</p>	<p>C2C. v-e (B)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentra en el sistema de representación verbal.</p>	U
U-3	<p>B.06: Que la n de la izquierda es igual que la de la derecha.</p> <p>Que el subíndice no lo consideran igual que el esto...</p> <p>para entender el a_n, te debería decir a_1, igual $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.</p>	<p>C3C. v-e (B)</p> <p>El alumno identifica una dificultad en la relación existente entre la variable independiente y la dependiente.</p>	U
U-9	<p>B.06: Es que lo de un cuerpo, lo del cuerpo yo es que sí que no lo vi, vamos hasta...</p> <p>Hasta la facultad yo no vi nada de cuerpo.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.</p>	NU
U-10	<p>B.05: Que además en el F el concepto de cuerpo es muy abstracto.</p> <p>B.06: Y además cuerpo ordenado.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.</p>	NU

U. Inf.	Estudiantes. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-10	B.06: Esto 1º o 2º de Bachiller. B.05: Sí, 1º o 2º, sí.	C2I. v-e (G) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación gráfico.	U
U-10	B.06: Es complicar el concepto de todo; o sea, tú le explicas esto y huyen, salen corriendo. Pero luego puede tener una explicación más normal, no está enrevesación, no sé.	C1I. t-e (H) El alumno realiza dos comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-11	B.06: La tabla es más explicativa; tú aquí ves ¿cuánto vale n ?, no sé qué, sustituyes.	C1C. t-e (K) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-12	B.05: Yo pondría igual el B y el K juntos, y después los negativos. B.06: Yo también.	C1CD. SR (B, K, I y C) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación, aunque sin especificarlos.	U
U-12	B.06: Claro, yo más que nada para que entiendan, pondría esto, le doy la sucesión y le diría que es esto, porque hay gente que ya sabe qué son exponenciales, que se den cuenta de que éste es el 1^2 , éste el 2^2 , éste es el 3. B.07: Es que es verdad que en la tabla viene muy bien. B.06: Por eso lo digo porque esto es más intuitivo, porque en cuanto lo ven, siempre, o sea hay alguien sabe que es el cuadrado de no sé qué, pues pon el numerito, poned un numerito, 1, 1^2 , 2, 2^2 .	C1C. t-e (K) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e), aceptando su utilización en el aula.	U
U-12	B.06: El A, ponlo a modo de visualización, un poco para que vean, mira, esto es matemáticas. Se ve que es una expresión formal.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que acepta su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiantes. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-12	<p>B.06: Yo es que el H ni lo ponía, es que lo borraba de la hoja.</p> <p>B.07: Hemos dicho que no lo ponemos, porque <i>H</i> y <i>v</i> le complica la vida a los chavales.</p> <p>B.06: Lo del H si alguien no le complica, que me lo diga.</p> <p>B.07: Es un sinsentido.</p> <p>B.06: No, pero es que no lo haya visto, es que es un lío de todo</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tabla A.135. Fase inducida. Estudiante B.06.

U. Inf.	Estudiantes. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-13	<p>B.06: yo creo que es igual que antes ¿no?, un poco avanzado para alumnos de Bachiller.</p> <p>B.07: Decía que hacía falta conocimiento avanzado de mates.</p> <p>B.06: Con conocimiento avanzado, pensamiento matemático avanzado</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	NU
U-13	<p>B.07: Porque es diferente, a los demás, pero vamos, es una gran bazofia éste</p> <p>B.05: Difícil ponerlo.</p> <p>B.06: es muy antiexplicativo, o expositivo vaya... tú lo puedes usar, pero...</p> <p>B.05: Yo seguiría sin ponerlo.</p>	<p>C1I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-d), rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.136. Distribución de los comentarios. Estudiante B.06. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2, 3				(0, 1, 1, 0)
Tabular	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 1, 1, 0)

Tabla A.137. Distribución de los comentarios. Estudiante B.06. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.138. Distribución de los comentarios. Estudiante B.06. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.139. Distribución de los comentarios. Estudiante B.06. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	2	3, 3		1	(1, 1, 2, 0)
Tabular		1, 1			(2, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	2, 1			2	(1, 2, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 2, 0, 0)	(2, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(4, 3, 2, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (4) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin llegar a producirse ningún comentario de rechazo.

- El alumnado rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., y cuando lo acepta predominan los comentarios en los que se indica el nivel o tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: El mayor número de comentarios se produce en esta categoría, c-i.i. (2), intuitivos (1) e i.v.s.i. (4).
 - C2: El mayor número de estos comentarios se producen desde un enfoque formal, i.v.s.i. (3).
 - C3: Se detectan dificultades para c-i.i. (1) e i.v.s.i. (2)
 - C3*: El alumno no identifica ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: El mayor número de comentarios se producen en este sistema de representación, en 6 ocasiones.
 - T: Se producen 2 comentarios, de aceptación, para c-i.i., y 2 comentarios, de rechazo, para i.v.s.i.
 - G: El alumno no realiza ningún comentario para este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (3) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.140. Componente visual. Estudiante B.06.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C	✓				
		C2C	✓				
		C1C			✓✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	××				
		C2I	✓			✓(×)	
		C1I	(×)		××	✓	

Componente numérico-vectorial

Tabla A.141. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante B.06.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.142. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante B.06.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.143. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante B.06.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.144. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante B.06.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	0	0	0

Tabla A.145. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante B.06.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	4	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (10, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 4 + 2) = (6, 10)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.6. Informe. Estudiante B.07

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.146. Fase espontánea. Estudiante B.07.

U. Inf.	Estudiantes. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.</p> <p>B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo ... en Bachiller.</p> <p>B.05: O sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así— se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...</p> <p>B.07: Yo creo que en 2º de Bachillerato.</p> <p>B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato.</p> <p>B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-8	B.07: Éste es adidáctico.	<p>C1I. g-e (E)</p> <p>El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.</p>	NU
U-10	B.07: Con el listón me parece bien porque me parece como gráfico.	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>El alumnado realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-e), en el que acepta su utilización en el aula.</p>	U
U-12	<p>B.07: El B primero.</p> <p>Después el I que es el mismo, pero con un signo negativo delante; después el K, que es el que acabamos de ver de la tabla.</p>	<p>C1CD. v-e y t-e (B, I y K)</p> <p>El alumno realiza un comentario genérico, acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación.</p>	U
U-12	<p>B.06: Claro, yo más que nada para que entiendan, pondría esto, le doy la sucesión y le diría que es esto, porque hay gente que ya sabe qué son exponenciales, que se den cuenta de que éste es el 1², éste el 2², éste es el 3.</p> <p>B.07: Es que es verdad que en la tabla viene muy bien.</p>	<p>C1C. t-e (K)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca de un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e), aceptando su utilización en el aula.</p>	U

U. Inf.	Estudiantes.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-12	B.06:	Yo es que el H ni lo ponía, es que lo borraba de la hoja.	C1I. t-e (H)	Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), rechazando su utilización en el aula.	NU
	B.07:	Hemos dicho que no lo ponemos, porque <i>H</i> y <i>v</i> le complica la vida a los chavales.			
	B.06:	Lo del H si alguien no le complica, que me lo diga.			
	B.07:	Es un sinsentido.			
	B.06:	No, pero es que no lo haya visto, es que es un lío de todo.			

Tabla A.147. Fase inducida. Estudiante B.07.

U. Inf.	Estudiantes.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-13	B.06:	Yo creo que es igual que antes ¿no?, un poco avanzado para alumnos de Bachiller.	C2I. s-d (A)	Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
	B.07:	Decía que hacía falta conocimiento avanzado de mates.			
	B.06:	Con conocimiento avanzado, pensamiento matemático avanzado.			
U-13	B.07:	Porque es diferente, a los demás, pero vamos, es una gran bazofia éste.	C1I. v-d (F)	Los alumnos debaten con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-d), rechazando su utilización en el aula.	NU
	B.05:	Difícil ponerlo.			
	B.06:	Es muy antiexplicativo, o expositivo vaya... tú lo puedes usar, pero...			
	B.05:	Yo seguiría sin ponerlo.			

Tablas de distribución.

Tabla A.148. Distribución de los comentarios. Estudiante B.07. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.149. Distribución de los comentarios. Estudiante B.07. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.150. Distribución de los comentarios. Estudiante B.07. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.151. Distribución de los comentarios. Estudiante B.07. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1			1	(2, 0, 0, 0)
Tabular		1			(1, 0, 0, 0)
Gráfico		1			(1, 0, 0, 0)
Simbólico	2			2	(0, 2, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(4, 2, 0, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (6), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1) e intuitivos (2).

- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a producirse ningún comentario de rechazo.
 - El alumno rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., aunque no llega a señalar ninguna dificultad.
- Categorías
 - C1: Se producen de forma predominante, c-i.i. (1), intuitivos (2) e i.v.s.i. (4)
 - C2: Solo se producen comentarios para i.v.s.i. (2)
 - C3: El alumno no indica ninguna dificultad.
 - C3*: El alumno no identifica ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: Solo se indican comentarios, de aceptación, para intuitivos (1) y de aceptación y rechazo para i.v.s.i. (2)
 - T: El alumno acepta este sistema de representación para el enfoque intuitivo y lo rechaza para el enfoque formal.
 - G: Se produce un único comentario, de rechazo, para el fenómeno i.v.s.i.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.152. Componente visual. Estudiante B.07.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C			✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD	✓		✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					
		C2I				✓(⊗)	
		C1I	✓(⊗)	×	×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.153. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante B.07.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.154. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante B.07.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.155. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante B.07.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.156. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante B.07.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.157. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante B.07.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	2	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 2 + 2) = (4, 6)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.7. Informe. Estudiante B.08

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que el alumno no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.158. Fase espontánea. Estudiante B.08.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>B.06: Pues, yo creo que es 1º de Bachiller.</p> <p>B.08: Yo, yo lo pondría para hacerlo ... en Bachiller.</p> <p>B.05: O sea desde la ESO, pero Bachillerato, lo único que haría sería dar una noción intuitiva de, de límite, pero la definición así– se la daré así tal como invasión, como curiosidad para que...</p> <p>B.07: Yo creo que en 2º de Bachillerato</p> <p>B.08: Yo he puesto 2º de Bachillerato</p> <p>B.06: Esto está en 2º pero va a ir a la cola, de Bachillerato.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-9	<p>B.05: Es como formal, que te va a costar un montón.</p> <p>B.08: Pondría “no”.</p> <p>B.05: Yo tampoco lo pondría.</p>	<p>C1I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (v-e), en el que rechazan su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.159. Distribución de los comentarios. Estudiante B.08. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.160. Distribución de los comentarios. Estudiante B.08. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.161. Distribución de los comentarios. Estudiante B.08. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.162. Distribución de los comentarios. Estudiante B.08. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		1			(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	2				(0, 1, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Solo se han registrado comentarios para i.v.s.i. (2).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso del fenómeno i.v.s.i. y cuando lo rechaza lo hace de forma genérica.
- Categorías

- C1: Se produce un único comentario, para i.v.s.i., rechazando su uso.
- C2: El alumno realiza un único comentario, para i.v.s.i., aceptando su uso.
- C3: El alumno no indica ninguna dificultad.
- C3*: El alumno no identifica ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: El alumno realiza un único comentario y lo utiliza para rechazar el fragmento.
 - T: El alumno no realiza ningún comentario de este sistema de representación.
 - G: El alumno no realiza ningún comentario de este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.163. Componente visual. Estudiante B.08.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					
		C2I				✓	
		C1I	×				

Componente numérico-vectorial

Tabla A.164. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante B.08.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.165. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante B.08.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.166. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante B.08.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.167. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante B.08.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.168. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante B.08.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	1	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (0, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (2, 2)$$

Perfil fenomenológico (0, D+, m).

A3.5.8. Informe. Estudiante C.09

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.169. Fase espontánea. Estudiante C.09.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	C.10: La primera definición que daría sería la del fragmento B. C.09: Coincido contigo. Yo creo que, partiendo de una idea intuitiva, o con un ejemplo más concreto, así más numérico al principio, los chicos, los estudiantes se pueden dar cuenta de que, viendo un poco la evolución de los términos, de los primeros términos, se puede generalizar, entre comillas, a la definición de que esa sucesión tiende a infinito.	C1C. v-e (B) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.	U
U-2	C.09: El menos infinito, pues a lo mejor no es mala idea, para que, digamos introducir ese concepto inicial de infinito y luego ...	C1D. g-e (J) El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno d-i.i. (g-e), en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-2	C.10: Yo pondría el K, el K luego. C.09: Sí, coincido con C.10.	C1C. t-e (K) Los alumnos conversan realizando comentarios genéricos sobre un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e) afirmando su utilización en el aula.	U
U-3	C.11: ¿A ninguno nos gustan las tablas estas demasiadas complicadas? Nos referimos al H y al E, ¿nos parecen? A mí es que da un poco hasta de ... C.09: Es un grado de abstracción que a lo mejor no deberían, a lo mejor ni presentarse. C.11: A mí me gusta ese nivel de abstracción, lo que no me gusta tanto es el nivel de concreción y las tablas que me dan muchísima pereza, hasta leerlas.	C3I. t-e (H) Los alumnos identifican una dificultad en la abstracción y concreción de las tablas presentadas.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	C.09: A y F en un nivel superior, como los penúltimos, el A que es la definición y el F como una ...	C1I. SR (A y F) El alumno realiza un comentario genérico, acerca de dos fragmentos que contiene el fenómeno i.v.s.i., en el que acepta su utilización en el aula.	U
U-3	C.09: A, mejor no es una forma digamos correcta de presentarlos, pero a nivel educativo, a nivel de que los chicos lo entiendan creo que puede ser más beneficioso para ellos, para que entiendan mejor que no siempre de casos concretos, y luego dar la generalización correspondiente al concepto.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-3	C.11: Estoy de acuerdo, también obviamente depende del nivel de la clase. C.09: Exactamente, por ejemplo, en nivel de 4º de la ESO yo ni siquiera daría límites, porque yo no los di, das la idea intuitiva.	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-5	C.09: Yo era, establecer a lo mejor los niveles, los niveles educativos, pues hasta aquí llegaríamos en 4º, yo sinceramente en 4º. C.10: Yo el F no lo vería en la ESO, ¿no?, o en Bachillerato tampoco.	C2I. v-d (F) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU
U-5	C.09: B, I, D y J sí se pueden presentar, a lo mejor, en un curso de 4º de la ESO para que tengan esa idea intuitiva. Digamos que en 4º si eso, por, ya introducirles un poco, abrirles las puertas al concepto de límite, yo daría el B, el I, el D y el J, es decir, los que son más esclarecedores, más intuitivos, con ejemplos concreto.	C2CD. SR (B, I, D y J) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tiene un enfoque intuitivo y que se encuentran en distintos sistemas de representación.	U
U-5	C.09: Pero eso no se lo puedes poner a un chico de 4º, yo creo que no tiene todavía ...	C2I. SR (A y F) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	C.09: Incluso los fragmentos de tablas, los K y el C, que son los de tablas, esos también se pueden dar en la ESO, en 4º de la ESO, pero más allá de la definición, es que no la van, la pueden entender. El tema de la definición, que las tablas a lo mejor sí se presentan porque eso sí que lo entienden por qué, al fin y al cabo.	C2CD. t-e (C y K) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación tabular.	U
U-5	C.09: Sucesiones y ecuaciones, particularizar casos, manejar las variables, etcétera, eso sí que están más acostumbrados pero ya saltar de ese nivel, digamos, a un nivel más abstracto, desde mi punto de vista, en 4º de la ESO, no, ya en 1º de Bachillerato se podría dar perfectamente la definición que es el A, el A, y que más tenemos por aquí, el A, y el A y ya en 2º si me apuras, pero vamos yo es que ni lo daría.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU
U-5	C.09: Ni el H, ni el E ni el F los presentaría en Bachillerato más que nada debido a que en Bachillerato se les está preparando para que realicen la prueba de la EvAU, entonces pues no, no sé si es apropiado por temporización de las asignaturas o por falta de tiempo. Los de sociales, los de Bachillerato de Ciencias, aplicadas sociales, ven límites super, supersencillos, y vamos, le pones algo de esto y te dicen no, no, yo soy de letras, bueno de letras, las mates no, a mí lo esencial para aprobarlo.	C2I. SR (E, F y H) El alumno hipotetiza sobre el curso e itinerario formativo de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en diferentes sistemas de representación.	NU
U-6	C.09: Directamente creemos que la F no se presentaría ni siquiera en Bachillerato.	C2I. v-d (F) El alumno realiza un comentario estableciendo el curso de impartición y rechazando la utilización del fragmento donde se identifica el fenómeno i.v.s.i. en el sistema de representación verbal y formato definición.	NU

Tabla A.170. Fase inducida. Estudiante C.09.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	C.09: Digamos que como que el fenómeno de ida y vuelta parte de esa definición, ¿no? ... porque es, cogemos el M , bueno, también puede ser de ida y vuelta, tomas el, pillas el n_0 vas pa' acá y ya luego vuelves para atrás.	C3*I. s-d (A) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U
U-7	C.09: Porque a partir de ejemplos concretos y de particularizar unos valores de la sucesión se observa que efectivamente crece pa' abajo, como que crece pa' abajo, que el valor absoluto se va haciendo más grande. El valor absoluto se va haciendo más grande. O que decrece.	C3*D. t-e (C) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno d-i.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	U
U-7	C.09: El de ida y vuelta pues se nota coges... Para el 9, el 3, llegas al 3, partes al 4, o sea, coges uno mayor y ¿el n_0 sería el 3?, el n^* sería el 4? Que es más grande que la M que había fijado, prefijado.	C3*I. g-e (E) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-7	C.09: Porque se ve a partir de la representación gráfica esa elección del valor M , bueno, que aquí le llama H , coges el n_0 , partes al siguiente, el superior, el n y vuelves otra vez al a_n , comprobando efectivamente... En el E, comprobando efectivamente que el a_n que has sacado es superior al M tomado, pero lo hace con una particularización de un caso en concreto.	C3*I. g-e (E) El alumno realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-8	C.09: No, hemos dicho que a lo mejor se podría dar en 2º de Bachillerato.	C2I. t-e (H) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación tabular.	U
U-9	C.09: El G ya es uno de los que se introduciría en 1º de Bachillerato antes de la definición para que vieses qué podría ser. Habíamos puesto que a partir del G, Bachillerato.	C2I. t-e (G) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación tabular.	U

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-11	C.09:	El fragmento F yo creo que no debería introducirse en 2º de Bachillerato porque aparece el término “cuerpo”, que generalmente pues no se da.	C3I. v-e (F)	El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-11	C.09:	El fragmento A, yo creo que esa es la, digamos la natural, no la natural sino la que tú tienes ya metida en tu cabeza y cómo que las demás pues dices “buf”, que no digo que sea ni mejor ni peor, pero yo, por ejemplo, no la daría ni en carrera ni en nada.	C1I. s-d (A)	El alumno realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (s-d), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-11	C.09:	E y la H, si hubiese tiempo, en el desarrollo de la clase se podrían introducir en 2º de Bachillerato, siempre hablando de Ciencias, porque consideramos que en Ciencias Sociales ese nivel de abstracción generalmente no lo tienen, o digamos les cuesta más asimilar el lenguaje abstracto.	C2I. SR (E y H)	El alumno hipotetiza sobre el curso y el itinerario de formación de impartición de dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico y tabular.	U
U-11	C.09:	Entonces si quisiera el profesor se podría introducir los fragmentos B, I, K, C, D, J en 4º de la ESO, pero vamos...	C2CD. SR (B, I, K, C, D, J)	El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en distintos sistemas de representación.	U
U-11	C.09:	Y luego la G, A sí que se tendrían que dar, por lo menos en Bachillerato de Ciencias.	C2I. SR (G y A)	El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de dos fragmentos que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico y verbal.	U
U-13	C.09:	Como somos matemáticos pues sí, nos, todo esto nos apasiona, pero en el ámbito de la didáctica, a nivel educativo para Bachillerato, yo no pondría.	C2I. v-d (F)	El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.171. Distribución de los comentarios. Estudiante C.09. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.172. Distribución de los comentarios. Estudiante C.09. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular			3*		(0, 0, 0, 1)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)

Tabla A.173. Distribución de los comentarios. Estudiante C.09. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	2				(0, 1, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2		2		(0, 2, 0, 0)
Subtotales	(0, 2, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 3, 0, 0)

Tabla A.174. Distribución de los comentarios. Estudiante C.09. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		2, 2		3	(0, 2, 1, 0)
Tabular		3	2, 2		(0, 2, 1, 0)
Gráfico				3*, 3*	(0, 0, 0, 2)
Simbólico	2	2, 2	3*	1	(1, 3, 0, 1)
No indica	1	2, 2	2, 2		(1, 4, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(0, 6, 1, 0)	(0, 4, 0, 1)	(1, 0, 1, 2)	(2, 11, 2, 3)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (19), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2), d-i.i. (2) e intuitivos (3).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo, sin llegar a realizar ningún comentario de rechazo.
 - El alumno rechaza el uso de los fragmentos que tienen un enfoque formal, y cuando los aceptan predominan los comentarios en los que se especifica el nivel educativo o el tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Se producen comentarios con la misma frecuencia para c-i.i. que para i.v.s.i., 2 ocasiones.
 - C2: Esta es la categoría predominante para intuitivos (3) y para i.v.s.i. (11).
 - C3: El alumno solo detecta dificultades para i.v.s.i. (2).
 - C3*: El alumno identifica los fenómenos d-i.i. (1).
- Sistema de representación.
 - V: El alumno utiliza estos comentarios para aceptar c-i.i. (1) y rechazar i.v.s.i. (3).
 - T: Se producen comentarios, de aceptación, para los fenómenos intuitivos, y de aceptación en fase inducida y rechazo en fase espontánea para i.v.s.i.
 - G: Se aceptan los “fenómenos” intuitivos (1) y se rechaza i.v.s.i. (2).
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (5) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.175. Componente visual. Estudiante C.09.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓		✓		
	d-i.i.	C3*D			☑		
		C3D					
		C2D					
		C1D		✓			
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD			✓		✓☑
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I		⊗⊗		☑	
		C3I	⊗		×		
		C2I	×	×	☑☑	✓×	×
		C1I				⊗	✓

Componente numérico-vectorial

Tabla A.176. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante C.09.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.177. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante C.09.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	1	0

Tabla A.178. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante C.09.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	1	0

Tabla A.179. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante C.09.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	0	2	0

Tabla A.180. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante C.09.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	7	5	5

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 5 + 2, 2 \cdot 0 + 0) = (12, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 5, 2 \cdot 7 + 5) = (9, 19)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.9. Informe. Estudiante C.10

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.181. Fase espontánea. Estudiante C.10.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	C.10: La primera definición que daría sería la del fragmento B. C.09: Coincido contigo. Yo creo que, partiendo de una idea intuitiva, o con un ejemplo más concreto, así más numérico al principio, los chicos, los estudiantes se pueden dar cuenta de que, viendo un poco la evolución de los términos, de los primeros términos, se puede generalizar, entre comillas, a la definición de que esa sucesión tiende a infinito.	C1C. v-e (B) Los alumnos establecen un debate con comentarios genéricos, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (v-e), en el que aceptan su utilización en el aula.	U
U-2	C.10: Yo pondría el K, el K luego. C.09: Sí, coincido con C.10.	C1C. t-e (K) Los alumnos conversan realizando comentarios genéricos sobre un fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (t-e) afirmando su utilización en el aula.	U
U-5	C.09: Yo era, establecer a lo mejor los niveles, los niveles educativos, pues hasta aquí llegaríamos en 4º, yo sinceramente en 4º. C.10: Yo el F no lo vería en la ESO, ¿no?, o en Bachillerato tampoco.	C2I. v-d (F) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU
U-5	C.10: Yo introducir el concepto de cuerpo... C.11: Pero es que ... La definición de cuerpo...	C3I. v-d (F) Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU

Tabla A.182. Fase inducida. Estudiante C.10.

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-8	C.10:	El F por el hecho del cuerpo, vale, que es el que desecharíamos de Bachillerato.	C3I. v-d (F)	El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU
U-11	C.10:	Yo la F, no estoy de acuerdo en que, en carrera, en la carrera sí, pero en carrera de la Universidad, me parece. En Universidad sí me hubiera gustado ver la definición esta. A mí me gusta la definición.	C2I. v-d (F)	El alumno hipotetiza sobre el no uso hasta cursos universitarios de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU
U-11 y U-13	C.10:	Porque te hace ver cuerpo ordenado. Hace relacionarte más cosas. A mí me gusta por la relación al concepto.	C3I. v-d (F)	El alumno identifica una dificultad en la utilización del término cuerpo ordenado, pero indicando que facilita la relación con otras nociones.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.183. Distribución de los comentarios. Estudiante C.10. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.184. Distribución de los comentarios. Estudiante C.10. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.185. Distribución de los comentarios. Estudiante C.10. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.186. Distribución de los comentarios. Estudiante C.10. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		2, 3	3	3, 2	(0, 2, 3, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 1, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 1, 1, 0)	(0, 2, 3, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (5) que para c-i.i. (2).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso del fenómeno c-i.i., sin llegar a producirse ningún comentario de rechazo.
 - El alumno rechaza el uso de i.v.s.i., y la única vez que lo acepta señala dificultades.
- Categorías
 - C1: Solo se producen comentarios genéricos para c-i.i., siendo éstos los únicos que realiza el alumno para el enfoque intuitivo.
 - C2: El alumno realiza comentarios en los que especifica el tipo de alumnado o nivel educativo para i.v.s.i. (2).
 - C3: Es la categoría predominante, i.v.s.i. (3).
 - C3*: El alumno no detecta ningún fenómeno.
- Sistema de representación.

- V: La mayor parte de los comentarios de este alumno se realizan para este sistema de representación.
- T: Se produce un único comentario, de aceptación, para el fenómeno c-i.i.
- G: No se produce ningún comentario para este sistema de representación.
- S: No se produce ningún comentario para este sistema de representación.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.187. Componente visual. Estudiante C.10.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓		✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	× <input checked="" type="checkbox"/> ⊗				
		C2I	×⊗				
		C1I					

Componente numérico-vectorial

Tabla A.188. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante C.10.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.189. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante C.10.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.190. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante C.10.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.191. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante C.10.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.192. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante C.10.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	2	1	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 2 + 2) = (1, 6)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.10. Informe. Estudiante C.11

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.193. Fase espontánea. Estudiante C.11.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios.	U-NU
U-2	C.11: La sucesión ya es más complicada, yo empezaría con sucesiones más sencillas.	C1C. g-e (D) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno c-i.i. (g-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU
U-3	C.11: ¿A ninguno nos gustan las tablas estas demasiadas complicadas? Nos referimos al H y al E, ¿nos parecen? A mí es que da un poco hasta de ... C.09: Es un grado de abstracción que a lo mejor no deberían, a lo mejor ni presentarse. C.11: A mí me gusta ese nivel de abstracción, lo que no me gusta tanto es el nivel de concreción y las tablas que me dan muchísima pereza, hasta leerlas.	C3I. t-e (H) Los alumnos identifican una dificultad en la abstracción y concreción de las tablas presentadas	NU
U-3	C.11: Estoy de acuerdo, también obviamente depende del nivel de la clase. C.09: Exactamente, por ejemplo, en nivel de 4º de la ESO yo ni siquiera daría límites, porque yo no los di, das la idea intuitiva.	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición de un fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-5	C.10: Yo introducir el concepto de cuerpo... C.11: Pero es que ... La definición de cuerpo...	C3I. v-e (F) Los alumnos identifican una dificultad en la utilización del término cuerpo.	NU

Tabla A.194. Fase inducida. Estudiante C.11.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-8	C.11: Yo he puesto "yo no lo daría", no esclarece. No, a mí no me gusta el H.	C1I. t-e (H) La alumna realiza un comentario genérico, acerca del fragmento que contiene el fenómeno i.v.s.i. (t-e), en el que rechaza su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.195. Distribución de los comentarios. Estudiante C.11. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico		1			(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.196. Distribución de los comentarios. Estudiante C.11. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.197. Distribución de los comentarios. Estudiante C.11. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.198. Distribución de los comentarios. Estudiante C.11. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3			(0, 0, 1, 0)
Tabular		3		1	(1, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico		2			(0, 1, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(1, 1, 2, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (4), que para el fenómeno c-i.i. (1).
- Uso/No uso
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno c-i.i., sin llegar a producirse ningún comentario de aceptación.
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., sin llegar a ningún comentario de aceptación.
- Categorías
 - C1: Se produce este tipo de comentarios en la misma frecuencia para c-i.i. (1) que para i.v.s.i. (1).
 - C2: La alumna realiza un único comentario para i.v.s.i.
 - C3: Es la categoría predominante para i.v.s.i. (2).
 - C3*: La alumna no detecta ningún fenómeno.
- Sistema de representación.
 - V: La alumna realiza un único comentario, de rechazo, para i.v.s.i.
 - T: La alumna realiza comentarios para i.v.s.i. (2).
 - G: Solo se producen comentarios para c-i.i. (1)
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.199. Componente visual. Estudiante C.11.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C		×			
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×		×		
		C2I				×	
		C1I			⊗		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.200. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante C.11.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla A.201. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante C.11.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.202. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante C.11.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.203. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante C.11.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla A.204. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante C.11.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	3	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (0, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 3 + 1) = (0, 7)$$

Perfil fenomenológico (N-, D-, m).

A3.5.11. Informe. Estudiante D.12

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.205. Fase espontánea. Estudiante D.12.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción.	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>D.13: Yo no lo veo útil porque es muy formal: primero, los niños no van a entender los símbolos matemáticos, lo de sí y solo sí, para todo, y todo eso.</p> <p>Yo, en el primer momento tengo que decir, -vale, voy a ver lo que pone- y estoy muy acostumbrada a leer estas cosas, entonces unos niños que no están acostumbrados en nada a leer esto, no se van a enterar de nada, creo yo.</p> <p>D.14: Yo creo que algo, a lo mejor, formal sí habría que ponerles, a lo mejor no así de esa forma, con los signos matemáticos, pero más bien, más redactado o lo que sea.</p> <p>D.13: Incluir esto está bien pero ya como. Cuando ellos ya están bien familiarizados sobre qué es límite infinito, qué es una sucesión y todo eso, cuando ellos ya lo tienen muy bien asumido, ya decís mira pues ésta es la definición matemática.</p> <p>D.12: Entonces antes de dar una definición teórica a unos niños que están empezando a dar límite infinito, lo que yo los ubicaría de una forma un poco más realista usando números de verdad.</p>	<p>C3I. s-d (A)</p> <p>Las alumnas identifican una dificultad en la utilización del sistema de representación simbólico para una definición del límite infinito de una sucesión.</p>	NU
U-2	<p>D.12: Si queremos, si vemos que dependiendo un poco del nivel pues a lo mejor en Bachiller, sí sería interesante si se explican los límites, dejar algún lugar dentro de las explicaciones para intentar transmitir a los niños que hay una forma matemática formal de explicar lo que es un límite.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción.	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.12: Creo que éste es un caso un poco más sencillo y justamente, para mí, sería la forma de iniciar la explicación de lo que es un límite a más infinito, vale.	C1C. v-e (B) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	D.14: Pero está bien por diferenciar lo que ha dicho ella, que muchos niños se confunden en el n , en el índice con el término, entonces dándoles esta tabla pues pueden. Confunde el valor de la sucesión con el índice. D.12: Que no saben distinguir el valor con el orden, o sea con el término de la sucesión.	C3CD. t-e (C y K) Las alumnas señalan una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.	U
U-3	D.12: El B si lo vemos como un buen punto de partida teniendo en cuenta que tienen que tener unos conocimientos previos en sucesiones y también, lo bueno de éste es que le das primero el ejemplo.	C1C. v-e (B) La alumna realiza un comentario genérico acerca de la impartición en el aula de un fragmento que tiene un enfoque intuitivo y se encuentra en el sistema de representación verbal.	U
U-3	D.12: A mí por lo menos me falta que n pertenece a los números naturales; ya sé que parece una obviedad, pero a lo mejor, a los niños le cuesta lo que tú has dicho antes, relacionar las letras con a qué pertenecen esas letras; entonces n se supone que, cuando está en el ámbito de las matemáticas, siempre es número natural pero aquí no lo pone en el fragmento.	C3C. v-e (B) La alumna señala una dificultad en no establecer que la variable independiente pertenece a los números naturales, indispensable en la diferenciación entre sucesión y función.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción.	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.12: Tiende hacia menos infinito porque puede hacerse tan pequeño como se quiera. Pues sus términos se pueden hacer tan pequeños como se quiera.	C3*D. v-e (I) La alumna identifica el fenómeno d-i.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.	NU
	D.12: Y ya, a partir de ahí, explicar que este límite también en caso de esta sucesión también tendería a infinito puesto que la gráfica siempre es creciente. pone como un umbral o algo así, para cualquier M que pongas hay un n , o sea, hay un valor de límite que puede ser más alto, entonces está claro que tiende a infinito, porque siempre vas a encontrar algo mayor.	C3*C. g-e (D) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo. Dado que en este fragmento se identifica c-i.i. se considera que ha existido una transición.	U
U-6	D.13: Yo el E no lo utilizaría. D.14: Yo el E no lo utilizaría. D.12: Yo tampoco lo utilizaría. D.14: Porque incluso yo he tenido que decir -vale, que me estás... D.13: No te pone en situación de lo que está haciendo; eso primero, y segundo porque incluso yo tengo que poner, cuando he leído ha sido, -vale, qué está haciendo, quién es v , quién es H . D.12: Y no se sabe el límite de qué está cogiendo, de qué. D.12: Evidentemente no lo usaría, yo tampoco lo usaría. D.13: Yo no lo usaría, pero nada. D.12: Va por un camino que consideramos que va a perjudicar más que a facilitar el proceso de aprendizaje.	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	D.12: Esto sería ya para un nivel más alto, ¿no? D.14: Aunque quiera ponerle algo formal yo no utilizaría éste. D.12: Yo tampoco. Esto sería nivel ya universitario, ¿no? D.13: Sí, sí, es universitario.	C2I. v-d (F) Las alumnas hipotetizan sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción.	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	D.12: Es parecido al A ¿no?, pero en vez de teórico, es como, de nuevo el tema de la cota ¿no?; es cómo hacerles entender que tiende a infinito, y es porque, vale; sí, éste lo vemos como una evolución. Yo lo vería después del A; éste es un ejemplo de A, o sea, es como ya sé lo que es una cota, ya, venga pues vamos a verlo en un caso concreto, esta sucesión.	C3I. v-e (G) La alumna señala una dificultad en la noción de cota.	U
U-6	D.14: El fragmento H yo tampoco lo usaría. D.12: El H es de la tónica del E, pero explicado de una forma, yo veo, intentando ser un poquito más gráfico. Más intuitivo, dando valores a los términos que es lo que hemos dicho que les cuesta a los niños.	C1I. t-e (H) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tabla A.206. Fase inducida. Estudiante D.12.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción.	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	D.12: Es verdad que ya dijimos antes que no lo veíamos muy, muy, ¿cómo se dice?, educativo. Porque yo creo que sí, al ver los puntos, la finalidad es explicar la, la, intuitivamente que siempre es creciente pero no lo van a conseguir. Si el profesor se pone ahí señalando poco a poco, sí. D.14: Pero si un niño mira eso solo, no sé yo si...	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.207. Distribución de los comentarios. Estudiante D.12. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 1, 3				(2, 0, 1, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico	3*				(0, 0, 0, 1)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 1, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 1, 1)

Tabla A.208. Distribución de los comentarios. Estudiante D.12. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3*			(0, 0, 0, 1)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)

Tabla A.209. Distribución de los comentarios. Estudiante D.12. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	3				(0, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)

Tabla A.210. Distribución de los comentarios. Estudiante D.12. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3	2			(0, 1, 1, 0)
Tabular		1			(1, 0, 0, 0)
Gráfico		1		1	(2, 0, 0, 0)
Simbólico	2	3			(0, 1, 1, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 1, 0)	(2, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(3, 2, 2, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (7), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (4), d-i.i. (1) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, y cuando los rechaza describe el propio fenómeno.

- La alumna rechaza el uso de i.v.s.i. y cuando lo acepta señala dificultades o tipo de alumnado al que debe ir dirigido.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante para c-i.i. (2) e i.v.s.i. (3).
 - C2: La alumna solo realiza este tipo de comentarios para i.v.s.i. (2).
 - C3: La alumna señala dificultades para todos los fenómenos.
 - C3*: La alumna solo identifica los fenómenos c-i.i. y d-i-i.
- Sistema de representación.
 - V: La mayor parte de los comentarios de esta alumna se producen para este sistema de representación.
 - T: Se producen dos únicos comentarios, intuitivos (1) e i.v.s.i. (1).
 - G: Se registran comentarios de aceptación para c-i.i. (1) y de rechazo para i.v.s.i. (2)
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.211. Componente visual. Estudiante D.12.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C		✓			
		C3C	✓				
		C2C					
		C1C	✓✓				
	d-i.i.	C3*D	×				
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD			✓		
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	✓			×	
		C2I	×			✓	
		C1I		×(×)	×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.212. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante D.12.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.213. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante D.12.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla A.214. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante D.12.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.215. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante D.12.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
5	1	0	0

Tabla A.216. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante D.12.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	4	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 5 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (10, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 4 + 1) = (4, 9)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.12. Informe. Estudiante D.13

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que la alumna no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.217. Fase espontánea. Estudiante D.13.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	D.13: Yo no lo veo útil porque es muy formal: primero, los niños no van a entender los símbolos matemáticos, lo de sí y solo sí, para todo, y todo eso. Yo, en el primer momento tengo que decir, -vale, voy a ver lo que pone- y estoy muy acostumbrada a leer estas cosas, entonces unos niños que no están acostumbrados en nada a leer esto, no se van a enterar de nada, creo yo.	C3I. s-d (A) Las alumnas identifican una dificultad en la utilización del sistema de representación simbólico para una definición del límite infinito de una sucesión.	NU
	D.14: Yo creo que algo, a lo mejor, formal sí habría que ponerles, a lo mejor no así de esa forma, con los signos matemáticos, pero más bien, más redactado o lo que sea.		
	D.13: Incluir esto está bien pero ya como. Cuando ellos ya están bien familiarizados sobre qué es límite infinito, qué es una sucesión y todo eso, cuando ellos ya lo tienen muy bien asumido, ya decís mira pues ésta es la definición matemática.		
	D.12: Entonces antes de dar una definición teórica a unos niños que están empezando a dar límite infinito, lo que yo los ubicaría de una forma un poco más realista usando números de verdad.		
U-2	D.13: Les cuesta un montón, y al fin y al cabo es como una aplicación, pero les cuesta un montón eso, entonces si ya de por sí te cuesta mucho, creo yo, relacionar el natural con el término, ya hablarle de para un natural no sé qué no sé cuánto, es como ¿qué?	C3I. s-d (A) La alumna señala una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.13: Me parece, a lo mejor, más útil poner primero el C porque se le ve una tabla, dónde si le das los datos de la sucesión, pero además le dices para qué n , ¿sabes? Que ellos vean cómo va avanzando, claro, pero pueden que digan –porqué salen esos números, ¿sabes?: ¿de dónde sale el 1, el 4, el 9, el 16?	C1CD. t-e (C y K) La alumna realiza un comentario genérico acerca de la impartición en el aula de dos fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y se encuentran en el sistema de representación tabular, sin especificar si se trata de más o menos infinito.	U
U-3	D.14: Pero está bien por diferenciar lo que ha dicho ella, que muchos niños se confunden en el n , en el índice con el término, entonces dándoles esta tabla pues pueden. Confunde el valor de la sucesión con el índice. D.12: Que no saben distinguir el valor con el orden, o sea con el término de la sucesión.	C3CD. t-e (C y K) Las alumnas señalan una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.	U
U-3	D.13: ¿Tú sabes lo que pasa? En el I no lo veo yo ... parece como el B y que se pueda entender igual de bien, pero por ejemplo cuando dice, -se pueden tan grandes en valor absoluto pero negativos, como se quiera- yo creo que yo, por ejemplo, sí porque sé de lo que estoy hablando y tal, pero, a lo mejor. Pero no ya solo en valor absoluto, valor absoluto pero negativo, es como, ¿qué?; yo creo que un niño, que no sé. Lo de valor absoluto pero negativo, yo creo que ahí empiezan que si valor absoluto positivo; que a lo mejor es mayormente la forma en la que realmente está escrita, expresado de otra forma, sí, pero no sé yo si, esa forma de expresarlo.	C3D. v-e (I) La alumna argumenta acerca de la dificultad existente en la terminología matemática de valor absoluto, que influye en las sucesiones que tienden a menos infinito.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.13: Yo tampoco lo veo útil, había puesto que no lo utilizaría, pero ya no solo, es que ni me había dado cuenta del otro. Sino porque quien en el eje, ¿sabes?; no te dice en ningún momento que el eje, como tú has dicho de la x , realmente aquí ya no es x , es el n , y el eje de la y , por así decirlo, es a l ; entonces, si tú le das esta gráfica al niño, dice –vale, ahora quién es quién, porque salen estos puntos.	C3C. g-e (D) La alumna señala una dificultad en la relación existente entre la variable independiente n y el Eje de abscisas en la representación gráfica.	NU
U-5	D.13: Yo veo muy bien ver la gráfica; lo que pasa que no utilizaría esto por lo que he dicho: pero si, a lo mejor, estuviera más clara la gráfica, sí; incluso creo que es necesario que ellos también asocien con la gráfica.	C1C. g-e (D) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	D.13: Yo el E no lo utilizaría. D.14: Yo el E no lo utilizaría. D.12: Yo tampoco lo utilizaría. D.14: Porque incluso yo he tenido que decir –vale, que me estás... D.13: No te pone en situación de lo que está haciendo; eso primero, y segundo porque incluso yo tengo que poner, cuando he leído ha sido, -vale, qué está haciendo, quién es v , quién es H . D.12: Y no se sabe el límite de qué está cogiendo, de qué. D.12: Evidentemente no lo usaría, yo tampoco lo usaría. D.13: Yo no lo usaría, pero nada. D.12: Va por un camino que consideramos que va a perjudicar más que a facilitar el proceso de aprendizaje.	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	D.14: Yo tampoco lo usaría por lo mismo que arriba, porque utiliza demasiadas letras, como dice la K, un cuerpo ordenado, pero ¿qué cuerpo? D.13: Es que no saben ni que es un cuerpo. D.14: Exactamente, no saben lo que es un cuerpo. D.13: Ni uno, qué es un cuerpo, ni qué es un cuerpo ordenado.	C3I. v-d (F) Las alumnas señalan una dificultad en el término cuerpo ordenado.	NU
U-6	D.12: Esto sería ya para un nivel más alto, ¿no? D.14: Aunque quiera ponerle algo formal yo no utilizaría éste. D.12: Yo tampoco. Esto sería nivel ya universitario, ¿no? D.13: Sí, sí, es universitario.	C2I. v-d (F) Las alumnas hipotetizan sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal.	NU
U-6	D.13: Al fin y al cabo unos niños de la ESO y Bachiller no necesitan, es que a ver, esta fórmula al fin y al cabo si tú como matemático quieres ver un término general para algo, entonces sí puede que haya una sucesión que por más que le des un número alto, alto, alto, tú no lo encuentres pero puede que sí haya, pero no creo yo que ese tipo de sucesiones se le pongan a unos niños en la ESO y Bachiller; en la carrera pues vale, pero, pues ya está, ¿no?	C2I. t-e (H) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación tabular.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.218. Distribución de los comentarios. Estudiante D.13. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico		3, 1			(1, 0, 1, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)

Tabla A.219. Distribución de los comentarios. Estudiante D.13. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3			(0, 0, 1, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)

Tabla A.220. Distribución de los comentarios. Estudiante D.13. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1, 3				(1, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)

Tabla A.221. Distribución de los comentarios. Estudiante D.13. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 2			(0, 1, 1, 0)
Tabular		2			(0, 1, 0, 0)
Gráfico		1			(1, 0, 0, 0)
Simbólico		3, 3			(0, 0, 2, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 3, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 3, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (6), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2), d-i.i. (1) e intuitivos (2).

- Uso/No uso
 - La alumna rechaza el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin realizar ningún comentario de aceptación para c-i.i. y d-i.i.
 - La alumna rechaza el uso de i.v.s.i., sin llegar a realizar ningún comentario de aceptación.
- Categorías
 - C1: Se producen comentarios genéricos para todos los fenómenos, uno para cada uno de ellos.
 - C2: La alumna solo señala el tipo de alumnado o nivel educativo para el fenómeno i.v.s.i.
 - C3: Es la categoría predominante: c-i.i. (1), d-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (3).
 - C3*: La alumna no identifica ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: Todos los comentarios para este sistema de representación son de rechazo.
 - T: La alumna acepta los fragmentos de enfoque intuitivo y rechaza el formal.
 - G: La alumna rechaza todos los fragmentos de este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.222. Componente visual. Estudiante D.13.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C		×			
		C2C					
		C1C		×			
	d-i.i.	C3*D					
		C3D	×				
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD			✓		
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×			×	×
		C2I	×		×		
		C1I		×			

Componente numérico-vectorial

Tabla A.223. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante D.13.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	2	0	0

Tabla A.224. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante D.13.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla A.225. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante D.13.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.226. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante D.13.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	3	0	0

Tabla A.227. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante D.13.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	6	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 3 + 0) = (4, 6)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 6 + 0) = (0, 12)$$

Perfil fenomenológico (N-, D-, m).

A3.5.13. Informe. Estudiante D.14

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.228. Fase espontánea. Estudiante D.14.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>D.13: Yo no lo veo útil porque es muy formal: primero, los niños no van a entender los símbolos matemáticos, lo de sí y solo si, para todo, y todo eso. Yo, en el primer momento tengo que decir, -vale, voy a ver lo que pone- y estoy muy acostumbrada a leer estas cosas, entonces unos niños que no están acostumbrados en nada a leer esto, no se van a enterar de nada, creo yo.</p> <p>D.14: Yo creo que algo, a lo mejor, formal sí habría que ponerles, a lo mejor no así de esa forma, con los signos matemáticos, pero más bien, más redactado o lo que sea.</p> <p>D.13: Incluir esto está bien pero ya como. Cuando ellos ya están bien familiarizados sobre qué es límite infinito, qué es una sucesión y todo eso, cuando ellos ya lo tienen muy bien asumido, ya decís mira pues ésta es la definición matemática.</p> <p>D.12: Entonces antes de dar una definición teórica a unos niños que están empezando a dar límite infinito, lo que yo los ubicaría de una forma un poco más realista usando números de verdad.</p>	C3I. s-d (A) Las alumnas identifican una dificultad en la utilización del sistema de representación simbólico para una definición del límite infinito de una sucesión.	NU
U-3	<p>D.14: Pero está bien por diferenciar lo que ha dicho ella, que muchos niños se confunden en el n, en el índice con el término, entonces dándoles esta tabla pues pueden.</p> <p>Confunde el valor de la sucesión con el índice.</p> <p>D.12: Que no saben distinguir el valor con el orden, o sea con el término de la sucesión.</p>	C3CD. t-e (C y K) Las alumnas señalan una dificultad relativa a la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	D.14: Yo este ejemplo no lo veo muy bien, porque al dibujarlo, ahí pones las rayitas estas como para decir que hay ahí un trozo que se pierde, pero por ejemplo en el eje de la x hay una rayita entre el 2 y el 10, y hay otra entre el 10 y el 1 000, como que está diciendo que ahí se pierde, como que está cortando, pero está cortando distintas cantidades; puede ser que a los niños le choque un poco.	C3C. g-e (D) La alumna señala una dificultad en la contracción existente en los ejes.	NU
U-3	D.13: Yo tampoco lo veo útil, había puesto que no lo utilizaría, pero ya no solo, es que ni me había dado cuenta del otro. Sino porque quien en el eje, ¿sabes?; no te dice en ningún momento que el eje, como tú has dicho de la x , realmente aquí ya no es x , es el n , y el eje de la y , por así decirlo, es a l ; entonces, si tú le das esta gráfica al niño, dice –vale, ahora quién es quién, porqué salen estos puntos.	C3C. g-e (D) La alumna señala una dificultad en la relación existente entre la variable independiente n y el Eje de abscisas en la representación gráfica.	NU
U-6	D.13: Yo el E no lo utilizaría. D.14: Yo el E no lo utilizaría. D.12: Yo tampoco lo utilizaría. D.14: Porque incluso yo he tenido que decir –vale, que me estás... D.13: No te pone en situación de lo que está haciendo; eso primero, y segundo porque incluso yo tengo que poner, cuando he leído ha sido, -vale, qué está haciendo, quién es v , quién es H . D.12: Y no se sabe el límite de qué está cogiendo, de qué... D.12: Evidentemente no lo usaría, yo tampoco lo usaría. D.13: Yo no lo usaría, pero nada. D.12: Va por un camino que consideramos que va a perjudicar más que a facilitar el proceso de aprendizaje.	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	D.14: Yo tampoco lo usaría por lo mismo que arriba, porque utiliza demasiadas letras, como dice la K, un cuerpo ordenado, pero ¿qué cuerpo? D.13: Es que no saben ni que es un cuerpo. D.14: Exactamente, no saben lo que es un cuerpo. D.13: Ni uno, qué es un cuerpo, ni qué es un cuerpo ordenado.	C3I. v-d (F) Las alumnas señalan una dificultad en el término cuerpo ordenado.	NU
U-6	D.12: Esto sería ya para un nivel más alto, ¿no? D.14: Aunque quiera ponerle algo formal yo no utilizaría éste. D.12: Yo tampoco. Esto sería nivel ya universitario, ¿no? D.13: Sí, sí, es universitario.	C2I. v-d (F) Las alumnas hipotetizan sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal.	NU
U-6	D.14: El fragmento H yo tampoco lo usaría. D.12: El H es de la tónica del E, pero explicado de una forma, yo veo, intentando ser un poquito más gráfico. Más intuitivo, dando valores a los términos que es lo que hemos dicho que les cuesta a los niños.	C1I. t-e (H) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tabla A.229. Fase inducida. Estudiante D.14.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	D.14: Porque como tiene una cota, para esa cota encuentra un n_0 , después del n_0 encuentra el n y del n va al a_n .	C3*I. s-d (A) La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU
U-7	D.12: Es verdad que ya dijimos antes que no lo veíamos muy, muy, ¿cómo se dice?, educativo. Porque yo creo que sí, al ver los puntos, la finalidad es explicar la, la, intuitivamente que siempre es creciente pero no lo van a conseguir. Si el profesor se pone ahí señalando poco a poco, sí. D.14: Pero si un niño mira eso solo, no sé yo si...	C1I. g-e (E) Las alumnas realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.230. Distribución de los comentarios. Estudiante D.14. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico		3, 3			(0, 0, 2, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 2, 0)

Tabla A.231. Distribución de los comentarios. Estudiante D.14. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.232. Distribución de los comentarios. Estudiante D.14. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.233. Distribución de los comentarios. Estudiante D.14. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 2			(0, 1, 1, 0)
Tabular		1			(1, 0, 0, 0)
Gráfico		1		1	(2, 0, 0, 0)
Simbólico		3		3*	(0, 0, 1, 1)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(2, 1, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)	(3, 1, 2, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (7), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna rechaza el uso de los fenómenos intuitivos, y cuando los acepta realiza comentarios genéricos.
 - La alumna rechaza el uso de i.v.s.i., sin llegar a producirse ningún comentario de aceptación.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante para esta alumna, intuitivos (1) e i.v.s.i. (3).
 - C2: Se produce un único comentario, para i.v.s.i.
 - C3: La alumna señala dificultades tanto para c-i.i. (2) como para i.v.s.i. (2).
 - C3*: La alumna identifica el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: Se producen comentarios, de rechazo, para el fenómeno i.v.s.i. (2).
 - T: La alumna acepta los fragmentos de enfoque intuitivo y rechaza los de enfoque formal.
 - G: La alumna rechaza el uso de este sistema de representación.
 - S: Solo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.234. Componente visual. Estudiante D.14.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C		××			
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I				⊗	
		C3I	×			×	
		C2I	×				
		C1I		×⊗	×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.235. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante D.14.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	2	0	0

Tabla A.236. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante D.14.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.237. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante D.14.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.238. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante D.14.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	2	0	0

Tabla A.239. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante D.14.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	5	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 2 + 0) = (2, 4)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 5 + 2) = (0, 12)$$

Perfil fenomenológico (N-, D-, m).

A3.5.14. Informe. Estudiante E.15

Interpretación

En esta interpretación individual se presentan una tabla, correspondiente a la fase espontánea, ya que no se categorizaron comentarios en la fase inducida.

Tabla A.240. Fase espontánea. Estudiante E.15.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>E.15: A mí eso me parece según para que curso, porque a niños pequeños tú les pones esta forma de escribir tan matemática...</p> <p>En Bachillerato así con este tipo de escribir, a lo mejor sí lo podían poner, pero tampoco tenías que aprenderlo o te lo aprendías de memoria.</p> <p>E.17: Sí, pero en la ESO yo sí veo que sí le puede costar.</p> <p>E.15: Yo ese o lo pondría en un nivel ya alto o...</p> <p>Llegaría a un 1º de Bachillerato, o a un 2º, y lo entendería perfectamente.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-3	<p>E.17: Yo creo que con el ejemplo de la tablita numérico se ve bastante claro lo de que tienda cada vez más grande y sí pueden entender el concepto de que tienda a más o menos infinito.</p> <p>E.15: Sí, yo creo que es bueno porque muchos, a veces, necesitan verlo.</p> <p>E.16: Se entiende bien y eso y que sería uno de los primeros ejemplos en poner.</p>	<p>C1D. t-d (C)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-5	<p>E.15: Yo no lo usaría, así.</p> <p>E.17: Yo, esto para la ESO lo veo complicado.</p> <p>Sí, yo lo veo bastante liso para ese nivel.</p> <p>E.16: Esto ya es un nivel relativamente más alto.</p> <p>E.15: Que a lo mejor que hay alguna clase que te lo admite, eh, pero...</p> <p>E.16: Ya ni clase, yo ya diría que alumno.</p> <p>Una clase entera, ni de broma.</p>	<p>C2I. g-e (E)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el nivel de la clase para la impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	E.15: Si le enseñas la idea de límite como la otra que hemos visto que es más visual, eso no se le va a olvidar. E.17: Puede ser útil para que empiecen a ver, tienen que empezar a leer definiciones así. Yo se lo mostraría para que empiecen a verlo cómo se define.	C1I. v-d (F) Las alumnas realizan comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-5	E.16: Te está diciendo que cada vez va a haber un número más grande, que no va a haber el número grande digamos, que siempre va a haber uno, entonces ya te está metiendo de manera indirecta el término infinito, ¿no? como algo que nunca... E.15: Que siempre puedes encontrar algo mayor.	C3*I. v-e (G) Los alumnos identifican el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.	NU
U-5	E.15: Sí; pero no sé, creo que usaría otro antes que éste. E.16: Sí, incluso más gráfico. E.17: Sí, más que tanta letra, a lo mejor se pierden. E.15: No me gusta mucho.	C1I. v-e (G) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-5	E.16: Yo ya estoy viendo ahí ya un montón de reglas y me tira hasta para atrás, a mí; no me quiero imaginar un chaval, que esté estudiando. E.15: Es que ésta me gusta hasta menos. Si la otra he dicho ya que no la usaría mucho, yo creo que ésta la usaría menos.	C1I. t-e (H) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	E.16: Yo diría que sería el siguiente que pondría. E.15: Es que el fragmento J es como el D, pero en negativo; o sea, que estamos diciendo que primero explicaríamos lo positivo porque consideramos que el aspecto positivo se ve antes.	C1D. g-e (J) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación gráfico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-6	E.15: Usaríamos fragmento B, fragmento C, no, fragmento B, fragmento D y fragmento K porque son los que hemos dicho que son más visuales y son positivos. Si usas alguno usarías primero los positivos.	C1C. SR (B, D y K) La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y en diferentes sistemas de representación, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-6	<p>E.16: Explicarse antes que el I, no... es que también depende de cómo veas toda la clase.</p> <p>E.15: O sea para introducir lo explicaría, si uso ese, usaría esos dos a lo mejor en esa clase yo no uso eso porque lo ven mejor con gráficas, pues entonces usaría el D y el J; yo creo que dependería de la clase que eligiera.</p> <p>E.16: Sí, exacto, es que es en función de cómo veas tú a la clase, porque a lo mejor, es más, es mejor directamente meterle todos los conceptos de la sucesión en positivo y ya, complicárselo después con la negativa.</p>	<p>C2CD. SR (C, I, D y J)</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el tipo de clase para la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación verbal y gráfico.</p>	U
U-6	<p>E.15: No sé, creo que en claro hemos sacado que el H rara vez lo usaríamos. No, no lo consideramos adecuado, y ya está.</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>La alumna realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.241. Distribución de los comentarios. Estudiante E.15. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.242. Distribución de los comentarios. Estudiante E.15. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.243. Distribución de los comentarios. Estudiante E.15. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)

Tabla A.244. Distribución de los comentarios. Estudiante E.15. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	3*, 1			(2, 0, 0, 1)
Tabular		1, 1			(2, 0, 0, 0)
Gráfico		2			(0, 1, 0, 0)
Simbólico	2				(0, 1, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(3, 1, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(4, 2, 0, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (7), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1), d-i.i. (2) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo
 - La alumna rechaza el uso de i.v.s.i., y cuando lo acepta es de forma genérica o especificando el tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1), d-i.i. (2) e i.v.s.i. (4).
 - C2: La alumna realiza este tipo de comentarios para intuitivos (1) e i.v.s.i. (2).
 - C3: La alumna no señala ninguna dificultad.
 - C3*: La alumna solo describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: Solo se producen comentarios en este sistema de representación para el fenómeno i.v.s.i. (3).

- T: La alumna acepta el fenómeno d-i.i. (1) y rechaza i.v.s.i. (2).
- G: La alumna acepta el fenómeno d-i.i. (1) y rechaza i.v.s.i. (1).
- S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.245. Componente visual. Estudiante E.15.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					✓
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D		✓	✓		
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					✓
		C1CD					
	Formal	C3*I	×				
		C3I					
		C2I		×		✓	
		C1I	✓×		×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.246. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante E.15.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.247. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante E.15.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.248. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante E.15.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.249. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante E.15.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.250. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante E.15.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	5	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 4 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (8, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 5 + 0) = (4, 10)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.15. Informe. Estudiante E.16

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla ya que el alumno no realizó comentarios categorizados en la fase inducida.

Tabla A.251. Fase espontánea. Estudiante E.16.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	<p>E.17: Yo creo que con el ejemplo de la tablita numérico se ve bastante claro lo de que tienda cada vez más grande y sí pueden entender el concepto de que tienda a más o menos infinito.</p> <p>E.15: Sí, yo creo que es bueno porque muchos, a veces, necesitan verlo.</p> <p>E.16: Se entiende bien y eso y que sería uno de los primeros ejemplos en poner.</p>	<p>C1D. t-e (C)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-5	<p>E.15: Yo no lo usaría, así.</p> <p>E.17: Yo, esto para la ESO lo veo complicado.</p> <p>Sí, yo lo veo bastante lioso para ese nivel.</p> <p>E.16: Esto ya es un nivel relativamente más alto.</p> <p>E.15: Que a lo mejor que hay alguna clase que te lo admite, eh, pero...</p> <p>E.16: Ya ni clase, yo ya diría que alumno.</p> <p>Una clase entera, ni de broma.</p>	<p>C2I. g-e (E)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el nivel de la clase para la impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.</p>	NU
U-5	<p>E.16: Te está diciendo que cada vez va a haber un número más grande, que no va a haber el número grande digamos, que siempre va a haber uno, entonces ya te está metiendo de manera indirecta el término infinito, ¿no? como algo que nunca...</p> <p>E.15: Que siempre puedes encontrar algo mayor.</p>	<p>C3*I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos identifican el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a rechazar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	NU
U-5	<p>E.15: Sí; pero no sé, creo que usaría otro antes que éste.</p> <p>E.16: Sí, incluso más gráfico.</p> <p>E.17: Sí, más que tanta letra, a lo mejor se pierden.</p> <p>E.15: No me gusta mucho.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	E.16: Yo ya estoy viendo ahí ya un montón de reglas y me tira hasta para atrás, a mí; no me quiero imaginar un chaval, que esté estudiando. E.15: Es que ésta me gusta hasta menos. Si la otra he dicho ya que no la usaría mucho, yo creo que ésta la usaría menos.	C1I. t-e (H) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-6	E.16: Yo diría que sería el siguiente que pondría. E.15: Es que el fragmento J es como el D, pero en negativo; o sea, que estamos diciendo que primero explicaríamos lo positivo porque consideramos que el aspecto positivo se ve antes.	C1D. g-e (J) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación gráfico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-6	E.16: Explicarse antes que el I, no... es que también depende de cómo veas toda la clase. E.15: O sea para introducir lo explicaría, si uso ese, usaría esos dos a lo mejor en esa clase yo no uso eso porque lo ven mejor con gráficas, pues entonces usaría el D y el J; yo creo que dependería de la clase que eligiera. E.16: Sí, exacto, es que es en función de cómo veas tú a la clase, porque a lo mejor, es más, es mejor directamente meterle todos los conceptos de la sucesión en positivo y ya, complicárselo después con la negativa.	C2CD. SR (C, I, D y J) El alumno hipotetiza sobre el tipo de clase para la impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación verbal y gráfico.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.252. Distribución de los comentarios. Estudiante E.16. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.253. Distribución de los comentarios. Estudiante E.16. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.254. Distribución de los comentarios. Estudiante E.16. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2				(0, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)

Tabla A.255. Distribución de los comentarios. Estudiante E.16. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3*, 1			(1, 0, 0, 1)
Tabular		1			(1, 0, 0, 0)
Gráfico		2			(0, 1, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(2, 1, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 1, 0, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (4), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; d-i.i. (2) e intuitivos (1).

- Uso/No uso
 - El alumno acepta los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - El alumno rechaza el fenómeno i.v.s.i., sin producirse comentarios de aceptación.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, d-i.i. (2) e i.v.s.i. (2).
 - C2: El alumno realiza este tipo de comentarios para intuitivos (1) e i.v.s.i. (1).
 - C3: El alumno no señala ninguna dificultad.
 - C3*: El alumno solo identifica el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: Solo se producen comentarios en este sistema de representación para el fenómeno i.v.s.i. (2).
 - T: El alumno acepta el fenómeno d-i.i. (1) y rechaza i.v.s.i. (1).
 - G: El alumno acepta el fenómeno d-i.i. (1) y rechaza i.v.s.i. (1).
 - S: No se producen comentarios en este sistema de representación.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.256. Componente visual. Estudiante E.16.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D		✓	✓		
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					✓
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I	×				
		C3I					
		C2I		×			
		C1I	×		×		

Componente numérico-vectorial

Tabla A.257. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante E.16.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.258. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante E.16.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.259. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante E.16.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.260. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante E.16.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.261. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante E.16.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	4	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 4 + 0) = (0, 8)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.16. Informe. Estudiante E.17

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.262. Fase espontánea. Estudiante E.17.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	<p>E.15: A mí eso me parece según para que curso, porque a niños pequeños tú les pones esta forma de escribir tan matemática...</p> <p>En Bachillerato así con este tipo de escribir, a lo mejor sí lo podían poner, pero tampoco tenías que aprenderlo o te lo aprendías de memoria.</p> <p>E.17: Sí, pero en la ESO yo sí veo que sí le puede costar.</p> <p>E.15: Yo ese o lo pondría en un nivel ya alto o...</p> <p>Llegaría a un 1º de Bachillerato, o a un 2º, y lo entendería perfectamente.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>Las alumnas hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.</p>	U
U-3	<p>E.17: Yo, si tuviera que dar la definición del fragmento A, antes le enseñaría, o sea diría lo del fragmento B, porque una vez que lo vean, será más fácil entender lo otro.</p>	<p>C1C. v-e (B)</p> <p>La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-3	<p>E.17: Yo creo que con el ejemplo de la tablita numérico se ve bastante claro lo de que tienda cada vez más grande y sí pueden entender el concepto de que tienda a más o menos infinito.</p> <p>E.15: Sí, yo creo que es bueno porque muchos, a veces, necesitan verlo.</p> <p>E.16: Se entiende bien y eso y que sería uno de los primeros ejemplos en poner.</p>	<p>C1D. t-e (C)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	E.15: Yo no lo usaría, así. E.17: Yo, esto para la ESO lo veo complicado. Sí, yo lo veo bastante lio para ese nivel. E.16: Esto ya es un nivel relativamente más alto. E.15: Que a lo mejor que hay alguna clase que te lo admite, eh, pero... E.16: Ya ni clase, yo ya diría que alumno. Una clase entera, ni de broma.	C2I. g-e (E) Las alumnas hipotetizan sobre el nivel de la clase para la impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.	NU
U-5	E.15: Si le enseñas la idea de límite como la otra que hemos visto que es más visual, eso no se le va a olvidar. E.17: Puede ser útil para que empiecen a ver, tienen que empezar a leer definiciones así. Yo se lo mostraría para que empiecen a verlo cómo se define.	C1I. v-d (F) Las alumnas realizan comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-5	E.15: Sí; pero no sé, creo que usaría otro antes que éste. E.16: Sí, incluso más gráfico. E.17: Sí, más que tanta letra, a lo mejor se pierden. E.15: No me gusta mucho.	C1I. v-e (G) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tabla A.263. Fase inducida. Estudiante E.17.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-8	E.17: Sí, que lo veíamos demasiado formal para utilizarlo en la ESO.	C2I. s-d (A) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU
U-8	E.17: Éste es el que dijimos que era uno de los que no usaríamos. Aunque sigamos considerándolo complicado para el nivel que es.	C1I. g-e (E) La alumna realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.264. Distribución de los comentarios. Estudiante E.17. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.265. Distribución de los comentarios. Estudiante E.17. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.266. Distribución de los comentarios. Estudiante E.17. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.267. Distribución de los comentarios. Estudiante E.17. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	1			(2, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico		2		1	(1, 1, 0, 0)
Simbólico	2			2	(0, 2, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(3, 3, 0, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (6), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1) y d-i.i. (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso de i.v.s.i., y cuando lo acepta es de forma genérica o especificando el tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1), d-i.i. (1) e i.v.s.i. (3).
 - C2: La alumna realiza este tipo de comentarios para i.v.s.i. (3).
 - C3: La alumna no señala ninguna dificultad.
 - C3*: La alumna no describe ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: La alumna realiza estos comentarios para c-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - T: Solo se produce un comentario, de aceptación, para d-i.i.
 - G: La alumna realiza comentarios, de rechazo, para i.v.s.i. (2).
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.268. Componente visual. Estudiante E.17.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D			✓		
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					
		C2I		×		✓(×)	
		C1I	✓×	(×)			

Componente numérico-vectorial

Tabla A.269. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante E.17.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.270. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante E.17.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.271. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante E.17.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.272. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante E.17.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.273. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante E.17.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	2	0	2

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 2 + 2) = (4, 6)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.17. Informe. Estudiante F.18

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que la alumna no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.274. Fase espontánea. Estudiante F.18.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.18: Incluso habiendo estudiado Matemáticas, después de un tiempo sin tocarlas mucho, por decir de algún modo, ni me he enterado, hablando claro; o sea, que directamente los descartaría para, para introducirles esos conceptos a niños de nivel Bachillerato o en 3º o 4º de la ESO.	C2I. SR (F y H) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación verbal y tabular.	NU
U-2	F.21: El F que incluso habla de un cuerpo ordenado y tal... F.19: Ya ves... F.18: Es que ese es una locura.	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-3	F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B. F.18: Yo coincidido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender. F.19: El B es más fácil de entender, sí F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-7	F.18: Yo creo que todos estamos de acuerdo con empezar con algo que se acerque a algo que ya conocen, como por ejemplo el B. F.19: Sí, algo más visual, ¿no? más práctico.	C1C. v-e (B) Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-7	<p>F.18: Yo he puesto una anotación que es que cuando pone el final de la tabla lo de la n tiende a más infinito y la sucesión tiende a menos infinito, yo por ejemplo en la n obviaría lo de tiende a más infinito porque ahí en realidad lo que estamos hablando del concepto de límite de la sucesión, ¿no?; entonces yo creo que les podría dar un poco de confusión ver el más infinito y el menos infinito, vamos quiero decir que..</p> <p>Claro, pero como en teoría lo que estamos intentando es explicarles el límite de la sucesión, yo creo que podrían decir, tiende a más infinito, tiende a menos infinito, o que..., ¿qué está pasando?</p>	<p>C3D. t-e (C)</p> <p>La alumna señala una dificultad en la relación existente entre la variable independiente y la variable dependiente.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Vamos, directamente descartamos H, F, E; H, F, E.</p> <p>F.20: Yo diría que sí.</p> <p>F.18: Sí, sí, H, F, E, yo creo que no... los obviaría.</p>	<p>C1I. SR (H, F y E)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Yo el de la G lo había puesto en nivel intermedio, la verdad.</p> <p>F.20: Yo la G la puse como universitario también.</p> <p>F.19: Yo la verdad que no la pondría para el instituto.</p> <p>F.18: Yo es que no.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	<p>F.18: Yo es que éste, lo del cuerpo ordenado es que no lo explicaría nunca.</p> <p>F.20: Es que le vas a decir esto a un niño el cuerpo ordenado, y se le va a descomponer el cuerpo.</p> <p>F.21: Es que un cuerpo es una estructura bastante avanzada, creo yo, además ordenado, no sé... que no...</p> <p>F.20: Es que además no van a saber lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Un cuerpo, por eso.</p> <p>F.20: Les tienes que explicar lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Y un cuerpo ordenado, es que no sé; tienes que explicarle orden también porque los complejos es un cuerpo que no está ordenado, ¿no?</p> <p>F.20: Encima eso; sí, yo ese no lo pondría para nada.</p>	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad con el término cuerpo.	NU
U-9	F.18: E, F, H como más descartado.	C1I. SR (E, F y H) La alumna realiza un comentario genérico acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-9	<p>F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos.</p> <p>F.18: Los obviamos un poco.</p> <p>F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo.</p> <p>F.20: Sí.</p>	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.275. Distribución de los comentarios. Estudiante F.18. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.276. Distribución de los comentarios. Estudiante F.18. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular		3			(0, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0)

Tabla A.277. Distribución de los comentarios. Estudiante F.18. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.278. Distribución de los comentarios. Estudiante F.18. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 1, 3			(1, 0, 2, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica		2, 1, 1, 1			(3, 1, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(4, 1, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(4, 1, 2, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (7), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2) y d-i.i. (1).

- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso del fenómeno c-i.i., sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso de los fenómenos d-i.i. e i.v.s.i., sin producirse comentarios de rechazo.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (2) e i.v.s.i. (4).
 - C2: la alumna realiza un único comentario para i.v.s.i.
 - C3: La alumna señala dificultades para los fenómenos d-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - C3*: La alumna no describe ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: Es la categoría predominante, c-i.i. (2) de aceptación e i.v.s.i. (3).
 - T: Se produce un único comentario en d-i.i.
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: No se producen comentarios en este sistema de representación.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.279. Componente visual. Estudiante F.18.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D			×		
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×	×			
		C2I					×
		C1I	×				×××

Componente numérico-vectorial

Tabla A.280. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante F.18.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.281. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante F.18.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	1	0	0

Tabla A.282. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante F.18.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.283. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante F.18.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	1	0	0

Tabla A.284. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante F.18.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	7	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 1 + 0) = (4, 2)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 7 + 0) = (0, 14)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.18. Informe. Estudiante F.19

Interpretación

En la interpretación individual se presentan una tabla, ya que no realiza comentarios categorizados en la fase inducida.

Tabla A.285. Fase espontánea. Estudiante F.19.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.21: El F que incluso habla de un cuerpo ordenado y tal... F.19: Ya ves... F.18: Es que ese es una locura.	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-2	F.19: Yo es que no pondría ni el E, ni el F, ni el G... ni el H.	C1I. SR (E, F, G y H) La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tiene un enfoque formal en diferentes sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-3	F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B. F.18: Yo coincido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender. F.19: El B es más fácil de entender, sí. F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.19: D y el J, yo los puse incluso para 3º de la ESO; a lo mejor no cómo para explicar el concepto de límite, pero sí para que les vaya sonando. Ya saben representarlo en una gráfica y ya, pues lo ven gráficamente y ya pues, en 1º de Bachiller ya lo recuerdan, en plan ya lo habían visto en 3º de la ESO pues ya les suena.	C2CD. g-e (D y J) La alumna hipotetiza sobre el curso de impartición de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y que se encuentran en el sistema de representación gráfico.	U
U-5	F.19: ¿Y el G lo pondría en una clase de Bachillerato? Yo éste lo puse ya para universidad, porque yo tampoco le veía yo muy...	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	F.21: Yo es que el A ni lo explicaría, directamente. F.19: ¿Ni en 2º de Bachillerato? F.21: A lo mejor en 2º, pero... F.19: En 2º, pues yo no, yo lo... si lo...	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU
U-7	F.18: Yo creo que todos estamos de acuerdo con empezar con algo que se acerque a algo que ya conocen, como por ejemplo el B. F.19: Sí, algo más visual, ¿no? más práctico.	C1C. v-e (B) Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-9	F.18: Yo el de la G lo había puesto en nivel intermedio, la verdad F.20: Yo la G la puse como universitario también. F.19: Yo la verdad que no la pondría para el instituto. F.18: Yo es que no.	C1I. v-e (G) Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-9	F.19: Del E al H, yo no pondría ninguno. El E, el F, el G y el H.	C1I. SR (E, F, G y H) La alumna realiza un comentario genérico acerca de algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-9	F.21: Yo el G sí, el G a mí sí me mola. F.19: Yo el G lo pondría, pero una vez puesto el A. Yo ese lo pondría después del A, como ejemplo inmediato.	C1I. v-e (G) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tienen un enfoque formal y sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-9	F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos. F.18: Los obviamos un poco. F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo. F.20: Sí.	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.286. Distribución de los comentarios. Estudiante F.19. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 1				(2, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.287. Distribución de los comentarios. Estudiante F.19. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.288. Distribución de los comentarios. Estudiante F.19. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico	2				(0, 1, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)

Tabla A.289. Distribución de los comentarios. Estudiante F.19. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	3, 2, 1			(2, 1, 1, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico		2			(0, 1, 0, 0)
No indica		1, 1, 1			(3, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(4, 2, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(5, 2, 1, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (8), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (2) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos c-i.i. e intuitivos, sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., y cuando lo acepta es de forma genérica.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (2) e i.v.s.i. (5).
 - C2: La alumna realiza comentarios para intuitivos (1).
 - C3: La alumna solo señala un único comentario para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna no describe ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: Es la categoría predominante, c-i.i. (2) e i.v.s.i. (4).
 - T: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - G: Se produce un único comentario en intuitivos.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.290. Componente visual. Estudiante F.19.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD		✓			
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×				
		C2I	×			×	
		C1I	✓×				XXXX

Componente numérico-vectorial

Tabla A.291. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante F.19.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.292. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante F.19.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.293. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante F.19.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.294. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante F.19.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.295. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante F.19.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	7	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 7 + 0) = (2, 14)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.19. Informe. Estudiante F.20

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que la alumna no realiza ningún comentario en la fase inducida.

Tabla A.296. Fase espontánea. Estudiante F.20.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.20: Yo creo que después de dar los ejemplos sí estaría bien introducirlo. No, de esto de primera hora es verdad que es muy de carrera.	C1I. s-d (A) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B. F.18: Yo coincido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender. F.19: El B es más fácil de entender, sí. F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Yo primero empezaría trabajando con los más infinito, entonces enseñaría el B, el K y el D. F.21: Y el D también. F.20: Y entonces ya después les daría la parte de cuando tiende a menos infinito, y daría los análogos: el I, el C y el J.	C1CD. SR (B, K, D, I, C y J) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Al principio lo pensé así y después dije es que, claro en realidad mejor prefiero que entiendan al más infinito y vean una cosa más visual como el D y el K, que también está así con la tabla bien explicado.	C1C. g-e y t-e (D y K) La alumna realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y sistema de representación gráfico y tabular, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	<p>F.18: Vamos, directamente descartamos H, F, E; H, F, E.</p> <p>F.20: Yo diría que sí.</p> <p>F.18: Sí, sí, H, F, E, yo creo que no... los obviaría.</p>	<p>C1I. SR (H, F y E)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Yo el de la G lo había puesto en nivel intermedio, la verdad.</p> <p>F.20: Yo la G la puse como universitario también.</p> <p>F.19: Yo la verdad que no la pondría para el instituto.</p> <p>F.18: Yo es que no.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Las alumnas realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-9	<p>F.18: Yo es que éste, lo del cuerpo ordenado es que no lo explicaría nunca.</p> <p>F.20: Es que le vas a decir esto a un niño el cuerpo ordenado, y se le va a descomponer el cuerpo.</p> <p>F.21: Es que un cuerpo es una estructura bastante avanzada, creo yo, además ordenado, no sé... que no...</p> <p>F.20: Es que además no van a saber lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Un cuerpo, por eso.</p> <p>F.20: Les tienes que explicar lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Y un cuerpo ordenado, es que no sé; tienes que explicarle orden también porque los complejos es un cuerpo que no está ordenado, ¿no?</p> <p>F.20: Encima eso; sí, yo ese no lo pondría para nada.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad con el término cuerpo.</p>	NU
U-9	<p>F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos.</p> <p>F.18: Los obviamos un poco.</p> <p>F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo.</p> <p>F.20: Sí.</p>	<p>C1I. SR (E, F y H)</p> <p>Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.297. Distribución de los comentarios. Estudiante F.20. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(3, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(3, 0, 0, 0)

Tabla A.298. Distribución de los comentarios. Estudiante F.20. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.299. Distribución de los comentarios. Estudiante F.20. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.300. Distribución de los comentarios. Estudiante F.20. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		1, 3			(2, 1, 1, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	1				(0, 1, 0, 0)
No indica		1, 1			(3, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(3, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(4, 0, 1, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (5), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (3) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., y cuando lo acepta es de forma genérica.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (3), intuitivos (1) e i.v.s.i. (4)
 - C2: La alumna no realiza ningún comentario de este tipo.
 - C3: La alumna solo identifica dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna no describe ninguno de los fenómenos.
- Sistema de representación.
 - V: La alumna realiza comentarios de aceptación para c-i.i. (1) y de rechazo para i.v.s.i. (2).
 - T: Se produce un único comentario, de aceptación, para c-i.i. (1).
 - G: Se produce un único comentario, de aceptación, para c-i.i. (1).
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.301. Componente visual. Estudiante F.20.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓	✓	✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×				
		C2I					
		C1I	×			✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.302. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante F.20.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.303. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante F.20.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.304. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante F.20.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.305. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante F.20.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	0	0	0

Tabla A.306. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante F.20.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	4	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 4 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (8, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 4 + 0) = (2, 8)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.20. Informe. Estudiante F.21

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.307. Fase espontánea. Estudiante F.21.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	F.21: El fragmento A, que es la definición del límite realmente. No sé, yo lo veo muy avanzado para verlo en la ESO, y recuerdo que cuando me lo dieron a mí en 1º de Bachillerato no lo recibí bien.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	NU
U-2	F.21: El F que incluso habla de un cuerpo ordenado y tal... F.19: Ya ves... F.18: Es que ese es una locura.	C3I. v-d (F) Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-3	F.20: Yo para un instituto, la verdad, el primero que pondría sería el B. F.18: Yo coincido contigo también, es el primero que he puesto: es muy fácil de entender. F.19: El B es más fácil de entender, sí F.21: El B, aquí es el más sencillo porque no es el de n que es demasiado sencillo, algo distinto, sí.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	F.20: Yo primero empezaría trabajando con los más infinito, entonces enseñaría el B, el K y el D. F.21: Y el D también. F.20: Y entonces ya después les daría la parte de cuando tiende a menos infinito, y daría los análogos: el I, el C y el J.	C1CD. SR (B, K, D, I, C y J) Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque intuitivo en diferentes sistemas de representación aceptando su utilización en el aula.	U
U-5	F.21: Yo es que el A ni lo explicaría, directamente. F.19: ¿Ni en 2º de Bachillerato? F.21: A lo mejor en 2º, pero... F.19: En 2º, pues yo no, yo lo... si lo...	C2I. s-d (A) Los alumnos hipotetizan sobre el curso de impartición del fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentran en el sistema de representación simbólico.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	<p>F.18: Yo es que éste, lo del cuerpo ordenado es que no lo explicaría nunca.</p> <p>F.20: Es que le vas a decir esto a un niño el cuerpo ordenado, y se le va a descomponer el cuerpo.</p> <p>F.21: Es que un cuerpo es una estructura bastante avanzada, creo yo, además ordenado, no sé... que no...</p> <p>F.20: Es que además no van a saber lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Un cuerpo, por eso.</p> <p>F.20: Les tienes que explicar lo que es un cuerpo.</p> <p>F.21: Y un cuerpo ordenado, es que no sé; tienes que explicarle orden también porque los complejos es un cuerpo que no está ordenado, ¿no?</p> <p>F.20: Encima eso; sí, yo ese no lo pondría para nada.</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad con el término cuerpo</p>	NU
U-9	<p>F.21: Yo el G sí, el G a mí sí me mola.</p> <p>F.19: Yo el G lo pondría, pero una vez puesto el A.</p> <p>Yo ese lo pondría después del A, como ejemplo inmediato.</p>	<p>C1I. v-e (G)</p> <p>Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca del fragmento que tienen un enfoque formal y sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.</p>	U
U-9	<p>F.21: Es que además te da un ejemplo con ese, dice tú coge un número supergrande, vale, por ejemplo 100 millones, pues con el $n = 10\,000$, es 100 millones 1, entonces como que cualquier número que cojas puedes coger un n.</p>	<p>C3*I. v-e (G)</p> <p>El alumno identifica el fenómeno i.v.s.i. realizando una explicación del mismo, motivo que le lleva a aceptar la impartición de este fragmento en el aula.</p>	U
U-9	<p>F.21: Y el fragmento E, F y H no los utilizaríamos.</p> <p>F.18: Los obviamos un poco.</p> <p>F.19: Son demasiado nivel para un Bachiller, yo creo.</p> <p>F.20: Sí.</p>	<p>C1I. SR (E, F y H)</p> <p>Los alumnos realizan diferentes comentarios genéricos acerca algunos de los fragmentos que tienen un enfoque formal en distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU

Tabla A.308. Fase inducida. Estudiante F.21.

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-10	F.21:	Yo lo veo intuitivo en el sentido de que te dicen con cualquier número que coja, por ejemplo y utilizando un número muy grande, te puedo dar un número que al cuadrado+1 es más mayor.	C3*I. v-e (G)	El alumno identifica el fenómeno c-i.i. realizando una explicación del mismo. Dado que en este fragmento se identifica i.v.s.i. se considera que ha existido una transición.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.309. Distribución de los comentarios. Estudiante F.21. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.310. Distribución de los comentarios. Estudiante F.21. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.311. Distribución de los comentarios. Estudiante F.21. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	1				(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.312. Distribución de los comentarios. Estudiante F.21. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1, 3*	3, 3	3*		(1, 0, 2, 2)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico		2, 2			(0, 2, 0, 0)
No indica		1			(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 1)	(1, 2, 2, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 0)	(2, 2, 2, 2)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (8), que para la suma de c-i.i. (1) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - El alumno rechaza el fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (2).
 - C2: El alumno solo realiza este tipo de comentarios para i.v.s.i. (2).
 - C3: El alumno solo identifica dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: El alumno solo describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: Es el sistema de representación predominante, c-i.i. (1) e i.v.s.i. (5).
 - T: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.313. Componente visual. Estudiante F.21.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					✓
Formal	i.v.s.i.	C3*I	✓ <input checked="" type="checkbox"/>				
		C3I	××				
		C2I				××	
		C1I	✓				×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.314. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante F.21.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.315. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante F.21.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.316. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante F.21.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.317. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante F.21.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.318. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante F.21.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	5	1	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 5 + 0) = (5, 10)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).

A3.5.21. Informe. Estudiante G.22

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.319. Fase espontánea. Estudiante G.22.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>G.23: Hay unas cuantas aquí es que no las pondría en la vida, sobre todo el fragmento E no lo pondría, el H tampoco lo pondría, es que son cosas que nosotros...</p> <p>G.22: Yo directamente he puesto que no los pondría también</p> <p>G.24: Yo tampoco los pondría.</p> <p>G.23: Es que lo veo superlioso. Yo eso lo veo vaya... fatal, vaya, que no lo vas a entender seguro.</p> <p>G.24: Yo me lo he leído y no, lo acabaría entendiendo si le dedicara bastante tiempo; a lo mejor si me lo explican pues sí que lo entendería, pero no sé, no lo veo claro como para utilizarlo.</p>	<p>C1I. SR (E y H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de fragmentos que tienen un enfoque formal y un sistema de representación tabular y gráfico, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-5	<p>G.22: Yo el fragmento F lo que he visto es que por ejemplo habla de <u>cuerpo ordenado</u>, de un cuerpo.</p> <p>G.23: Claro, pero lo de, es que lo de cuerpo, utiliza el cuerpo, entonces si le dices un cuerpo ordenado, lo único que van a pensar ellos de cuerpo es un cuerpo humano, y no va a tener sentido, no, vaya, esa fatal</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.</p>	NU
U-5	<p>G.22: Yo la metería, pero claro en <u>cursos altos</u>.</p> <p>G.23: Para la gente que esté más interesada en matemáticas o les guste más, y los demás alumnos pues que se queden con el concepto, de la otra forma, y ellos que como que avancen más o se les introduzca por si en un futuro quieren estudiar una carrera de ciencias o algo.</p>	<p>C2I. s-d (A)</p> <p>El alumno hipotetiza sobre el tipo de alumnado al que le impartiría el fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.</p>	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>G.22: Yo no lo miraría como, yo no lo consideraría como, o sea que esto es lo que tienen que saber y esto es lo que yo voy a evaluar que sepan, yo esto lo evaluaría porque seguro que hay personas que, a lo mejor, no van a ver esto más en la vida o no lo entienden porque les cueste más trabajo y es normal, porque esto son cosas de carrera, pienso yo; pero sí para que lo vean y entiendan un poco el lenguaje y sepan lo que significa, y cómo se escribe, para que se habitúen, vamos; si después les gusta de verdad, pues mejor.</p> <p>G.23: Como primera definición la descartaría totalmente y ... pero sí, es lo que he dicho antes, la metería una vez que hubiese explicado el concepto de límite bien y lo hubiesen entendido todo.</p>	<p>C1I. s-d (A)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.</p>	U

Tabla A.320. Fase inducida. Estudiante G.22.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	G.22: Ven que no está acotada superiormente la sucesión porque siempre crece.	<p>C3*C. v-e (B)</p> <p>La alumna realiza un comentario sobre el propio fenómeno c-i.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.</p>	U
U-9	<p>G.22: Nunca lo utilizaría; pero eso sí, estar, está; yo creo que sí, que está porque se ven los números, se ve que si coges, que si fijas un H más un... bueno sí se ve pero que no lo utilizaría nunca, ¡vaya!</p> <p>G.24: Ya, yo tampoco.</p> <p>G.22: Porque es que esa forma de representarlo yo no sé ni comentar esa tabla, me costaría trabajo entenderla, ¡vaya!</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazado su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.321. Distribución de los comentarios. Estudiante G.22. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.322. Distribución de los comentarios. Estudiante G.22. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.323. Distribución de los comentarios. Estudiante G.22. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.324. Distribución de los comentarios. Estudiante G.22. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3	3*		(0, 0, 1, 1)
Tabular				1	(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	2, 1				(1, 1, 0, 0)
No indica		1			(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 0)	(3, 1, 1, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- La alumna solo ha registrado comentarios para el fenómeno formal, i.v.s.i.
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, i.v.s.i. (3).
 - C2: La alumna realiza un único comentario, de aceptación, para i.v.s.i.
 - C3: La alumna solo identifica dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna solo describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: La alumna utiliza este sistema de representación tanto para aceptar como para rechazar fragmentos.
 - T: La alumna realiza un único comentario para este sistema de representación.
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.325. Componente visual. Estudiante G.22.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I	<input checked="" type="checkbox"/>				
		C3I	×				
		C2I				✓	
		C1I			⊗	✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.326. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante G.22.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.327. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante G.22.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.328. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante G.22.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.329. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante G.22.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.330. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante G.22.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	2	1	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 0 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (0, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 2 + 1) = (5, 5)$$

Perfil fenomenológico (0, D+, m).

A3.5.22. Informe. Estudiante G.23

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.331. Fase espontánea. Estudiante G.23.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	G.23: Porque te da como una tabla, que ahí es súper visible, la verdad, porque te vienen los valores, por ejemplo en la K, en el fragmento K te vienen los valores de n , los valores que le vas dando a la n y lo que te va saliendo de la sucesión, y claro te dice que cuando n tiende a infinito pues la sucesión a_n tiende infinito; entonces, yo es la que veo más clara para explicarle a los alumnos.	C1C. t-e (K) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.	U
U-2	G.24: Y el fragmento K y C pues los pondría a continuación, pero en la misma clase todo, que eso se explica el concepto rápido y luego después de eso. G.23: Después de, el de la gráfica, el de la gráfica por lo menos también, siempre los alumnos al ver una gráfica se interesan más. Y en la gráfica más o menos se ve como decrecimiento de una sucesión y te explica más o menos bien cómo tienden a infinito.	C1CD. t-e (C y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de dos fragmentos que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	G.23: El fragmento G, lo tengo puesto yo creo que de los últimos; bueno, hay unos cuantos que ni los he puesto, pero de los que he puesto es de los últimos porque lo veo como un poco más liso para los niños G.24: Yo lo veo un poco sencillito, no sé; el fragmento G yo lo pondría también de los primeros, incluso antes de la gráfica porque habla no sé cómo, habla de un listón ahí, que es algo más, no es lenguaje matemático, es lenguaje más coloquial.	C1I. v-e (G) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula. Además, hay que destacar que se produce una transición, porque observa una parte intuitiva cuando realmente se trata de un fragmento formal.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>G.23: Hay unas cuantas aquí es que no las pondría en la vida, sobre todo el fragmento E no lo pondría, el H tampoco lo pondría, es que son cosas que nosotros...</p> <p>G.22: Yo directamente he puesto que no los pondría también.</p> <p>G.24: Yo tampoco los pondría.</p> <p>G.23: Es que lo veo superlioso. Yo eso lo veo vaya... fatal, vaya, que no lo vas a entender seguro.</p> <p>G.24: Yo me lo he leído y no, lo acabaría entendiendo si le dedicara bastante tiempo; a lo mejor si me lo explican pues sí que lo entendería, pero no sé, no lo veo claro como para utilizarlo.</p>	<p>C1I. SR (E y H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de fragmentos que tienen un enfoque formal y un sistema de representación tabular y gráfico, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-5	<p>G.23: Lo bueno del H es que te viene como otra tablita, que es lo que hemos dicho antes que con la tablita siempre es más fácil; entonces si le sabes explicar bien la tablita los valores de n, a_n, H y v, le vas explicando bien, claro, con la tablita a lo mejor estaría ... la verdad que más claro; con la tablita la verdad que a mí me parece bastante mejor; si no hubiese tablita absolutamente no, pero con la tablita por lo menos sí puedes ir explicando y te vas ayudando de, aunque sea lioso.</p>	<p>C3I. t-e (H)</p> <p>El alumno señala una dificultad en el sistema de representación tabular utilizado en el fragmento que ha sido creado de forma explícita para este cuestionario.</p>	U
U-5	<p>G.22: Yo el fragmento F lo que he visto es que por ejemplo habla de cuerpo ordenado, de un cuerpo.</p> <p>G.23: Claro, pero lo de, es que lo de cuerpo, utiliza el cuerpo, entonces si le dices un cuerpo ordenado, lo único que van a pensar ellos de cuerpo es un cuerpo humano, y no va a tener sentido, no, vaya, esa fatal</p>	<p>C3I. v-d (F)</p> <p>Los alumnos señalan una dificultad en con el término cuerpo ordenado.</p>	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	G.22: Yo la metería, pero claro en cursos altos. G.23: Para la gente que esté más interesada en matemáticas o les guste más, y los demás alumnos pues que se queden con el concepto, de la otra forma, y ellos que como que avancen más o se les introduzca por si en un futuro quieren estudiar una carrera de ciencias o algo.	C2I. s-d (A) El alumno hipotetiza sobre el tipo de alumnado al que le impartiría el fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación simbólico.	U
U-5	G.22: Yo no lo miraría como, yo no lo consideraría como, o sea que esto es lo que tienen que saber y esto es lo que yo voy a evaluar que sepan, yo esto lo evaluaría porque seguro que hay personas que, a lo mejor, no van a ver esto más en la vida o no lo entienden porque les cueste más trabajo y es normal, porque esto son cosas de carrera, pienso yo; pero sí para que lo vean y entiendan un poco el lenguaje y sepan lo que significa, y cómo se escribe, para que se habitúen, vamos; si después les gusta de verdad, pues mejor. G.23: Como primera definición la descartaría totalmente y ... pero sí, es lo que he dicho antes, la metería una vez que hubiese explicado el concepto de límite bien y lo hubiesen entendido todo.	C1I. s-d (A) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U

Tabla A.332. Fase inducida. Estudiante G.23.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	G.23: Es otra definición, solo que más, como más compleja porque ya te hablan de cuerpo, te hablan de otras cosas. Hablándote de cuerpo, de cuerpo ordenado.	C3*I. v-d (F) La alumna realiza un comentario sobre el propio fenómeno i.v.s.i., sin especificar un cambio con respecto a la fase espontánea.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.333. Distribución de los comentarios. Estudiante G.23. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.334. Distribución de los comentarios. Estudiante G.23. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.335. Distribución de los comentarios. Estudiante G.23. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.336. Distribución de los comentarios. Estudiante G.23. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1	3		3*	(1, 0, 1, 1)
Tabular	3				(0, 0, 1, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	2, 1				(1, 1, 0, 0)
No indica		1			(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 1, 1, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(3, 1, 2, 1)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (7), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - El alumno acepta el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (3).
 - C2: El alumno realiza un único comentario, de aceptación, para i.v.s.i.
 - C3: El alumno solo identifica dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: El alumno solo describe el fenómeno i.v.s.i.
- Sistema de representación.
 - V: El alumno utiliza los comentarios en este sistema de representación para el fenómeno i.v.s.i.
 - T: El alumno realiza comentarios de aceptación, c-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (1).
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.337. Componente visual. Estudiante G.23.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C			✓		
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I	⊗				
		C3I	×		✓		
		C2I				✓	
		C1I	✓			✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.338. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante G.23.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.339. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante G.23.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.340. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante G.23.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.341. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante G.23.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.342. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante G.23.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	2	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 4 + 0, 2 \cdot 2 + 1) = (8, 5)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.5.23. Informe. Estudiante G.24

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.343. Fase espontánea. Estudiante G.24.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-2	G.24: Yo lo metería en la misma clase porque esto se explica creíble el fragmento B.	C1C. v-e (B) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-2	G.24: Y el fragmento K y C pues los pondría a continuación, pero en la misma clase todo, que eso se explica el concepto rápido y luego después de eso. G.23: Después de, el de la gráfica, el de la gráfica por lo menos también, siempre los alumnos al ver una gráfica se interesan más. Y en la gráfica más o menos se ve como decrecimiento de una sucesión y te explica más o menos bien cómo tienden a infinito.	C1CD. t-e (C y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de dos fragmentos que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	G.23: El fragmento G, lo tengo puesto yo creo que de los últimos; bueno, hay unos cuantos que ni los he puesto, pero de los que he puesto es de los últimos porque lo veo como un poco más liso para los niños. G.24: Yo lo veo un poco sencillito, no sé; el fragmento G yo lo pondría también de los primeros, incluso antes de la gráfica porque habla no sé cómo, habla de un listón ahí, que es algo más, no es lenguaje matemático, es lenguaje más coloquial.	C1I. v-e (G) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula. Además, hay que destacar que se produce una transición, porque observa una parte intuitiva cuando realmente se trata de un fragmento formal.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-5	<p>G.23: Hay unas cuantas aquí es que no las pondría en la vida, sobre todo el fragmento E no lo pondría, el H tampoco lo pondría, es que son cosas que nosotros...</p> <p>G.22: Yo directamente he puesto que no los pondría también.</p> <p>G.24: Yo tampoco los pondría.</p> <p>G.23: Es que lo veo superlioso. Yo eso lo veo vaya... fatal, vaya, que no lo vas a entender seguro.</p> <p>G.24: Yo me lo he leído y no, lo acabaría entendiendo si le dedicara bastante tiempo; a lo mejor si me lo explican pues sí que lo entendería, pero no sé, no lo veo claro como para utilizarlo.</p>	<p>C1I. SR (E y H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de fragmentos que tienen un enfoque formal y un sistema de representación tabular y gráfico, rechazando su utilización en el aula.</p>	NU
U-5	<p>G.24: Yo sí que la metería porque está bien habituarse con el lenguaje matemático un poco.</p>	<p>C1I. s-d (A)</p> <p>El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.</p>	U

Tabla A.344. Fase inducida. Estudiante G.24.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-9	<p>G.22: Nunca lo utilizaría; pero eso sí, estar, está; yo creo que sí, que está porque se ven los números, se ve que si coges, que si fijas un H más un... bueno sí se ve pero que no lo utilizaría nunca, ¡vaya!</p> <p>G.24: Ya, yo tampoco.</p> <p>G.22: Porque es que esa forma de representarlo yo no sé ni comentar esa tabla, me costaría trabajo entenderla, ¡vaya!</p>	<p>C1I. t-e (H)</p> <p>Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación tabular, rechazado su utilización en el aula.</p>	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.345. Distribución de los comentarios. Estudiante G.24. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.346. Distribución de los comentarios. Estudiante G.24. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.347. Distribución de los comentarios. Estudiante G.24. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.348. Distribución de los comentarios. Estudiante G.24. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular				1	(1, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico	1				(1, 0, 0, 0)
No indica		1			(1, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(4, 0, 0, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (4), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1) e intuitivos (1).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos de enfoque intuitivo, sin producirse comentarios de rechazo.
 - El alumno acepta el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: El alumno solo realiza comentarios de este tipo, genéricos, c-i.i. (1), intuitivos (1) e i.v.s.i. (4).
 - C2: No se producen comentarios de este tipo.
 - C3: El alumno no identifica ninguna dificultad.
 - C3*: El alumno no describe ningún fenómeno.
- Sistema de representación.
 - V: El alumno utiliza este sistema de representación para aceptar los fenómenos c-i.i. e i.v.s.i.
 - T: El alumno utiliza estos comentarios para aceptar intuitivos y rechazar i.v.s.i.
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (4) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.349. Componente visual. Estudiante G.24.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD			✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					
		C2I					
		C1I	✓		⊗	✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.350. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante G.24.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.351. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante G.24.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.352. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante G.24.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.353. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante G.24.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.354. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante G.24.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	1	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 1 + 1) = (4, 3)$$

Perfil fenomenológico (N+, D+, M).

A3.5.24. Informe. Estudiante H.25

Interpretación

En la interpretación individual se presentan dos tablas, una para la fase espontánea y otra para la fase inducida.

Tabla A.355. Fase espontánea. Estudiante H.25.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.25: Fragmento A. Yo lo veo demasiado formal y demasiado... H.26: Sí, es como la definición matemática que yo pondría después de los, de los ejemplos.	C1I. s-d (A) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	H.26: Para mí los ejemplos correctos son C y D, y sus respectivos negativos que están por ahí. Eso es mi idea, de ponerle primero unos ejemplos con una serie determinada y con los resultados de esa serie que intuitivamente se ve que tiende a menos infinito. H.25: Sí, ésta es super intuitiva. H.26: La C, la D es igual de intuitiva que la, o sea la D es igual de intuitiva que la C, pero gráficamente.	C1CD. t-e y g-e (C, D, J y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular y gráfico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-4	H.25: Yo lo veo una definición demasiado, no sé... H.26: Mete cuerpo ordenado, hay más... Álgebra de por medio. H.25: El F lo quitaba de concepto. H.26: Ya, complicado, complicado H.25: Yo, el fragmento F lo quitaba, respecto no creo que tenga un lenguaje ni un...	C3I. v-d (F) La alumna señala una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-4	H.27: Yo quitaba... H.26: El E tampoco. H.25: El E y el F los quitamos en contenido, bueno para poder... H.27: Y si quitamos el E y el F, también quitamos el H.	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-4	H.26: El H, correcto, yo también lo quitaba. Igual que el anterior: mi motivo es porqué metes 2 variables más, H y v , que tienes que entenderlas. H.25: Que yo no las entendía tampoco; bueno, no las entiendo ahora de, de no recuerdo. H.26: Yo ahora mismo tampoco sé explicarlo.	C3I. SR (E, F y H) Los alumnos señalan una dificultad en las dos variables utilizadas en el sistema de representación verbal que no corresponden con la variable independiente n , ni la variable dependiente a_n .	NU
U-4	H.25: El H, ampliando conocimientos dependiendo de cómo fuese en el aula ¿no?, a lo mejor dependiendo de cómo fuese el grupo general, digamos que con el otro tienen el concepto de límite, pero si en general todos y comprobando que todos hayan entendido el concepto sí se podría profundizar un poco más a nivel gráfico, pero el E y el H, si la clase en general si ha entendido el contenido lo suficiente... H.27: Sí, sí, si es una clase avanzada.	C2I. SR (H y E) Las alumnas hipotetizan sobre el tipo de clase al que le impartiría dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que han sido creados de forma explícita para este cuestionario.	U
U-4	H.25: El F es más definición, no lo utilizaría.	C1I. v-d (F) La alumna realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico y tabular, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-4	H.25: Sí los metería porque son también gráficos ya metes otros conceptos, no simplemente lo que es numérico y lo otro, sino que también metes algo de gráfica, entonces estás utilizando más competencias visuales en el aprendizaje del concepto; pues entonces eso.	C3I. g-e y t-e (E y H) Los alumnos señalan una dificultad asociada al sistema de representación gráfico.	U

Tabla A.356. Fase inducida. Estudiante H.25.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-11	H.25: Como no es tan adecuado, desde mi punto de vista no es tan adecuado porque el lenguaje que utiliza ya no es un lenguaje de; a lo mejor para gente de Bachillerato tienen que tener	C2I. v-e (G) La alumna hipotetiza sobre el nivel educativo en el que impartiría el fragmento que tiene un enfoque formal y que se encuentra en el sistema de representación verbal.	NU

Tablas de distribución.

Tabla A.357. Distribución de los comentarios. Estudiante H.25. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.358. Distribución de los comentarios. Estudiante H.25. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.359. Distribución de los comentarios. Estudiante H.25. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.360. Distribución de los comentarios. Estudiante H.25. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal		3, 1		2	(1, 1, 1, 0)
Tabular	3				(0, 0, 1, 0)
Gráfico	3				(0, 0, 1, 0)
Simbólico	1				(1, 0, 0, 0)
No indica	2	1, 3			(1, 1, 1, 0)
Subtotales	(1, 1, 2, 0)	(2, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)	(3, 2, 4, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9) que para intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso de los fenómenos intuitivos, sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, intuitivos (2) e i.v.s.i. (3).
 - C2: Solo se producen este tipo de comentarios para i.v.s.i. (2).
 - C3: La alumna identifica dificultades solo para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna no describe ningún fenómeno.
- Sistema de representación.
 - V: Los comentarios en este sistema de representación solo se identifican para el fenómeno i.v.s.i.
 - T: La alumna utiliza este sistema de representación para realizar comentarios de aceptación.
 - G: La alumna utiliza este sistema de representación para realizar comentarios de aceptación.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (1) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.*Componente visual*

Tabla A.361. Componente visual. Estudiante H.25.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C					
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD		✓	✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	×	✓	✓		×
		C2I	⊗				✓
		C1I	×			✓	×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.362. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante H.25.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.363. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante H.25.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.364. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante H.25.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.365. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante H.25.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.366. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante H.25.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	4	0	1

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 2 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (4, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 4 + 0, 2 \cdot 4 + 1) = (8, 9)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.25. Informe. Estudiante H.26

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que este alumno no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.367. Fase espontánea. Estudiante H.26.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.25: Fragmento A. Yo lo veo demasiado formal y demasiado... H.26: Sí, es como la definición matemática que yo pondría después de los, de los ejemplos.	C1I. s-d (A) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	H.26: Para mí los ejemplos correctos son C y D, y sus respectivos negativos que están por ahí. Eso es mi idea, de ponerle primero unos ejemplos con una serie determinada y con los resultados de esa serie que intuitivamente se ve que tiende a menos infinito. H.25: Sí, ésta es super intuitiva. H.26: La C, la D es igual de intuitiva que la, o sea la D es igual de intuitiva que la C, pero gráficamente.	C1CD. t-e y g-e (C, D, J y K) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca de los fragmentos que tienen un enfoque intuitivo y un sistema de representación tabular y gráfico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-3	H.26: Es que yo los demás los tachaba ya todos; por eso te estoy diciendo los que sí.	C1I. SR (E, F, G y H) El alumno realiza un comentario genérico acerca de diferentes fragmentos que tienen un enfoque formal y diferentes sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-3	H.27: Hombre, yo pondría primero el B porque hace la operación fácil, también. H.26: También. H.27: Y ya está.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.26: Sí, el A como el final; ya una vez que has entendido que tiende a infinito.	C1I. s-d (A) El alumno realiza un comentario genérico acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación simbólico, aceptando su utilización en el aula.	U
U-4	H.26: Yo lo quitaba. Pero estás metiendo ahí, es que estás metiendo más variables ahí, que si H , v , no sé qué no sé cuánto, al final... déjalo para...	C1I- g-e (E) El alumno realiza comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y un sistema de representación gráfico, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-4	H.25: Yo lo veo una definición demasiado, no sé... H.26: Mete cuerpo ordenado, hay más... Álgebra de por medio. H.25: El F lo quitaba de concepto. H.26: Ya, complicado, complicado. H.25: Yo, el fragmento F lo quitaba, respecto no creo que tenga un lenguaje ni un...	C3I. v-d (F) La alumna señala una dificultad en con el término cuerpo ordenado.	NU
U-4	H.26: El G no está mal de definición después de la A, quizás, porque no deja de ser una definición con la palabra listón qué es un término ahí, como... ¿me entiendes?	C3I. v-e (G) El alumno señala una dificultad con el término listón, utilizando sistema de representación verbal.	U
U-4	H.27: Yo quitaba... H.26: El E tampoco. H.25: El E y el F los quitamos en contenido, bueno para poder... H.27: Y si quitamos el E y el F, también quitamos el H.	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
	H.26: El H, correcto, yo también lo quitaba. Igual que el anterior: mi motivo es porqué metes 2 variables más, H y v , que tienes que entenderlas. H.25: Que yo no las entendía tampoco; bueno, no las entiendo ahora de, de no recuerdo. H.26: Yo ahora mismo tampoco sé explicarlo.	C3I. SR (E, F y H) Los alumnos señalan una dificultad en las dos variables utilizadas en el sistema de representación verbal que no corresponden con la variable independiente n , ni la variable dependiente a_n .	NU

U. Inf.	Estudiante.	Transcripción	Categoría.	Comentarios	U-NU
U-7	H.26:	El fragmento E lo que si lo puedo ver es como un nivel superior de entendimiento de las matemáticas para hacer una demostración determinada, que te hagan falta variables aparte pero no para el entendimiento en sí del concepto de sucesión a niveles más bajos; yo creo que con lo que hemos dicho.	C3I. g-e (E)	Los alumnos señalan una dificultad en la inclusión de nuevas variables además de la variable independiente n y la variable dependiente a_n .	U

Tablas de distribución.

Tabla A.368. Distribución de los comentarios. Estudiante H.26. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.369. Distribución de los comentarios. Estudiante H.26. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.370. Distribución de los comentarios. Estudiante H.26. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular	1				(1, 0, 0, 0)
Gráfico	1				(1, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(2, 0, 0, 0)

Tabla A.371. Distribución de los comentarios. Estudiante H.26. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	3	3			(0, 0, 2, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico	3	1			(1, 0, 1, 0)
Simbólico	1, 1				(2, 0, 0, 0)
No indica		1, 1, 3			(2, 0, 1, 0)
Subtotales	(2, 0, 2, 0)	(3, 0, 2, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(5, 0, 4, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (9), que para la suma de los que tienen un enfoque intuitivo; c-i.i. (1) e intuitivos (2).
- Uso/No uso
 - El alumno acepta el uso de los fenómenos intuitivos, sin producirse comentarios de rechazo.
 - El alumno rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1), intuitivos (2) e i.v.s.i. (5).
 - C2: No se han producido comentarios de este tipo.
 - C3: El alumno solo ha identificado dificultades del fenómeno i.v.s.i.
 - C3*: El alumno no describe ningún fenómeno.

- Sistema de representación.
 - V: El alumno realiza comentarios en este sistema de representación para el fenómeno c-i.i. (1) e i.v.s.i. (2).
 - T: El alumno utiliza este sistema de representación para realizar un comentario de aceptación.
 - G: El alumno acepta intuitivos y realiza comentarios de aceptación y rechazo para i.v.s.i.
 - S: Sólo hay comentarios para i.v.s.i. (2) porque no existían fragmentos con enfoque intuitivo en el cuestionario.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.372. Componente visual. Estudiante H.26.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD		✓	✓		
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I	✓×	✓			×
		C2I					
		C1I		×		✓✓	××

Componente numérico-vectorial

Tabla A.373. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante H.26.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.374. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante H.26.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.375. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante H.26.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
2	0	0	0

Tabla A.376. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante H.26.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
3	0	0	0

Tabla A.377. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante H.26.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
4	5	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{\text{intuitivo}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 3 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (6, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{\text{formal}} = (v_{\text{uso}}, v_{\text{nouso}}) = (2 \cdot 4 + 0, 2 \cdot 5 + 0) = (8, 10)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, M).

A3.5.26. Informe. Estudiante H.27

Interpretación

En la interpretación individual se presenta una tabla, ya que la alumna no realiza ningún comentario categorizado en la fase inducida.

Tabla A.378. Fase espontánea. Estudiante H.27.

U. Inf.	Estudiante. Transcripción	Categoría. Comentarios	U-NU
U-3	H.27: Hombre, yo pondría primero el B porque hace la operación fácil, también. H.26: También. H.27: Y ya está.	C1C. v-e (B) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque intuitivo y un sistema de representación verbal, aceptando su utilización en el aula.	U
U-4	H.27: Yo quitaba... H.26: El E tampoco. H.25: El E y el F los quitamos en contenido, bueno para poder... H.27: Y si quitamos el E y el F, también quitamos el H.	C1I. SR (E, F y H) Los alumnos realizan comentarios genéricos acerca del fragmento que tiene un enfoque formal y distintos sistemas de representación, rechazando su utilización en el aula.	NU
U-4	H.26: El H, correcto, yo también lo quitaba. Igual que el anterior: mi motivo es porqué metes 2 variables más, H y v , que tienes que entenderlas. H.25: Que yo no las entendía tampoco; bueno, no las entiendo ahora de, de no recuerdo. H.26: Yo ahora mismo tampoco sé explicarlo.	C3I. SR (E, F y H) Los alumnos señalan una dificultad en las dos variables utilizadas en el sistema de representación verbal que no corresponden con la variable independiente n , ni la variable dependiente a_n .	NU
U-4	H.25: El H, ampliando conocimientos dependiendo de cómo fuese en el aula ¿no?, a lo mejor dependiendo de cómo fuese el grupo general, digamos que con el otro tienen el concepto de límite, pero si en general todos y comprobando que todos hayan entendido el concepto sí se podría profundizar un poco más a nivel gráfico, pero el E y el H, si la clase en general si ha entendido el contenido lo suficiente... H.27: Sí, sí, si es una clase avanzada.	C2I. SR (H y E) Las alumnas hipotetizan sobre el tipo de clase al que le impartiría dos fragmentos que tienen un enfoque formal y que han sido creados de forma explícita para este cuestionario.	U

Tablas de distribución.

Tabla A.379. Distribución de los comentarios. Estudiante H.27. Fenómeno c-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal	1				(1, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)

Tabla A.380. Distribución de los comentarios. Estudiante H.27. Fenómeno d-i.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.381. Distribución de los comentarios. Estudiante H.27. “Fenómeno” intuitivos.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica					(0, 0, 0, 0)
Subtotales	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)

Tabla A.382. Distribución de los comentarios. Estudiante H.27. Fenómeno i.v.s.i.

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales
Verbal					(0, 0, 0, 0)
Tabular					(0, 0, 0, 0)
Gráfico					(0, 0, 0, 0)
Simbólico					(0, 0, 0, 0)
No indica	2	1, 3			(1, 1, 1, 0)
Subtotales	(0, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 0)

Desarrollo e interpretación.

Se considera el número de comentarios, uso/no uso, las categorías identificadas y el sistema de representación presente.

- Se han registrado más comentarios para el fenómeno i.v.s.i. (3) que para c-i.i. (1).
- Uso/No uso
 - La alumna acepta el uso del fenómeno c-i.i. (1), sin producirse comentarios de rechazo.
 - La alumna rechaza el uso del fenómeno i.v.s.i., y cuando lo acepta es para un tipo de alumnado.
- Categorías
 - C1: Es la categoría predominante, c-i.i. (1) e i.v.s.i. (1).
 - C2: Solo se producen este tipo de comentarios para i.v.s.i. (1).
 - C3: La alumna identifica dificultades para i.v.s.i.
 - C3*: La alumna no describe ningún fenómeno.
- Sistema de representación.
 - V: Se produce un único comentario, de aceptación, para c-i.i.
 - T: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - G: No se producen comentarios en este sistema de representación.
 - S: No se producen comentarios en este sistema de representación.

Síntesis de la información.

Componente visual

Tabla A.383. Componente visual. Estudiante H.27.

Enfoque	Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	SR
Intuitivo	c-i.i.	C3*C					
		C3C					
		C2C					
		C1C	✓				
	d-i.i.	C3*D					
		C3D					
		C2D					
		C1D					
	intuitivos	C3*CD					
		C3CD					
		C2CD					
		C1CD					
Formal	i.v.s.i.	C3*I					
		C3I					×
		C2I					✓
		C1I					×

Componente numérico-vectorial

Tabla A.384. Recuento de comentarios para el fenómeno c-i.i. Estudiante H.27.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.385. Recuento de comentarios para el fenómeno d-i.i. Estudiante H.27.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.386. Recuento de comentarios para el “fenómeno” intuitivo. Estudiante H.27.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
0	0	0	0

Tabla A.387. Recuento de comentarios para los fenómenos c-i.i. + d-i.i. + intuitivos. Estudiante H.27.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	0	0	0

Tabla A.388. Recuento de comentarios para el fenómeno i.v.s.i. Estudiante H.27.

Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida
1	2	0	0

Para los fenómenos de enfoque intuitivo:

$$v_{intuitivo} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 0 + 0) = (2, 0)$$

Para el fenómeno de enfoque formal:

$$v_{formal} = (v_{uso}, v_{nouse}) = (2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 2 + 0) = (2, 4)$$

Perfil fenomenológico (N+, D-, m).